सांख्यिकी के सिद्धान्त

लेखक

देवकी नन्दन एलहँस

एसिस्टेन्ट प्रोफेसर, वाणिज्य विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, प्रयाग

किताब महल, इलाहाबाद : बम्बई

द्वितीय संस्करण की भूमिका

'सांख्यिकी के सिद्धान्त' का द्वितीय संस्करण पाठकों के सम्मुख प्रस्तुत करते हुए मुझे अपार हर्ष है। इस पुस्तक के प्रथम संस्करण की आलोचकों तथा पाठकों ने प्रसंशा की, अतः इसका दूसरा संस्करण उनके सामने रखते हुए मुझे पूर्ण विश्वास है कि वह इसे पहले से अधिक उपयोगी पायेंगे। प्रस्तुत पुस्तक के बहुत से अध्यायों को पर्याप्त रूप से संशोधित किया गया है और बहुत-सी नई बातें भी जो कि पहले संस्करण में नहीं थीं, दी गई हैं। अध्यायों के अन्त में नये प्रश्न भी जोड़े गये हैं। 'भारतीय समंक वाले अध्याय में बहुत-सी नई तालिकाएँ दी गई हैं। पुस्तक के अन्त में लघुगणकों के उपयोग पर एक लम्बी टिप्पणी भी इस संस्करण की एक नई वस्तु है।

मैं अपने उन अध्यापक मित्रों का आभारी हूँ जिन्होंने बहुत से सुझाव देकर इस पुस्तक को उपयोगी बनाने में मेरी सहायता की है और भविष्य में भी मैं उनसे इस सहयोग की आशा करता हूँ।

देवकीनन्दन एलहँस

प्रयाग
१५ अगस्त १९५८

दो शब्द

आधुनिक युग में सांख्यिकी का महत्व तथा उसकी उपयोगिता निर्विवाद है। आज का युग ही सांख्यिकी-युग कहलाता है। कुछ समय पूर्व तक हमारे देश की विदेशी सरकार तथा देशवासी भी समङ्कों की ओर उदासीन थे। स्वतन्त्रता प्राप्ति के पश्चात् भारत में संयोजन का युग आरंभ हुआ और देश के आर्थिक विकास की बहुत-सी योजनाएँ आरम्भ हुईं। संयोजन के युग में सांख्यिकी का महत्व सर्वोपरि है। वास्तव में बिना समंकों के किसी प्रकार की योजना का निर्माण तथा उसका कार्यान्वित होना असम्भव है।

हर्ष का विषय है कि अब भारत में सांख्यिकी तथा समंक शनैः-शनैः उस स्थान को प्राप्त कर रहे हैं जो इन्हें पहले ही मिलना चाहिए था। अब सांख्यिकी देश के लगभग सभी विश्वविद्यालयों में एक विषय के रूप में पढ़ाया जाता है। जब तक हमारे विश्वविद्यालयों में शिक्षा का माध्यम अंग्रेजी था तब तक इस विषय को पढ़ने में पुस्तक सम्बन्धी विशेष कठिनाइयाँ नहीं होती थीं। शिक्षा का माध्यम हिन्दी हो जाने पर, छात्रों तथा शिक्षकों को जिस प्रमुख कठिनाई का सामना करना पड़ रहा है वह है इस विषय पर हिंदी भाषा में लिखित पुस्तकों का अभाव। प्रस्तुत पुस्तक इसी कठिनाई को दूर करने का प्रयास है। पुस्तक में यथा सम्भव शुद्ध हिंदी शब्दों का प्रयोग किया गया है और सुविधा के लिए साथ-साथ अंग्रेजी के पर्यायवाची शब्द भी दिए गये हैं। हिन्दी शब्द अधिकतर आचार्य रघुवीर, आचार्य अघोलिया तथा आचार्य बल्दुआ द्वारा निर्मित 'सांख्यिकी शब्द कोष' से लिये गये हैं।

छात्रों के लिए पुस्तक को विशेष रूप से उपयोगी बनाने के लिए प्रत्येक अध्याय के अन्त में, अभ्यास के लिए तत्सम्बन्धी प्रश्न भी दिये गये हैं। इनमें अधिकतर का हल लेखक द्वारा लिखित Practical Problems in Statistics (second edition) में मिल सकता है।

प्रस्तुत पुस्तक, यदि सांख्यिकी को हिन्दी भाषा में पढ़ने अथवा पढ़ाने में सहायक सिद्ध हो सकी तो लेखक अपने प्रयत्नों को सफल समझेगा।

प्रयाग
१५ जून, १९५५

देवकीनन्दन एलहँस

विषय-सूची

सारणीयन (manifold tabulation); सरल सारणीयन (simple tabulation); जटिल सारणीयन (complex tabulation) प्रश्नावली ।

पृष्ठ (४६—५७)

अध्याय ७

सांख्यिकीय माध्य

(STATISTICAL AVERAGES)

परिभाषा; अच्छे माध्य के गुण; विभिन्न प्रकार के माध्य;

भूयिष्टक—(mode) परिभाषा; भूयिष्ठक निकालना; भूयिष्ठक के लाभ तथा कमियाँ ।

मध्यका—(median) परिभाषा; साधारण श्रेणी का मध्यका निकालना; वर्गित समूह का मध्यका खंडित (discrete) श्रेणी का मध्यका; संतत (continuous) श्रेणी का मध्यका, मध्यका के लाभ तथा कमियाँ ।

चतुर्थक, दशमक और शततमक (quartiles, deciles and percentiles); विभिन्न प्रकार की श्रेणियों में इनकी गणना समान्तर मध्यक (arithmetic average)—परिभाषा; साधारण श्रेणी का समान्तर माध्य निकालना, खंडित श्रेणी का समान्तर मध्यक निकालना; संतत श्रेणी का समान्तर मध्यक निकालना; ऋजुरीति (direct method) लघु-रीति (short-cut method) चारलियर चेक (charlier's check) समान्तर मध्यक के लाभ तथा कमियाँ ।

भारित समान्तर मध्यक—परिभाषा; गणना की रीतियाँ; ऋजु रीति तथा लघु रीति; भारित समान्तर मध्यक का उपयोग ।

गुणोत्तर मध्यक (geometric mean)—परिभाषा गुणोत्तर मध्यक निकालना; भारित गुणोत्तर मध्यक गुणोत्तर मध्यक के लाभ, कमियाँ तथा उपयोग ।

हरात्मक मध्यक (harmonic mean)—परिभाषा; हरात्मक मध्यक निकालना; भारित हरात्मक मध्यक; हरात्मक मध्यक के लाभ, कमियाँ तथा उपयोग ।

अन्य माध्य : वर्गकारणी माध्य (Quadratic Mean); चल माध्य (Moving Average); प्रगामी माध्य (Progressive average); संग्रथित माध्य (Composite average) माध्यों का परस्पर सम्बन्ध ।

माध्यों की परिसीमाएँ (limitations of averages) प्रमापित मृत्यु और जन्म अर्घ (standardized death and birth rates)—अशोधित अर्घ तथा प्रमापित अर्घ निकालना; प्रश्नावली ।

पृष्ठ (५८—१२४)

अध्याय ८

अपकिरण और विषमता

(DISPERSION AND SKEWNESS)

अध्याय ९

देशनांक

(INDEX NUMBERS)

अध्याय १०

सामग्री का चित्रों द्वारा निरूपण

(DIAGRAMMATIC REPRESENTATION OF DATA)

अध्याय ११

सामग्री का बिन्दु रेखीय निरूपण

(GRAPHIC REPRESENTATION OF DATA)

अध्याय १२

काल श्रेणी का विश्लेषण

(ANALYSIS OF TIME SERIES)

अध्याय १३

सहसंबंध का सिद्धान्त

(THEORY OF CORRELATION)

अध्याय १४

अन्तर्गणन

(INTERPOLATION)

अध्याय १५

सामग्री निर्वचन

(INTERPRETATION OF DATA)

अध्याय १६-२३

भारतीय समंक

(INDIAN STATISTICS)

अध्याय १६

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि जनगणना (population census)—जनगणना का महत्व; जनगणना का उद्देश्य और उसकी रीतियाँ; भारत में जनगणना की पद्धति; सन् १६३१ तक की जनगणना पद्धति; सन् १६४१ में परिवर्तन; १९५१ की जनगणना; भारतीय जनगणना के तथ्यांक; भारतीय जनगणना की कमियाँ। जीवन समंक (vital statistics) ।

अध्याय १७

औद्योगिक समंक (industrial statistics)—निर्माण उद्योगों की संगणना (census of manufacturing industries); औद्योगिक उत्पत्ति समंक (statistics of industrial output) ।

अध्याय १८

कृषि समंक (agricultural statistics)—क्षेत्र समंक (area statistics); अस्थायी बन्दोबस्त वाले क्षेत्र; स्थायी बन्दोबस्त वाले क्षेत्र; पैदावार समंक (yield statistics); पुरानी रीति (tradisional method); दैव-निदर्शन रीति (.random sampling method) ।

अध्याय १६

मूल्य समंक (price statistics)—कटाई के समय कृषि मूल्य (harvest prices); अन्य [illegible]्य; मूल्य-समंकों की कमियाँ; मूल्य-देशनांक; एकानामिक एडवाइजर का बहुशो मूल्य देशनांक (Economic adviser's wholesale price index number) इकनामिक एडवाइजर का नवीन (संशोधित) [illegible]शो मूल्य देशनांक; [illegible]रो मूल्यदेशनांक (retail price index numbers) ।

अध्याय २०

मजदूरी समंक (wage statistics)—औद्योगिक मजदूरी समंक; कृषि मजदूरी समंक; कृषि मजदूर अनुसंधान (agricultural labour enquiry) ।

अध्याय १

परिचय तथा परिभाषा

(Introduction and Definition)

मानव सभ्यता के विकास के साथ-साथ ही गणन-कला का भी विकास हुआ । आरम्भ में, जब तक कि शून्य का आविष्कार नहीं हुआ था, बड़ी संख्याओं की गणना करने में बहुत असुविधा होती थी परन्तु धीरे-धीरे इस कला में सुधार हुआ और अब तो ऐसी प्रणालियाँ निकाल ली गई हैं जिनके द्वारा बड़ी से बड़ी संख्या की गणना करना एक बहुत ही सरल तथा साधारण कार्य हो गया है । संख्याओं का उपयोग प्राचीन काल ही से बहुत देशों में होता आया है । उस समय शासक अपने देश की सेना तथा खाद्य-पदार्थों की मात्रा के बारे में अनुमान लगाने के लिए संख्याओं का प्रयोग करते थे । अब से लगभग ५००० वर्ष पूर्व मिस्र देश में वहाँ की जनसंख्या तथा राष्ट्र-धन के बारे में आँकड़े एकत्रित किये गये थे । इन्हीं आँकड़ों के आधार पर वहाँ पिरामिड बनाने का कार्य आरम्भ किया गया था । इसके लगभग १५०० वर्ष बाद अर्थात् अब से लगभग ३५०० वर्ष पूर्व मिस्र ही में रैम्स द्वितीय ने भूमि सम्बन्धी आँकड़े एकत्रित किये थे । अब से लगभग ३००० वर्ष पूर्व चीन में भी इसी प्रकार के आँकड़े एकत्रित किये जाने का प्रमाण मिलता है । भारत में भी अब से लगभग २५०० वर्ष पूर्व मौर्यवंशी राजाओं में, देश के बारे में बहुत-सी सामग्री अंकों के रूप में एकत्रित करने की प्रथा थी । इसके पश्चात् गुप्त साम्राज्य के अनेकों शासकों ने विभिन्न क्षेत्रों में संख्याओं का प्रयोग किया । मुगल-साम्राज्य में भी विशेषकर अकबर के समय भारतवर्ष में बहुत से क्षेत्रों में संख्याओं का उपयोग होता था । 'आइने अकबरी' नामक पुस्तक में मूल्य, वेतन, जनसंख्या इत्यादि के बारे में बहुत समंक मिलते हैं । अन्य देशों में भी इसी प्रकार संख्याओं के उपयोग के बहुत से प्रमाण मिलते हैं ।

परन्तु प्राचीनकाल में संख्याओं के उपयोग की सीमा बहुत संकुचित थी । सामाजिक शास्त्रों में तो अंकों का प्रयोग बहुत ही कम होता था । पिछले कुछ वर्षों से अंकों के प्रयोग की सीमा बहुत तेजी से बढ़ रही है और अब तो संख्याएँ लगभग सर्वव्यापी हो चुकी हैं । आधुनिक संसार में संख्याओं का महत्व निर्विवाद है । व्यावहारिक जीवन में शायद ही कोई ऐसा क्षेत्र होगा जिसमें संख्याओं के उपयोग की आवश्यकता न पड़ती हो । व्यक्तियों

की आय और राष्ट्रीय आय, वस्तुओं के दाम, उनकी मात्रा, खेल-कूद या पढ़ने में प्राप्त कुशलता आदि, सब क्षेत्रों में संख्याओं का उपयोग किया जाता है। यह कहने में अतिशयोक्ति नहीं होगी कि आधुनिक सभ्यता बिना संख्याओं की सहायता के टिक नहीं सकती।

संख्याओं का इतना अधिक उपयोग होने का कारण है उनके द्वारा प्राप्त होने वाली सुतथ्यता (precision)। जैसे-जैसे विज्ञान का विस्तार होता गया, सुतथ्यता की आवश्यकता बढ़ती चली गई। इस आवश्यकता की पूर्ति अधिक सही नाप लेने वाले यन्त्रों और संख्याओं द्वारा की गई। आज यह स्थिति है कि हम ऐसे ज्ञान को जो यन्त्रों द्वारा नहीं नापा जा सकता और संख्याओं के रूप में प्रस्तुत नहीं किया जा सकता, पूर्णरूप से विश्वसनीय नहीं समझते। यह सच है कि अंकों के रूप में प्रस्तुत तथ्यों को ही ठीक मानना और अन्य तथ्यों को गलत समझना कहाँ तक उचित है, यह नहीं कहा जा सकता, पर आधुनिक विचार-धारा इससे कितनी प्रभावित है इसका अनुमान लगाया जा सकता है।

समंक तथा सांख्यिकी*

समंक (statistics)

किसी अनुसंधान या प्रयोग में अंकों के रूप में प्रस्तुत तथ्यों को, जिनका संग्रह किसी निश्चित उद्देश्य से किया गया हो, समंक (Statistics) कहते हैं। अनुसंधान या प्रयोग का उद्देश्य घटनाओं (events) में कारण तथा प्रभाव (cause and effect) संबंधी अध्ययन करना होता है ताकि दिन-प्रति-दिन होने वाली घटनाओं के परस्पर-सम्बन्ध को जाना जा सके। ऐसे आवेदनों (statements) को जो एक घटना और दूसरी घटना में कारण-प्रभाव के सम्बंध को बताते हैं, नियम (law) कहते हैं। इन नियमों को जानना ही अनुसंधान या प्रयोग का उद्देश्य है। यहाँ यह जानना आवश्यक है कि निश्चित रूप से यह नहीं कहा जा सकता कि कोई घटना किन कारणों का प्रभाव है। वस्तुतः एक घटना घटने के लिए कई कारण होते हैं—कारणों का बाहुल्य होता है। इनका प्रभाव समंक पर स्वभावतः पड़ेगा। **अतएव समंक कारणों के बाहुल्य से प्रभावित होते हैं।** समंकों के अन्य गुण उसकी परिभाषा से ही स्पष्ट हो जाते हैं। **वे ऐसे तथ्य हैं जो अंकों के रूप में प्रस्तुत किये जा सकें।** अगर फूलों के रंगों को लाल, गुलाबी, पीला आदि कहकर वर्णित किया जाय तो यह तथ्य का वर्णन तो हुआ पर समंक नहीं। पर अगर इन्हें प्रकाश

---

*अँग्रेजी भाषा में समंक तथा सांख्यिकी दोनों ही के लिए केवल एक शब्द है—(statistics)। इस शब्द (statistics) को जब बहुवचन में प्रयोग करते हैं तब इसका वही अर्थ होता है जो अपनी भाषा में 'समंक' शब्द का अर्थ है और जब इसे एकवचन में प्रयोग करते हैं तो इसका वही अर्थ है जो हिन्दी में "सांख्यिकी" का।

की तरंग-लम्बान (wavelength) के रूप में वर्णित किया जाय तो ये समंक कहलायेंगे। इसी प्रकार व्यक्तियों की लम्बाई जब अङ्कों के रूप में प्रस्तुत की जायगी, तो ये तथ्य समंक कहे जायँगे। किसी निश्चित उद्देश्य से संग्रहीत आंकिक तथ्यों को ही समंक कहा जायगा। समंक ऐसे होने चाहिए जिनके द्वारा घटनाओं के बीच परस्पर सम्बन्ध जाना जा सके। परस्पर-सम्बन्ध तभी जाना जा सकता है जबकि वे सजातीय (homogeneous) हों। एक व्यक्ति की आयु और उसके मकान की आयु सजातीय नहीं हैं (उनके बीच तुलना नहीं की जा सकती)। इसलिए इस प्रकार के तथ्यों को जिनमें किसी प्रकार की समानता न हो, समंक नहीं कहा जा सकता।

समंक अंकों के रूप में प्रस्तुत तथ्यों का समूह होता है। केवल एक अङ्क को समंक नहीं कहा जा सकता। इसके साथ-साथ समंक ऐसे होने चाहिए जो **यथोचित रूप से परिशुद्ध** (accurate) हों। इनके संग्रहण तथा आगणन (collection and estimation) में यथोचित परिशुद्धता का होना आवश्यक है क्योंकि ये सांख्यिकी की विषय-वस्तु (subject matter) हैं। एक वाक्य में:—

समंक संख्याओं के रूप में प्रस्तुत और कारण बाहुल्य से प्रभावित तथ्यों के वे समूह हैं जिनका आगणन या प्रगणन यथोचित परिशुद्धता के अनुसार किया गया हो, जिनका संग्रहण किसी पूर्व निश्चित उद्देश्य के लिए किया गया हो और जो एक दूसरे से सम्बन्धित हों।

उपरोक्त परिभाषा से यह स्पष्ट है कि समंकों में निम्नलिखित विशेषताएँ होनी चाहिये:—

(१) वह संख्याओं के रूप में होने चाहिये। गुणात्मक सामग्री समंक नहीं हो सकती।

(२) वह कारण बाहुल्य से प्रभावित होने चाहिये।

(३) वह समूह के रूप में होने चाहिये; अकेली एक संख्या समंक नहीं कहला सकती।

(४) उनका आगणन या प्रगणन यथोचित परिशुद्धता के साथ किया होना चाहिये।

(५) उनका संग्रह किसी पूर्व निश्चित उद्देश्य से किया होना चाहिये।

(६) वह आपस में सम्बन्धित होने चाहिये।

सांख्यिकीय रीतियाँ (Statistical Methods)

जैसा कहा जा चुका है, **समंक सांख्यिकी के विषयवस्तु हैं।** अतएव यदि किसी विषय के बारे में हम ठीक-ठीक जानना चाहते हैं तो इनके संग्रहण, आगणन और प्रगणन (collection, estimation and enumeration) में विशेष सावधानी रखनी पड़ेगी ताकि इनके द्वारा ज्ञात हुआ परिणाम विश्वसनीय हो। जब सामग्री (data)

संग्रहीत की जाती हैं, तो हमें बहुत बड़ी राशि में अङ्क मिलते हैं। इन अङ्कों को इस दशा में समझना सम्भव नहीं होता। अतएव इन्हें इस प्रकार प्रस्तुत करना पड़ता है जिससे ये आसानी से समझ में आ जायँ और इनका उपयोग परिणाम निकालने के लिए सुविधा-जनक रीति से किया जा सके। इस उद्देश्य की प्राप्ति के लिए सांख्यिकीय रीति (statistical method) का उपयोग किया जाता है। **सांख्यिकीय रीतियाँ** (statistical methods) **वे रीतियाँ हैं जिनका उपयोग करके कारण-बाहुल्य से प्रभावित आंकिक सामग्री** (quantitative data) **का संग्रहण** (collection), **वर्गीकरण** (classification), **सारणीयन** (tabulation) **निश्चित सिद्धान्तों के अनुसार किया जा सके ताकि इच्छित सूचना आवश्यक परिशुद्धता** (accuracy) **के साथ प्राप्त हो सके।**

सांख्यिकीय रीतियों के निम्नलिखित भाग किये जा सकते हैं :—

(१) उन नियमों का उपयोग जो सामग्री संग्रहण और सामग्री को सारणी, चित्र या रेखाचित्र के रूप में प्रस्तुत करने से संबंधित हैं।

(२) उन नियमों का उपयोग जिनसे विभिन्न माध्यों (averages) और अपकिरणों (dispersions) की तुलना की जा सके।

(३) विभिन्न सामग्रियों के बीच परस्पर सम्बन्ध ज्ञात करना। यह सह-सम्बन्ध (correlation) के अन्तर्गत आता है।

(४) प्रस्तुत सामग्री का निर्वचन (interpretation) और उसकी सूचना प्राप्त करने के लिए उपयोग।

(५) दी हुई सामग्री से भविष्य में होने वाली घटनाओं का अनुमान लगाना अर्थात् पूर्वानुमान (forecasting)।

इन रीतियों का वर्णन आगामी परिच्छेदों में किया गया है।

यहाँ पर यह ध्यान रखना चाहिए कि **इस कथन में कि सांख्यिकी द्वारा कुछ भी सिद्ध किया जा सकता है, कुछ भी सत्य नहीं है**। अगर सामग्री का निश्चित उद्देश्य सामने रखकर संग्रहण किया जाय, सांख्यिकीय रीतियों के अनुसार उसका विश्लेषण (analysis) किया जाय तो समंकों से केवल एक ही परिणाम निकाला जा सकता है। सर्वसाधारण का जो अविश्वास समंकों के प्रति और इसलिए सांख्यिकी के प्रति है, उसका कारण सांख्यिकीय रीतियों का ठीक-ठीक उपयोग न किया जाना है। अपना स्वार्थ सिद्ध करने के लिए विज्ञापनों, राजनीति आदि में समंकों को बदल कर अविश्वसनीय सामग्री का संग्रहण करके ऐसे परिणाम निकाले जाते हैं जिनसे किसी पक्ष-विशेष को लाभ होता है। पर इस बात पर ध्यान रखना चाहिए कि अगर सामग्री का प्रहस्तन सांख्यिकीय रीतियों से नहीं किया गया है तो समंक प्राप्त नहीं होते बल्कि केवल अंकों का समूह रह जाता है और अङ्कों के द्वारा कुछ भी सिद्ध किया जा सकता है। उदाहरण के लिए किसी विज्ञापन को ले लीजिए

जिसमें यह बताया जाता है कि १०० व्यक्तियों में से जो किसी एक 'मंजन' का प्रयोग करते हैं, ९९ व्यक्ति स्वस्थ दाँत वाले होते हैं। आवेदन सत्य हो सकता है। पर इसमें यह नहीं बताया गया है कि ये १०० व्यक्ति किस प्रकार चुने गये हैं। पर आशा यह की जाती है कि लोग यह समझें कि प्रत्येक १०० व्यक्तियों में जो दिये हुए 'मंजन' का उपयोग करते हैं ९९ व्यक्ति स्वस्थ दाँत वाले होंगे।

सांख्यिकीय रीतियों का उपयोग, प्रयोग और अनुसंधान दोनों में किया जाता है। अनुसंधान में कारणों का पूर्ण रूप से नियन्त्रण असंभव है। यदि इस प्रकार का नियन्त्रण किया भी जा सके तो वह वांछनीय नहीं होगा। इसका कारण यह है कि सामाजिक क्षेत्रों में कारणों को नियंत्रित करके प्राप्त किये गये नियम भले ही सिद्धान्ततः सही हों, पर उनका उपयोग व्यवहार में नहीं किया जा सकता। अतएव वे व्यर्थ हो जाते हैं। पर अगर अनुसंधान पूर्ण रूप से अनियंत्रित हो तो एक घटना के कारण इतने अधिक हो जायँगे कि सामग्री को ठीक-ठीक समझना सम्भव नहीं हो सकेगा। इस कठिनाई को दूर करने के लिए उन कारणों का चुनाव करना पड़ता है जो मुख्यतः किसी दी हुई घटना को जन्म देते हैं और तत्सम्बन्धी सामग्री का संग्रहण किया जाता है। प्रयोग में कारणों को कुछ हद तक नियंत्रित किया जा सकता है। पर इसके बावजूद भी सांख्यिकीय रीतियों का उपयोग अनिवार्य हो जाता है क्योंकि संग्रहण से पूर्वानुमान तक का प्रत्येक भाग यदि निश्चित नियमों के अनुसार (जो सांख्यिकीय रीतियों के अन्तर्गत आते हैं) न किया जाय तो प्राप्त परिणाम को ठीक और विश्वसनीय नहीं माना जा सकेगा।

सांख्यिकी की परिभाषा (Definition of Statistics)

सांख्यिकी (statistics) शब्द का प्रयोग पहले राज्य-अङ्कगणित (state-arithmetic) में किया गया। इसकी प्रगति के साथ-साथ इसका विस्तार बढ़ता गया और यह केवल राज्य-संचालन की सहायता करने वाला शास्त्र न रहकर अन्य विज्ञानों में भी उपयुक्त होने लगा। तदनुसार इसकी परिभाषा भी बदलती गई और आज इस विषय के जितने लेखक हैं उतनी ही इसकी परिभाषाएँ भी हैं।

डा० बाउले (Dr. Bowley) के अनुसार '**सांख्यिकी वह विज्ञान है जो सामाजिक रचना को सम्पूर्ण मानकर उसके सब प्रत्यक्षीकरणों को नापता है।**' (Statistics is the science of the measurement of social organism, regarded as a whole in all its manifestations)। इस परिभाषा में सामाजिक शब्द का उपयोग सांख्यिकी के क्षेत्र को सीमित बना देता है। इस परिभाषा के अनुसार सांख्यिकी के क्षेत्र में केवल वे विषय आते हैं जो मानव और उसकी क्रियाओं से सम्बन्धित हों। पर आधुनिक काल में सांख्यिकी का उपयोग

केवल मानव और उसकी क्रियाओं तक ही सम्बन्धित नहीं है। जहाँ कहीं भी आंकिक माप की समस्या होती है, सांख्यिकी का उपयोग किया जाता है। इस दोष को डा० बाउले ने स्वयं दूर किया है। उन्होंने कहा कि इस परिभाषा का उपयोग करने पर सांख्यिकी का विस्तार केवल उन क्षेत्रों तक ही सीमित हो जाता है जहाँ समाज-शास्त्र व अर्थशास्त्र की समस्याएँ हों। अतः आगे चलकर वे लिखते हैं कि **सांख्यिकी को सही रूप में माध्यों** (averages) **का विज्ञान कहा जा सकता है।** (Statistics may rightly be called the science of averages)। इस परिभाषा में उन सब समस्याओं का समावेश नहीं है जिनका अध्ययन सांख्यिकी के अन्तर्गत किया जाता है। यह सच है कि सांख्यिकी में माध्यों की गणना करने का महत्वपूर्ण स्थान है पर सांख्यिकी, माध्यों की गणना करना मात्र नहीं है। माध्यों का उपयोग एक समग्र या समूह को संक्षिप्त और सुविधाजनक रूप में प्रस्तुत करने के लिए होता है ताकि असामान्य सदस्यों का प्रभाव कम पड़े। पर इतने पर ही सांख्यिकी का विस्तार समाप्त नहीं हो जाता। अन्य विधियों और सिद्धान्तों का उपयोग भी सांख्यिकी में किया जाता है जैसे रेखाचित्र या चित्रों की विधियाँ या संभाविता (probability) या सहसम्बन्ध (correlation) के सिद्धान्त। यह नहीं कहा जा सकता कि सांख्यिकी में इनका महत्व माध्यों की गणना करने से कम है। इस परिभाषा के अनुसार सांख्यिकी का उपयोग केवल मानव और उसकी क्रियाओं तक ही सम्वन्धित नहीं रहता, पर इसमें यह दोष है कि यह सांख्यिकी के केवल एक भाग पर आधारित है और उसके अन्तर्गत आने वाली अन्य विधियों और सिद्धान्तों का समावेशन नहीं करती। डा० बाउले द्वारा प्रस्तुत एक अन्य परिभाषा के अनुसार **साँख्यिकी गणन-विज्ञान** (science of counting) है। पर जिस प्रकार सांख्यिकी को माध्य-विज्ञान (science of averages) नहीं माना जा सकता उसी प्रकार गणन-विज्ञान मानने पर इसका विस्तार सीमित हो जाता है। बहुत बड़ी संख्याओं का गणन असंभव-सा है। अतएव जहाँ तक छोटी वस्तुओं की गणना (जो की जा सकती है) की समस्या है, यह परिभाषा उचित कही जा सकती है, पर बड़ी संख्याओं के लिए यह उपयुक्त नहीं है क्योंकि इनकी गणना नहीं की जाती बल्कि आगणन (estimation) किया जाता है। इन संख्याओं पर मुख्यतः विचार करते हुए बोडिंगटन (Boddington) ने सांख्यिकी को **'आगणन और संभाविताओं** (estimates and probabilities) **का विज्ञान'** कह कर परिभाषित किया है। इन सब परिभाषाओं का मुख्य दोष यह है कि ये सांख्यिकी के किसी पक्ष-विशेष पर विचार करके दी गई हैं। वास्तव में यदि ये सब परिभाषाएँ एक साथ रखी जायँ तो सांख्यिकी की एक परिभाषा बन सकती है, पर यह परिभाषा भी सर्व-समावेशी (all-inclusive) नहीं होगी।

उपर्युक्त परिभाषाएँ 'सांख्यिकी क्या है ?' के उत्तर में दी गई हैं। कुछ ऐसी परि-

भाषाएँ भी हैं जो यह बताती हैं कि 'सांख्यिकी क्या करती है ?' ऐसी परिभाषाओं के अन्तर्गत किंग (King) और लॉविट ((Lovit) की परिभाषाएँ आती हैं । किंग (King) के अनुसार "सांख्यिकी प्रगणना (enumeration) या आगणन संग्रह (collection of estimates) के विश्लेषण के परिणाम-रूप में प्राप्त सामूहिक प्राकृतिक या सामाजिक गोचर घटनाओं (phenomenon) पर निर्णय देने की रीतियों का विज्ञान है" (The science of statistics is the method of judging collective, natural or social phenomenon from the results obtained by the analysis of enumeration or collection of estimates) लॉविट, (Lovit) की परिभाषा के अनुसार सांख्यिकी वह विज्ञान है जो आंकिक-तथ्यों के संग्रहण (collection) वर्गीकरण (classification) और सारणीयन (tabulation) को गोचर घटनाओं (phenomena) की व्याख्या, वर्णन और तुलना करने के लिए आधार मानकर उन पर विचार करता है । इन परिभाषाओं के अनुसार सांख्यिकी-विज्ञान (science of statistics) सांख्यिकीय रीतियों का विवरण या स्पष्टीकरण (exposition) है ।

इन सब परिपाभाओं को ध्यान में रखते हुए यह कहा जा सकता है कि 'सांख्यिकी वह विज्ञान है जो तथ्यों को आंकिक रूप में नापता है, उनका विश्लेषण करके उन्हें इस प्रकार प्रस्तुत करता है जिससे उनके बीच का परस्पर सम्बन्ध जाना जा सके' इसी प्रकार वे सिद्धान्त जो तथ्यों की आंकिक नाप, इनके विश्लेषण और सह-सम्बन्ध से सम्बन्धित हैं सांख्यिकी के सिद्धान्त (statistical laws) कहलाते हैं । । इस परिभाषा के अनुसार किन तथ्यों के विषय में जानकारी प्राप्त करनी है यह सांख्यिकी के अन्तर्गत नहीं आता । पर जब तथ्य निश्चित कर लिए जाते हैं तो उनको आंकिक रूप में किस प्रकार नापा जा सकता है, यह सांख्यिकी का विषय है । इस प्रकार प्राप्त मापों को ऐसे रूप में रखना जिससे तथ्यों के बीच तुलना की जा सके या सम्बन्ध स्थापित किया जा सके, भी सांख्यिकी के अन्तर्गत आता है ।

सांख्यिकी के भाग (Divisions of Statistics)

सांख्यिकी के दो मुख्य भाग किये जा सकते हैं:—

(१) **सांख्यिकीय रीतियां** (Statistical methods)—इसके अन्तर्गत सब प्रकार की सामग्रियों में व्यवहार होने वाली प्रक्रिया के नियमों (rules of procedure) और तत्सम्बन्धी सामान्य सिद्धान्तों पर विचार किया जाता है । जैसे सामग्री एकत्रित करने, वर्गीकरण करने तथा तुलना करने के नियम ।

(२) **व्यावहारिक सांख्यिकी** (Applied Statistics)—इसमें सांख्यिकीय

रीतियों का वास्तविक तथ्यों या विषय-वस्तु में उपयोग करने पर विचार किया जाता है। जैसे राष्ट्रीय आय तथा उत्पादन समंक।

व्यावहारिक सांख्यिकी को दो भागों में बाँटा जा सकता है। एक, **वर्णनात्मक व्यावहारिक सांख्यिकी** (descriptive applied statistics) जिसमें भूतकाल या वर्तमान काल में एकत्रित सामग्री पर विचार किया जाता है। दूसरा, **वैज्ञानिक व्यावहारिक सांख्यिकी** (scientific applied statistics) जिस में सांख्यिकीय रीतियों से वर्णनात्मक व्यावहारिक सांख्यिकी के लिए संग्रहीत सामग्री द्वारा उन नियमों का निर्धारण किया जाता है जो पूर्वानुमान (forecasting) करने में सहायता देते हैं।

व्यावहारिक सांख्यिकी का उपयोग प्रायः सभी विज्ञानों में किया जाता है जैसे अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र, जीवशास्त्र आदि ।

सांख्यिकी और अन्य विज्ञानों का सम्बन्ध

जैसा कि पहले कहा जा चुका है आधुनिक युग में कदाचित् ही कोई ऐसा विज्ञान होगा जिसका सांख्यिकी से सम्बन्ध न हो, पर यहाँ हम सांख्यिकी के गणित, अर्थशास्त्र, खगोल, जीवशास्त्र तथा अन्तरिक्ष शास्त्र के सम्बन्ध पर कुछ प्रकाश डालेंगे क्योंकि इन विज्ञानों से सांख्यिकी बहुत घनिष्ठ रूप से सम्बन्धित हैं।

सांख्यिकी और गणित (Statistics & mathematics)—सांख्यिकी का सैद्धान्तिक पक्ष व्यावहारिक गणित (applied mathematics) का एक भाग है। सांख्यिकीय माध्य, माध्य से विचलन, विषमता, विभिन्न प्रकार के गुणक (जैसे सह-सम्बन्ध-गुणक, विचलन-गुणक आदि), वक्र अन्वायोजन, देशनांक आदि सारतः (essentially) गणितीय बोध (mathematical concepts) हैं। बिना गणित का उपयोग किए इनको ठीक-ठीक समझना अधिकांशतः अत्यन्त कठिन है और कुछ स्थानों पर बिलकुल असम्भव है। दैव निदर्शन पूर्णतः संभाविता-नियम (Theory of probability) पर आधारित है और संभाविता का बोध गणित के बिना अत्यन्त कठिन है। इस परस्पर-सम्बन्ध के कारण ही प्रायः गणितज्ञ सांख्यिक भी हुए हैं। उदाहरणार्थ बर्नौली (Bernoulli), गॉस (Gauss) आदि लिए जा सकते हैं। इस सम्बन्ध की घनिष्ठता इसी बात से प्रकट हो जायगी कि गणितीय सांख्यिकी (mathematical statistics) सांख्यिकी और गणित दोनों का एक भाग है।

पर सैद्धान्तिक स्तर में इतनी घनिष्ठता के बावजूद भी इन दोनों में एक मुख्य भेद है। सांख्यिकी एक प्रायोगिक विज्ञान (empirical science) है। इसकी उपयोगिता केवल इसी बात पर निर्भर करती है कि यह व्यवहार को समझने में सहायता देता है।

पर गणित के लिए यह बात सच नहीं है । और यही इनमें मुख्य अन्तर है । भले ही कोई सिद्धान्त गणित के दृष्टिकोण से कितना ही उत्तम और परिशुद्ध परिणाम देनेवाला क्यों न हो, पर अगर उसका उपयोग व्यावहारिक जीवन में नहीं किया जा सकता है—अर्थात् अगर वह प्रयोग-सिद्ध न हो सके, तो सांख्यिकी में उसका कोई विशेष महत्त्व नहीं है ।

सांख्यिकी और अर्थशास्त्र (Statistics & Economics)—अर्थशास्त्र के लिए सांख्यिकी बहुत अधिक उपयोगी है । सांख्यिकी का उपयोग अर्थशास्त्र में दो स्तरों पर होता है जब किसी सिद्धान्त को व्यवहार में लाना पड़ता है और जब संग्रहीत सामग्री की व्याख्या करनी पड़ती है । अर्थशास्त्र मुख्यतः एक प्रायोगिक विज्ञान है और जब तक किसी सिद्धान्त की व्यवहार के द्वारा पुष्टि नहीं की जा सकती, तब तक वह अर्थहीन-सा है । और किसी भी आर्थिक नियम या सिद्धान्त की व्यावहारिक जगत के लिए उपयोगिता जानने में सांख्यिकी की शरण लेना आवश्यक है ।

केवल आर्थिक सिद्धान्तों या नियमों की पुष्टि करने के लिए ही सांख्यिकी की आवश्यकता नहीं पड़ती, बल्कि साथ ही साथ व्यावहारिक अर्थशास्त्र में भी इसकी आवश्यकता पड़ती है । व्यावहारिक अर्थशास्त्र के बारे में तो यहाँ तक कहा जा सकता है कि बिना सांख्यिकी के यह पूरा हो ही नहीं सकता । जहाँ भी आर्थिक नीति (economic policy) निश्चित करनी पड़ती है, सांख्यिकी का उपयोग अनिवार्य हो जाता है । वस्तुस्थिति का सुतथ्यतापूर्ण अध्ययन किये बिना उसके संघटकों का उचित माप किये किसी भी प्रकार की आर्थिक-नीति निश्चित करना सम्भव नहीं है ।

आर्थिक-आयोजन (economic planning) में तो बिना समंकों का पूरा-पूरा ज्ञान हुए कुछ किया ही नहीं जा सकता । आयोजन के आरम्भ से अन्त तक सिवाय समंकों के संग्रहण, विश्लेषण और निर्वचन के कुछ भी नहीं है ।

इन्हीं बातों का ध्यान रखकर अर्थशास्त्र की एक नई शाखा बन गई है जिसमें गणितीय-अर्थशास्त्र और गणितीय सांख्यिकी का प्रयोग होता है । इसको 'इकॉनोमेट्रिक्स' (Econometrics) कहते हैं । इसमें अर्थशास्त्र के नियमों और सिद्धान्तों को गणितीय रूप में रखा जाता है ताकि वे मापनीय (measurable) हो सकें । इन गणितीय रूप में रखे गये नियमों और सिद्धान्तों की पुष्टि करने के लिए सामग्री का संग्रहण किया जाता है जो सांख्यिकी का कार्य है । इसकी वृद्धिमान प्रगति इस बात का संकेत करती है कि इन तीनों में कितना घनिष्ठ सम्बन्ध है और ये एक दूसरे से कितनी अधिक सहायता पा सकते हैं ।

सांख्यिकी और खगोल (Statistics and Astronomy)—प्राचीन समय में सांख्यिकी और गणित-ज्योतिष अथवा खगोल का घनिष्ठ सम्बन्ध रहा है । विश्व के प्रायः सभी देशों में खगोलशास्त्रियों ने प्राचीन काल से ही विभिन्न ग्रहों तथा नक्षत्रों की चाल

तथा स्थानान्तर के विषय में आँकड़े एकत्रित किये हैं, वास्तव में अल्पतम वर्ग रीति (Method of least squares) का प्रयोग सर्वप्रथम गणित ज्योतिषाचार्यों ने ही किया था।

सांख्यिकी तथा जीव शास्त्र (Statistics and Biology)—जीवशास्त्र के बहुत से सिद्धान्तों का सांख्यिकी से बहुत घनिष्ठ सम्बन्ध है। प्रोफ़ेसर कार्ल पिअरसन ने बहुत से जीवशास्त्रसम्बन्धी सिद्धान्तों के सांख्यिकीय आधार का अध्ययन किया है। वास्तव में कार्ल पियरसन का विख्यात सह-सम्बन्ध गणक (coefficient of correlation) पिता और पुत्रों की लम्बाई के अध्ययन के फल स्वरूप ही मालूम हुआ। इसी गुणक की सहायता से उन्होंने यह सिद्ध किया कि लम्बे पिताओं के अधिकतर लम्बे पुत्र ही पैदा होते हैं।

सांख्यिकी तथा अन्तरिक्ष शास्त्र (Statistics and Meteorology)—सांख्यिकी तथा अन्तरिक्ष शास्त्र का भी सम्बन्ध काफी घनिष्ठ है। अन्तरिक्ष शास्त्र द्वारा हम विभिन्न स्थानों का तापक्रम, वर्षा की मात्रा तथा वायु की नमी इत्यादि का अध्ययन करते हैं। सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग के बिना यह सम्भव नहीं है। अन्तरिक्ष शास्त्र द्वारा भविष्य के मौसम का पूर्वानुमान किया जाता है। इसमें भी सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग आवश्यक है।

इसके अतिरिक्त सांख्यिकी का उपयोग अन्य कई विज्ञानों में होता है। समाजशास्त्र शिक्षाशास्त्र, स्वास्थ्य-विज्ञान आदि कई ऐसे विषय हैं जो सांख्यिकीय रीतियों का उपयोग करके लाभ उठाते हैं।

प्रश्न

(१) समंक 'संख्याओं के रूप में दिये गए और कारण बाहुल्य से प्रभावित तथ्यों के समूह हैं जिनका आगणन या प्रगणन यथोचित परिशुद्धता के साथ किया गया है, जिनका संग्रहण किसी पूर्वनिश्चित उद्देश्य के लिए किया गया है और जिनको एक-दूसरे से सम्बन्धित करके प्रस्तुत किया गया है।'

उपर्युक्त परिभाषा की, समंकों के गुणों को स्पष्ट करते हुए, व्याख्या कीजिये।

(बी० कॉम, इलाहाबाद, १९४५)

(२) सांख्यिकी विज्ञान के क्षेत्र पर विचार कीजिए और इसका सम्बन्ध सामाजिक और प्राकृतिक विज्ञानों के साथ दिखाइए। (बी० कॉम, लखनऊ, १९४०)

(३) उचित उदाहरणों के साथ विभिन्न प्रकार की सांख्यिकीय रीतियों का वर्णन कीजिए। (बी० कॉम, इलाहाबाद, १९४०)

(४) 'सांख्यिकी प्रत्येक व्यक्ति को प्रभावित करती है और जीवन को कई स्थानों में छूती है। यह विज्ञान और कला दोनों है।'

उपर्युक्त कथन का अर्थ उचित उदाहरणों के साथ समझाइए।

(बी० कॉम, इलाहाबाद, १९५२)

(५) 'अनिपुण व्यक्तियों के हाथ में सांख्यिकीय रीतियां सबसे भयानक उपादान हैं। सांख्यिकी उन विज्ञानों में है जिसमें प्रवीण व्यक्तियों को कलाकारों-सा आत्म-संचय रखना पड़ता है।'

उपर्युक्त कथन के महत्व को अच्छी तरह समझाइए।

(बी० कॉम, इलाहाबाद, १९४७)

(६) सांख्यिकी की निम्नलिखित परिभाषाओं की आलोचना कीजिए :--

(क) सांख्यिकी माध्यों का विज्ञान है।

(ख) सांख्यिकी आगणन और संभाविताओं का विज्ञान है।

(ग) सांख्यिकी गणन विज्ञान है।

(७) निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए :--

(क) समंकों से कुछ भी सिद्ध किया जा सकता है।

(ख) अंक झूठे नहीं हो सकते।

(ग) समंकों द्वारा किसी भी बात की पुष्टि की जा सकती है।

(८) सांख्यिकी का गणित और अर्थशास्त्र से क्या सम्बन्ध है? समझाइये।

(९) सांख्यिकी को एक विज्ञान और कला दोनों ही कहा जाता है, क्यों? इसका अन्य विज्ञानों से क्या सम्बन्ध है? समझाइये।

(बी० कॉम, आगरा १९४९)

(१०) "विज्ञान बिना समंकों के फलदायक नहीं होते और समंक बिना विज्ञान के निर्मूल है।" विवेचना कीजिये।

अध्याय २

सांख्यिकी के कार्य तथा महत्व

(Functions and Importance of Statistics)

आधुनिक युग में सांख्यिकीय रीतियों का उपयोग लगभग सभी क्षेत्रों में किया जाता है और इस बात से ही यह अनुमान लगाया जा सकता है कि आजकल सांख्यिकी की उपयोगिता कितनी अधिक होगी। वास्तव में आज संसार में ऐसे करोड़ों व्यक्ति हैं जो विना यह जाने हुए कि सांख्यिकी किस शास्त्र का नाम है, दिन में कितनी ही वार सांख्कीय रीतियों का या समंकों का उपयोग करते हैं। सांख्यिकीय रीतियाँ लगभग सर्वव्यापी हैं और मनुष्य उन्हें अपने नित्य प्रति के व्यवहार में उपयोग करता है। जव कोई मनुष्य रेडियो या मोटरकार खरीदना चाहता है और उसके लिए वह विभिन्न उत्पादकों की मूल्य-सूची का निरीक्षण करता है तो वास्तव में वह इन वस्तुओं का औसत या माध्य मूल्य और इनका विस्तार (range) मालूम करना चाहता है। 'माध्य मूल्य' (average price) और मूल्य का 'विस्तार' सांख्यिकीय शब्द हैं और खरीददार इनके बारे में कुछ भी न जानते हुए वास्तव में इनका प्रयोग करता है। सांख्यिकीय रीतियाँ साधारण मनुष्यों के व्यावहारिक तरीकों से वहुत अधिक मिलती-जुलती हैं। जब कोई किसान यह चाहता है कि इस वर्ष अमुक मात्रा में वर्षा हो ताकि खेती अच्छी हो सके तो वास्तव में उसके दिमाग में यह बात स्पष्ट है कि वर्षा और खेती में सह-सम्वन्ध (correlation) है चाहे वह इस सांख्यिकीय रीति के वारे में विल्कुल अनभिज्ञ ही क्यों न हो। इसी प्रकार जव हम इस मुहावरे का प्रयोग करते हैं कि "जैसी करनी वैसी भरनी" तव हम इस ओर संकेत करते हैं कि मनुष्य के कर्म तथा उसके फल में घनात्मक सह सम्वन्ध (positive correlation) है।

ऐसे कितने ही उदाहरण दिये जा सकते हैं जिससे यह सिद्ध हो जाएगा कि मानव व्यवहार तथा सांख्यिकीय रीतियों में घनिष्ठ सम्वन्ध है। यही कारण है कि आज सांख्यिकी एक सर्वव्यापी शास्त्र का रूप ले चुका है। इसके वढ़ते हुए महत्व के वहुत से कारण हैं। उनको समझने के लिए यह आवश्यक है कि सांख्यिकी के कार्यों पर प्रकाश डाला जाय।

सांख्यिकी के कार्य (Functions of Statistics)

आंकिक रूप में उपलब्ध तथ्यों की संख्या साधारणतः इतनी अधिक

होती है कि उन्हें समझना आसान नहीं होता। अगर ये सब तथ्य प्रस्तुत कर दिये जायँ तो मनुष्य का मस्तिष्क उनसे कुछ भी निष्कर्ष नहीं निकाल सकता। इसका एक कारण तो उनकी संख्या है और दूसरा उनकी विभिन्नता। पर यदि इन तथ्यों को ऐसे रूप में रखा जा सके जिससे उनकी संख्या न्यूनतम हो जाय और जिससे उनके बीच की समानता स्पष्ट हो जाय, तो उनको समझना अपेक्षाकृत सरल हो जायगा और उनका प्रहस्तन भी अधिक सुविधाजनक हो सकेगा। तथ्यों को बोधगम्य और सुविधाजनक रूप में प्रस्तुत करने के लिए सांख्यिकी में कई रीतियों का उपयोग किया जाता है जैसे माध्य की गणना करना या तथ्यों को चित्रों या रेखाचित्रों के रूप में दर्शाना। इन रीतियों के कारण तथ्यों को समझना और उनकी तुलना करना अधिक सुविधाजनक हो जाता है। अर्थात् सांख्यिकी द्वारा जटिल (complex) और अधिक संख्या में प्रस्तुत तथ्यों को सरल और सुविधाजनक रूप में उपस्थित किया जाता है।

सांख्यिकी का दूसरा कार्य सरल और सुविधाजनक रूप में प्रस्तुत की गई सामग्री की तुलना करना और उसके बीच गणितीय सम्बन्ध स्थापित करना है। यह साधारण अनुभव की बात है कि किसी एक स्थिति को ठीक-ठीक समझने के लिए उसकी किसी दूसरी स्थिति से तुलना करनी पड़ती है। ऐसा करने से इनके बीच के अन्तर को अधिक अच्छी तरह समझा जा सकता है। इसी प्रकार विभिन्न तथ्यों के बीच सम्बन्ध स्थापित करने से उनको समझना अधिक आसान हो जाता है। कई तथ्य ऐसे होते हैं, जिनको यदि तुलनात्मक रूप में न रखा जाय तो उनके कोई माने नहीं होते जैसे देशनांक (index numbers)

सांख्यिकी का तीसरा कार्य तथ्यों को यथार्थ (concrete) रूप में रखना है। सांख्यिकी का उपयोग न करने पर इस बात की सम्भावना रहती है कि तथ्य, संदिग्ध और अनिश्चित रहें। उनको मूर्त या यथार्थ रूप में रखने से न केवल उनकी संदिग्धता और अनिश्चितता ही कम हो जाती है बल्कि वे सर्वमान्य भी हो जाते हैं—उन पर व्यक्तियों की अभिनति (bias) और पक्षपात (prejudice) का प्रभाव नहीं पड़ता।

सांख्यिकी का एक अन्य कार्य दूसरे विज्ञानों के नियमों का सुझाव देना और उनकी परीक्षा करना है। केवल संग्रहीत सामग्री पर विचार करने से ही कोई विषय सम्बन्धी नियम निकाले जा सकते हैं। जैसे टाइको ब्राहे (Tycho Brahe) द्वारा गणित-ज्योतिष सम्बन्धी सामग्री से केप्लर (Kepler) ने ग्रहों की चाल आदि के बारे में नियम निकाले थे। ऐसे नियम जो निगमन रीतियों (deductive methods) से नहीं निकाले जा सकते, सांख्यिकी द्वारा प्राप्त किये जा सकते हैं। इसके साथ-साथ निगमन-रीतियों द्वारा प्राप्त नियमों की व्यावहारिक क्षेत्र में उपयोगिता देखने के लिए

भी सांख्यिकी का उपयोग आवश्यक है। अर्थात् सांख्यिकी का व्यवहार घटनाओं के बीच प्रभाव-कारण सम्बन्ध स्थापित करने के लिए होता है।

सांख्यिकी का प्रयोग वर्तमान वस्तु-स्थिति के बारे में विश्वसनीय आगणन करने में तो होता ही है और **इसके साथ-साथ भविष्य की स्थितियों के बारे में पूर्वानुमान** (forecasting) **करने के लिए भी होता है**। आवर्तिक परिवर्तनों को ठीक रूप से समझने के लिए सांख्यिकी का उपयोग किया जाता है। आवर्तिक परिवर्तनों या अन्य परिवर्तनों में घटनाओं के बीच प्रभाव-कारण सम्बन्ध प्रायः जटिल होता है। सांख्यिकी द्वारा यह जाना जा सकता है कि ये परिवर्तन कहाँ तक आकस्मिक (accidental) या अर्थपूर्ण (significant) हैं। इनके विषय में दिये गये आवेदनों या किये गये पूर्वानुमानों की विश्वसनीयता को भी सांख्यिकी द्वारा जाना जा सकता है।

सांख्यिकी का एक महत्वपूर्ण कार्य यह है कि इसकी सहायता से यह जाना जा सकता है **कि कोई प्रभाव अर्थपूर्ण** (significant) **है या नहीं**। ऐसे प्रभावों का, जो अर्थपूर्ण नहीं है, इसके द्वारा निरसन (eliminate) इस प्रकार किया जा सकता है जिससे विभ्रम (error) न्यूनतम हो। इसका उपयोग अनुसंधानों में आवश्यकीय हो जाता है।

सांख्यिक के कार्य (Functions of a Statistician)

सांख्यिकी की परिभाषा ज्ञात होने पर सांख्यिक (statistician) के कार्यों पर विचार किया जा सकता है अर्थात् यह जाना जा सकता है कि एक सांख्यिक के क्या कार्य हैं। स्पष्टतः सांख्यिक का प्रथम कार्य **सांख्यिकीय सामग्री का संग्रहण होगा** ताकि तथ्यों को आंकिक रूप में रखा जा सके। सामग्री संग्रहण यदि उचित रूप में किया जाय तो वह ऐसा होना चाहिए की सांख्यिक की अभिनति (bias) या पक्षपात (prejudice) से प्रभावित न हो। सांख्यिक को एक सच्चे वैज्ञानिक की भाँति केवल तथ्यों का, जैसे वे मिलते हैं, संग्रहण करना चाहिये। किसी भी प्रकार से अभिनत (biassed) या पक्षपाती सांख्यिक, वस्तु-स्थिति के बारे में सही नहीं बता सकता। अगर सामग्री-संग्रहण अभिनत या पक्षपाती हो तो सांख्यकीय रीतियों का ठीक उपयोग नहीं किया जायगा और इस प्रकार प्राप्त समंक केवल अंक रह जायँगे जिनसे कुछ भी सिद्ध किया जा सकता है। **संग्रहीत सामग्री का विश्लेषण करना** सांख्यिक का दूसरा कार्य है। सामग्री के विश्लेपण के अन्तर्गत वे सब कार्य आते हैं जो सामग्री को संक्षेप में रखने, उनकी तुलना करने, उनमें परस्पर सम्बन्ध स्थापित करने आदि से सम्बन्धित हैं। अर्थात् इस कार्य के अन्तर्गत, सांख्यिक, संग्रहीत सामग्री का इस रीति से उपयोग करता है जिससे कुछ परिणाम निकाला जा सके। सांख्यिक का तीसरा कार्य, जो सबसे महत्वपूर्ण है, **इन परिणामों का निर्वचन** (interpretation) करना है। विश्लेषण द्वारा प्राप्त परिणामों का निर्वचन सबसे

कठिन कार्य है, क्योंकि इसमें अपनी सब परिसीमाओं पर विचार करना पड़ता है और उन कारणों के प्रभाव पर ध्यान रखना पड़ता है जिनको प्रयोग या अनुसंधान करने में छोड़ दिया गया था। ये परिणाम कहाँ तक विश्वसनीय हैं और इन्हें आधार मानकर कहाँ तक अन्य तथ्यों को जाना जा सकता है, इस पर भी विचार करना पड़ता है।

जिन परिसीमाओं (limitations) के साथ सांख्यिक को कार्य करना पड़ता है वे महत्वपूर्ण हैं। सांख्यिक प्रायः नियंत्रित प्रयोग नहीं कर सकता और इसलिए उसे प्रत्येक घटना वैसी ही लेनी पड़ती है जैसी वह घटती है। किसी घटना का कारण जानने के लिए वह केवल अनुमान लगा सकता है और इसी अनुमान के बल पर वह तथ्यों का संग्रहण, विश्लेपण और निर्वचन करता है। कई दशाओं में उसे ठीक रीति से अनुसंधान करने तक की सुविधा नहीं मिलती। पर इन सब असुविधाओं और कठिनाइयों के बावजूद भी वह एक सफल सांख्यिक है, यदि वह तथ्यों का संग्रहण, उनका विश्लेपण और विश्लेपण से प्राप्त परिणामों का निर्वचन एक तटस्थ कार्यकर्ता की भाँति बिना किसी अभिनत या पक्षपात के करता है।

सांख्यिकी का महत्व (Importance of Statistics)

सांख्यिकी को, जैसा बताया जा चुका है, राज्य-अंक-गणित कहा जाता था क्योंकि इसके द्वारा राजा राज्य की आर्थिक स्थिति और उसकी जनसंख्या का अनुमान लगाया करते थे। आधुनिक काल में इसका क्षेत्र अधिक व्यापक हो गया है। अब राज्य का उद्देश्य कल्याण (welfare) की वृद्धि करना है जिसका एक मात्र उपाय राज्य-व्यवस्था के उन दोषों को दूर करना है जिनके कारण कल्याण की वृद्धि नहीं हो सकती। निर्धनता, बेकारी, अन्य दशा में प्रतिस्पर्द्धा (competition), व्यक्तियों का स्वास्थ्य आदि ऐसी समस्याएँ हैं जिनके कारणों, जिनकी वितति (extent) और जिनको दूर करने के उपायों के बारे में, प्रत्येक राज्य को सोचना पड़ता है। इनके लिए आंकिक रूप में तथ्यों का ज्ञान आवश्यक है। राज्यों को बार-बार जनता की आर्थिक या सामाजिक दशा जानने के लिए सर्वेक्षण (survey) करने पड़ते हैं और इनसे प्राप्त सामग्री विश्लेपण करके इन कारणों, इनकी वितति और इनको दूर करने के उपायों का अनुमान करना पड़ता है। इसलिए अब सांख्यिकी को राज्य-अंकशास्त्र न कहकर मानव-कल्याण का अंकशास्त्र कहा जाता है।

आजकल, जब राज्य आर्थिक क्षेत्र में हस्तक्षेप करते हैं, समंकों का उपयोग अधिक महत्वपूर्ण हो गया है। वास्तव में किसी भी प्रकार की योजना बिना समंकों की सहायता के सम्भव नहो है। किन क्षेत्रों को अधिक प्रोत्साहन देना है, कहाँ आवश्यकता से अधिक व्यय हो रहा है आदि समस्याओं के उत्तर, बिना समंकों के असम्भव हैं। इसके साथ-साथ

यह जानने के लिए कि किसी विशेष क्षेत्र में किस अंश तक सफलता मिली है, समंकों का उपयोग करना पड़ता है। पूरी योजना अपने प्रारम्भ से लेकर अन्त तक समंकों पर निर्भर करती है और यह बात कल्पनातीत है कि बिना समंकों के कोई योजना चल सके। पूर्ण रूप से योजित अर्थ-व्यवस्था (planned economy) में भी समंकों का उपयोग अनिवार्य है।

पूँजीवादी अर्थव्यवस्था में, जहाँ उत्पादन व्यक्तिगत रूप में होता है, समंकों का उपयोग अति आवश्यक है। प्रत्येक उत्पादक को वस्तु की माँग का अनुमान लगाना पड़ता है। इसके साथ-साथ उसे अन्य प्रतिस्पर्द्धी वस्तुओं के मूल्यों, व्यक्तियों की रुचियों के प्रभाव आदि का भी अनुमान लगाना पड़ता है। अगर वह इन सब पर विचार न करे तो उसकी सफलताप्राप्ति में संदेह किया जा सकता है। कोई भी **व्यापार** (business) इन पर ध्यान रखे बिना सफलतापूर्वक नहीं चल सकता। अतएव व्यापार और वाणिज्य में भी समंकों का महत्व निर्विवाद हो जाता है। यहाँ तक कि व्यापार या वाणिज्य के दृष्टिकोण को विशेष रूप से समझने के लिए व्यापार-सांख्यिकी (business statistics) नाम का सांख्यिकी का एक अलग भाग है। **बीमा-कम्पनियों** के लिए भी सांख्यिकी अपरिहार्य है क्योंकि उनका पूरा कार्य सुतथ्यता (precision) से किये गये आगणनों पर ही निर्भर रहता है।

सामाजिक अध्ययनों में भी सांख्यिकी का उपयोग अनिवार्य है,—जैसे शराब पीना और निर्धनता का सम्बंध आदि सांख्यिकी की सहायता ही से अध्ययन किये जा सकते हैं। यह अध्ययन कानून बनाने के काम में भी आ सकते हैं। **इसी प्रकार अच्छे राज्य-प्रबन्ध के लिये भी समंकों का उपयोग करना पड़ता है।** राज्य का आय-व्यय, शासन की कर नीति आदि सब विषयों को ठीक-ठीक रूप से जानने के लिए समंक आवश्यक हैं। सड़कों की चौड़ाई, पार्किंग के स्थान और दुर्घटनाओं के सम्बन्ध में भी सांख्यिकी के बिना नहीं जाना जा सकता। पूरी राज्य-नीति इस पर आश्रित है।

समंकों के द्वारा अन्य विज्ञानों के नियमों की सच्चाई का पता लगाया जा सकता है। प्रत्येक विज्ञान का नियम कुछ मान्यताओं (assumptions) पर आधारित रहता है, जिनके कारण वह सुबोध और सरल हो जाता है। पर सरलीकरण में इस बात की संभावना रहती है कि कोई महत्वपूर्ण तथ्य छूट जाय, और इस कारण वह वास्तविकता को ठीक से न समझा सके। कोई नियम वास्तविकता को किस अंश तक समझाता है इसकी जाँच करने के लिए समंकों का उपयोग किया जाता है। यह प्रवृत्ति कम से कम अर्थशास्त्र में, आजकल इतनी अधिक हो गई है कि अर्थशास्त्र के लेखकों के अनुसार वे नियम, जिनकी समंकों द्वारा पुष्टि नहीं हो सकती, 'अर्थहीन' (meaningless) हैं। इस दृष्टिकोण को प्रधानता देकर अर्थशास्त्र में एक नया विषय बनाया गया है जिसे 'इकॉनॉमेट्रिक्स'

(Econometrics) कहते हैं। इसमें गणितीय अर्थशास्त्र (mathematical economics) और गणितीय सांख्यिकी (mathematical statistics) का उपयोग किया जाता है।

उपर्युक्त वर्णन से यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि आधुनिक युग में सांख्यिकी कितने महत्वशाली पद पर आसीन है। पद-पद पर सांख्यिकी की (या समंकों की) आवश्यकता प्रतीत होती है। वास्तविकता को सांख्यिकीय रीतियों द्वारा समझने का प्रयत्न बढ़ता ही चला जा रहा है। इस बात की पुष्टि इतनी अधिक संख्या में संग्रहीत सामग्री और उनके द्वारा प्राप्त समंक करते हैं।

सांख्यिकी की परिसीमाएँ (Limitations of Statistics)

जैसा कि परिभाषा से ही स्पष्ट है, सांख्यिकी केवल उन तथ्यों पर ही विचार करती है जो आंकिक रूप से प्रस्तुत किये जा सकते हैं। पर वास्तविकता केवल परिमाणात्मक (quantitative) ही नहीं होती। अतएव ऐसे गुणात्मक तथ्यों के लिए सांख्यिकी का उपयोग नहीं किया जा सकता। वैसे गुणात्मक तथ्यों को परिमाणात्मक रूप दिया जा सकता है, पर उनकी इस प्रकार दी गई परिभाषा स्वेच्छाचारी (arbitrary) होगी और इसलिए वैज्ञानिक नहीं कही जा सकेगी। ऐसे गुणात्मक तथ्यों में श्रमिकों की कुशलता व्यक्तियों की निर्धनता, उनका स्वास्थ्य आदि है।

सांख्यिकी वैयक्तिक विशेषताओं पर विचार नहीं करती। इसका कार्य-क्षेत्र केवल समूहों (groups) या समग्रों (whole) तक सीमित है। सांख्यिकी के नियमों का उपयोग करके जो परिणाम निकाले जाते हैं उनके बारे में यह नहीं कहा जा सकता कि वे किसी पद-विशेष के लिए हैं। वे समूह या समग्र की, उसकी पूर्णता में, केन्द्रीय प्रवृत्ति (central tendency) बताते हैं। जैसे अगर किसी समूह के सदस्यों की औसत ऊँचाई ६६·५ इंच है तो यह आवश्यक नहीं है कि उसके किसी भी सदस्य की लम्बाई ६६.५ इंच ही हो। या यदि यह बताया जाय कि किसी सिक्के को उछालने में हैड (head) या टेल (tail) के आने की सम्भावना $\frac{1}{2}$ है तो यह नहीं बताया जा सकता कि किसी उछाल में हैड आयेगा या टेल। इसका अर्थ केवल यही है कि अगर सिक्का कई बार उछाला जाय तो आधी बार हैड (head) और आधी बार टेल (tail) आने की सम्भावना है। सांख्यिकी की इस परिसीमा को यों भी व्यक्त किया जा सकता है कि सांख्यिकी के नियम माध्य पद या दीर्घकाल के लिए ही सही होते हैं। अन्य स्थितियों में इनका उपयोग नहीं किया जा सकता।

सांख्यिकी 'वास्तविकता' को पूर्णरूप से अध्ययन नहीं करती, इसलिए सांख्यिकीय रीतियों द्वारा प्राप्त परिणामों को पूर्ण-रूप से विश्वसनीय नहीं माना जा सकता। अगर

वस्तु-स्थिति का पूर्ण अध्ययन करना है ताकि उसके अनुसार कोई नीति निश्चित की जा सके, तो अन्य पहलुओं पर भी विचार करना पड़ेगा। जैसे यदि दो श्रेणियों में सह-सम्बन्ध गुणक का मूल्य १ के आस-पास है तो इसका अर्थ निश्चित रूप से यह नहीं होगा कि इनके बीच कोई कारण-प्रभाव सम्बन्ध है। अगर इनके विषय में कोई नीति बनानी है तो अन्य सम्भावनाओं पर भी विचार करना आवश्यक है।

सांख्यिकीय रीतियों द्वारा प्राप्त समंकों का दुरुपयोग बड़ी आसानी से किया जा सकता है। अगर इन रीतियों से प्राप्त परिणाम को बिना संदर्भ के दिया जाय तो गलतफहमी भी हो सकती है। इसी प्रकार अगर एक विशेष उद्देश्य के लिए संग्रहीत समंकों का उपयोग किसी दूसरे उद्देश्य के लिए किया जाय तो परिणाम भ्रामक और अविश्वसनीय होंगे।

सांख्यिकी की अविश्वसनीयता (Distrust of Statistics)

सांख्यिकी में अविश्वास कई प्रचलित वाक्यों में दिया गया है। जैसे डिजराली के अनुसार 'झूठ तीन प्रकार का होता है : झूठ, निरा झूठ और समंक* या गार्दिया के अनुसार 'समंक उन्माद-रोग के चिकित्सकों की भाँति है—वे किसी भी पक्ष का समर्थन करेंगे।'† इसका कारण यह है कि समंकों का या सांख्यिकीय रीतियों का दुरुपयोग बड़ी आसानी से किया जा सकता है और किया गया है। प्रायः समंकों का प्रहस्तन (manipulation) इस प्रकार किया जाता है जिससे विशेष हितों का स्वार्थ सिद्ध हो सके। कई महत्वपूर्ण बातें जिनका समंकों पर पर्याप्त प्रभाव पड़ सकता है, जानबूझ कर छोड़ दी जाती हैं और इस प्रकार कुछ लोगों के इस विश्वास का कि 'अंक झूठे नहीं हो सकते' अनुचित लाभ उठाया जाता है। लोग यह भूल जाते हैं कि अंकों और समंकों में अन्तर है। समंक ऐसे अंक होते हैं जिनका संकलन किसी विशेष उद्देश्य के दृष्टिकोण से होता है और जिनके संकलन में परिशुद्धता प्राप्त करने के लिए यथोचित सांख्यिकीय आवश्यकताओं को पूरा करना पड़ता है। इस अज्ञान के कारण लोग समंकों पर अविश्वास करने लगते हैं। पर यह समंकों का दोष नहीं है। अतएव यह नहीं कहा जा सकता कि 'समंकों से कुछ भी सिद्ध किया जा सकता है।' यह केवल अंकों के लिए सही है जिनको प्रस्तुत करने में सांख्यिकीय रीतियों का उपयोग नहीं किया जाता।

पर झूठे अंक केवल इसीलिए प्राप्त नहीं होते कि कुछ मनुष्य अपना स्वार्थ सिद्ध करना चाहते हैं। इसका कारण यह भी हो सकता है कि प्रस्तुतकर्ता को समंक-संकलन की

*There are three kinds of lies: lies, damn lies and statistics. —*B. Disraeli*

†Statistics are like abenists—they will testify for either side. —*La Guardia.*

सांख्यिकीय रीतियों का ज्ञान न हो और न ही वह यह जानता हो कि समंकों से प्राप्त परिणामों की क्या परिसीमाएँ हो सकती हैं। इस प्रकार अज्ञान के कारण प्राप्त समंक अगर गलत हैं तो यह संकलनकर्ता का दोष है न कि समंकों का। वास्तव में इस प्रकार प्राप्त समंकों द्वारा प्राप्त परिणामों के गलत होने पर लोगों का विश्वास सांख्यिकी पर इसलिए कम हो जाता है कि लोग सांख्यिकीय रीतियाँ नहीं जानते और जो दोष उन्हें संकलनकर्ताओं को देना चाहिए उसे समंकों को देते हैं।

समंकों की अविश्वसनीयता का वास्तविक कारण यह है कि वे उपादान-मात्र (tools) हैं और उपादानों के उपयोग-विशेष का दोष उनकी सहायता लेने वाले का है। सांख्यिकी में समंकों का संकलन करने से लेकर उनसे परिणाम निकालने तक में व्यक्तिगत मतों (opinions), अभिनति और पक्षपात के आने की गुंजाइश रहती है। यदि कोई व्यक्ति निष्पक्ष होकर वैज्ञानिक निरपेक्षता के साथ समंकों का संकलन करे तो उसमें झूठे परिणामों के निकलने की सम्भावना बहुत कम हो जाएगी। अतएव समंकों में जो अविश्वास लोगों का है उसका कारण वे स्वतः नहीं हैं, वल्कि उनके संकलनकर्ता और उनसे परिणाम निकालने वाले व्यक्ति हैं।

प्रश्न

(१) सांख्यिकी के महत्व का वर्णन कीजिए।

(२) अपने हित के लिए सांख्यिकीय रीतियों का दुरुपयोग किस प्रकार किया जाता है? इस प्रकार के सांख्यिकी के दुरुपयोग के कम से कम दो उदाहरण दीजिए।

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९३९)

(३) 'सांख्यिकी का ज्ञान किसी विदेशी भाषा या बीजगणित की जानकारी के समान है, यह किसी भी परिस्थिति में किसी समय उपयोगी सिद्ध हो सकती है।' समझाइए। (बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४६)

(४) आप सांख्यिकीय विज्ञान से स्पष्टतया क्या समझते हैं? इसके क्षेत्र और इसकी परिसीमाओं पर विचार कीजिए। (बी० कॉम, इलाहाबाद, १९४४)

(५) सांख्यिक के क्या कार्य हैं? किन दशाओं में वह एक सफल सांख्यिक कहा जायगा।

(६) सांख्यिकी के विभिन्न भागों को वर्गीकृत कीजिए और प्रत्येक का वर्णन संक्षेप में कीजिए।

(७) समंकों में अविश्वास का क्या कारण है? यह कहाँ तक युक्तियुक्त है?

(८) वाणिज्य के सहायक रूप में सांख्यिकी का महत्व सविस्तार समझाइये।

(बी० कॉम० इलाहाबाद १९५१)

(९) "सांख्यिकीय रीतियां किसी अनाड़ी के हाथ में एक भयंकर उपादान के समान हैं। सांख्यिकी एक ऐसा विज्ञान है जिसके प्रयोगी को एक कलाकार के समान आत्मसंयम रखना चाहिए।"

उपरोक्त कथन का अर्थ स्पष्ट कीजिये। (एम० ए० पटना, १९४८)

(१०) "सांख्यिकी का प्रयोग एक अन्धे के समान न करना चाहिये जो कि विजली के खम्बे से प्रकाश के स्थान पर सहारा लेने का काम करता है।"

उपरोक्त कथन की विवेचना कीजिये। (एम० ए० आगरा, १९४६)

(११) "सांख्यिकी, मिट्टी के समान है जिससे आप देवता या दानव जो चाहें बना सकते हैं।" विवेचना कीजिये। (बी० कॉम० इलाहाबाद, १९५५)

(१२) सांख्यिक के क्या मुख्य कर्त्तव्य हैं ? यह किन परिस्थितियों में अपने कार्य में सफल हो सकता है ? (एम० कॉम० राजपूताना, १९५१)

अध्याय ३

सांख्यिकीय अनुसंधान का आयोजन

(Planning a Statistical Enquiry)

किसी भी विषय में सांख्यिकीय रीतियों का उपयोग करके परिणाम निकालने के लिए यह आवश्यक है कि उचित और पर्याप्त समंक हों क्योंकि समंकों के बिना सांख्यिकीय नियमों का प्रयोग नहीं किया जा सकता। वस्तुतः समंक सांख्यिकी के मूलाधार (fundamentals) हैं। अतएव किसी भी अनुसंधान से पहले इनके संकलन (compilation) पर विचार किया जाता है। पर सामग्री-संकलन के पूर्व कुछ बातों पर विचार करना अनिवार्य होता है। जिस समस्या के लिए अनुसंधान किया जा रहा है उसके प्रत्येक पक्ष पर ये बातें विचारणीय हैं। सर्वप्रथम इस पर विचार करना पड़ता है कि अनुसंधान का उद्देश्य क्या है, इस उद्देश्य की प्राप्ति के लिए क्या सूचना चाहिए और यह सूचना किस प्रकार की हो। इसका अध्ययन निम्नलिखित शीर्षकों के अन्तर्गत किया जाता है:—

(१) अनुसंधान का उद्देश्य और उसका क्षेत्र निश्चित करना।

(२) अनुसंधान का आयोजन।

(३) सांख्यिकीय इकाइयों को निश्चित करना।

(४) परिशुद्धता-परिणाम (degree of accuracy) पर विचार करना।

इन पर आगामी पृष्ठों में एक-एक करके विचार किया जायगा।

अनुसंधान का उद्देश्य और क्षेत्र (Object & Scope of the Inquiry)

अनुसंधान का उद्देश्य निर्धारित करना सबसे महत्वपूर्ण पद है। इनमें दी हुई समस्या को, जिसके लिए अनुसंधान किया जा रहा है, स्पष्ट और संक्षिप्त रूप में व्यक्त किया जाता है। समस्या की परिभाषा (स्पष्ट और संक्षिप्त कथन) निश्चित हो जाने से सामग्री-संग्रहण (collection of data) और उसका विन्यसन सरलतापूर्वक, बिना अधिक समय लगाये, किया जा सकता है। परिभाषा जान लेने पर यह निश्चित करना बहुत आसान हो जाता है कि किस सामग्री को संग्रहीत करना है और कौन सामग्री अनावश्यकीय है, इसलिए छोड़ी जा सकती है। यह निश्चित हो जाने से अनुसंधान में अधिक परिशुद्धता (accuracy) आ जाती है।

इसके साथ-साथ अनुसंधान का क्षेत्र जानना भी आवश्यक है। अनुसंधान आरम्भ करने से पूर्व यह निश्चित कर लेना चाहिये कि दी हुई समस्या के हल के लिए कहाँ तक समंकों का उपयोग किया जाता है। जो भी सामग्री संग्रहीत की जाती है उसका पूर्ण होना आवश्यक है। पर अगर पूर्णता पर ही विचार किया जाय तो यह इतनी विस्तृत हो जायगी कि विषय के बारे में भ्रांति हो जाय और संग्रहीत सामग्री, समस्या का हल निकालने के लिए अनुपयुक्त हो जाय। अनुसंधान का क्षेत्र निश्चित करते समय सामग्री-पर्याप्तता, सामग्री-उपयोगिता और समय, एवं व्यय पर विचार करना पड़ता है।

अनुसंधान का आयोजन (Planning of the Investigation)

समस्या का उद्देश्य और क्षेत्र निश्चित करने के बाद अनुसंधान का आयोजन किया जाता है अर्थात् यह निश्चित किया जाता है कि सामग्री-संग्रहण किस प्रकार किया जायगा।

आयोजक सर्व प्रथम यह निश्चित करता है कि दी हुई समस्या के लिए तत्सम्बन्धी समग्र (universe) के प्रत्येक सदस्य के बारे में अलग-अलग जानकारी प्राप्त करनी है या इस समग्र के प्रतिनिधियों को समूह के रूप में चुन कर इन समूहों के प्रत्येक सदस्य के बारे में जानकर, निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। यदि वह यह समझता है कि प्रत्येक सदस्य के बारे में अलग-अलग जानना आवश्यक है तो कहा जाता है कि अनुसंधान **संगणना-अनुसंधान** (census-enquiry) के अनुसार किया गया है। इसका उपयोग बहुत कम होता है, पर जन-गणना इस प्रकार के अनुसंधान का उदाहरण है। इसके विपरीत कुछ समूहों को प्रतिनिधि मान कर अनुसंधान करने की रीति को **निदर्शन-अनुसंधान** (sample-enquiry) कहते हैं। इस रीति में प्रगणना (enumeration) सरलतापूर्वक और सुविधाजनक होती है। अतएव प्रायः इसी रीति को अपनाया जाता है। पर इसमें अभिनति (bias) का भय रहता है जिसे कम से कम करना अनिवार्य है।

इसके पश्चात् यह निश्चित किया जाता है कि मौलिक सामग्री (original data) का संग्रहण करना है या अब तक प्रकाशित या उपलब्ध सामग्री से ही काम चल जायगा। मौलिक सामग्री के संग्रहण की आवश्यकता उन दशाओं में पड़ती है जब समस्या पर इससे पहले विचार न किया गया हो या जब प्रकाशित या उपलब्ध सामग्री पुरानी हो गई हो जिसके कारण उसका उपयोग वर्तमान परिस्थितियों में न किया जा सकता हो। इस स्थिति में अनुसंधान का क्षेत्र और सांख्यिकीय इकाइयों का उपयोग समस्या के अनुसार किया जा सकता है। पर उपलब्ध सामग्री का उपयोग करने में यह लाभ नहीं रहता। यदि अनुसंधान में मौलिक सामग्री का संग्रहण किया गया है तो वह **प्रार्थमिक-अनुसंधान**

(primary enquiry) कहलाता है, पर अगर उपलब्ध सामग्री का उपयोग किया जाय वह **द्वितीयक-अनुसंधान** (secondary enquiry) कहलाता है।

अगर किसी अनुसंधान में परिशुद्धता (accuracy) को अधिक महत्व देना हो तो **प्रत्यक्ष-अनुसंधान** (direct investigation) किया जाता है। प्रत्यक्ष-अनुसंधान वस्तु-स्थिति का अध्ययन निरीक्षण करके किया जाता है और इस प्रकार समस्या-सम्बन्धी जानकारी प्रत्यक्ष रूप से उससे सम्बंधित रहती है। पर इस रीति का उपयोग केवल उन्हीं अनुसंधानों तक सीमित है जहाँ गहन (intensive) अध्ययन करना हो और जहाँ विषय-वस्तु को ठीक रूप से सांख्यिकी द्वारा जाना जा सके। अगर किसी समस्या का विस्तृत (extensive) अध्ययन करना हो तो यह प्रायः सम्भव नहीं हो सकता कि सामग्री-संग्रहण प्रत्यक्ष-अनुसंधान की रीति से किया जाय और न ही इसका उपयोग ऐसी सामग्री-संग्रहण में किया जा सकता है जहाँ विषय-वस्तु की पूरी जानकारी सांख्यिकीय रीतियों द्वारा नहीं की जा सकती। ऐसी दशाओं में श्रुति (hearsay) या विषय-वस्तु पर अप्रत्यक्ष रूप से प्रभाव डालने वाले और आंकिक रूप से मापनीय तथ्यों की सहायता से सामग्री-संग्रहण किया जाता है, क्योंकि इसमें अध्ययन वस्तु-स्थिति का निरीक्षण करके नहीं होता बल्कि ऐसे लोगों की सहायता से होता है जो उससे घनिष्ठ रूप से परिचित माने जा सकते हैं या ऐसे तथ्यों की सहायता से होता है जो उससे अप्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित है, इसलिए इस प्रकार के अनुसंधान को **अप्रत्यक्ष अनुसंधान** (indirect investigation) कहा जाता है। यह सम्भव है कि एक ही सर्वेक्षण (survey) का कुछ भाग प्रत्यक्ष अनुसंधान की रीति से किया जाय और शेष भाग अप्रत्यक्ष अनुसंधान की रीति से।

इसको निश्चित कर लेने पर यह तय करना पड़ता है कि प्रश्नावली को सीधे समग्र के सदस्यों के पास भेजकर उनके उत्तर प्राप्त किये जायें या अन्वेषकों (investigators) की सहायता ली जाय। पहली स्थिति में समग्र के सदस्य स्वयं इच्छित उत्तर दे देते हैं। पर इसके लिए यह आवश्यक है कि सदस्य पढ़े-लिखे हों और प्रश्न सुबोध, सरल और सीधे हों जिससे उनका उत्तर स्पष्ट रूप से दिया जा सके। इस प्रकार के अनुसंधान का उपयोग केवल शिक्षित और उत्तरदायी सदस्यों तक सीमित है। पर अगर कुशल अन्वेषकों द्वारा अनुसंधान किया जा रहा हो तो अनुसंधान का क्षेत्र अधिक विस्तृत हो जाता है क्योंकि वे किसी भी सदस्य को प्रश्न का अर्थ स्पष्ट रूप से समझाने में समर्थ होंगे और इसलिए आवश्यक सूचना प्राप्त करने में सफल होंगे।

एक अन्य बात जिस पर विचार करना पड़ता है, निम्नलिखित है : अगर अनुसंधान प्रारम्भिक (initial) है तो इसके लिए पूरा आयोजन करना पड़ेगा और इसके प्रत्येक पहलू पर पूर्ण रूप से विचार करना पड़ेगा। पर यदि प्रस्तुत अनुसंधान किसी पहले

किये जा चुके अनुसंधान की पुनरावृत्ति है तो पहले के अनुसंधानों में कुछ संशोधन और परिवर्द्धन, जिनकी आवश्यकता परिस्थितियों के वदलने के कारण पड़ सकती है, करने ही से काम चल जायगा।

सांख्यिकीय इकाइयाँ (Statistical Units)

समंकों का संग्रहण विना नाप या गणना के नहीं हो सकता। अगर ये नापें या गणन विना किसी इकाई के दिये जायँ तो इनका कोई अर्थ नहीं होता। जैसे एक अंक ६५ अर्थहीन है क्योंकि इससे यह नहीं जाना जा सकता कि यह किस वस्तु को व्यक्त करता है। अतएव सामग्री-संग्रहण प्रारम्भ करने से पहले इकाइयों को, जिनके द्वारा समंक व्यक्त किये जायँगे, निश्चित करना नितान्त आवश्यक है। यदि ऐसा न किया जाय तो भ्रमात्मक निष्कर्ष निकालने की संभावना रहती है। फिर, यह जानना इसलिए भी आवश्यक है कि हम किस वस्तु को नाप रहे हैं या किसकी गणना कर रहे हैं। अनुसंधान के वीच में इकाइयाँ ठीक रूप से निश्चित न होने के कारण गड़वड़ी हो सकती है। अतएव अनुसंधान प्रारम्भ करने के पूर्व इकाइयों को स्पष्ट रूप से निश्चित कर लेना चाहिए और अनुसंधान में उनका उपयोग एक ही प्रकार से करना चाहिए ताकि वाद में किसी प्रकार का भ्रम न रहे और सामग्री से प्राप्त निष्कर्ष निर्भरतायोग्य हों। इकाइयों का वोधगम्य होना भी आवश्यक है।

इकाइयों को निश्चित करने का कार्य कठिन होता है, इसका मुख्य कारण यह है कि साधारणतः वोल-चाल में प्रयुक्त होने वाले शब्दों के अर्थ निश्चित नहीं होते। केवल एक शब्द का प्रयोग कई विभिन्न अर्थों के लिए किया जाता है। अगर इन शब्दों को सांख्यिकी में सव प्रचलित अर्थों के साथ लिया जाय तो तत्संवंधी किसी भी कथन में संदिग्धता रहेगी। जिस प्रकार अन्य विज्ञानों में किया जाता है उसी प्रकार सांख्यिकी में इन शब्दों का उपयोग केवल विशिष्ट रूप में किया जाता है ताकि संदिग्धता के लिए कोई गुंजाइश न रहे। इसलिए उन्हें परिमाणित करना पड़ता है।

सांख्यिकीय इकाई के लिए निम्नलिखित वातें आवश्यक हैं:—

यह विशिष्ट और भ्रम-रहित होनी चाहिए (It should be specific and unmistakable)—इसलिए प्रत्येक शब्द की, जिसका सांख्यिकी में उपयोग होता है, स्पष्ट परिभाषा देनी चाहिए। विशेषतः तव, जव उसके अर्थ साधारण वोल-चाल में कई होते हैं, इकाइयों की परिभाषाएँ असंदिग्ध, सुवोध और पूर्ण होनी चाहिए।

यह सजातीय होनी चाहिए (It should be homogeneous)—यह सारूप्यता (uniformity) अपरिहार्य है। ऐसा नहीं कि एक ही इकाई का उपयोग विभिन्न स्थलों या समयों में विभिन्न रूप से किया जाय। यदि इकाइयों

के उपयोग में साम्यता नहीं होगी तो सामग्री द्वारा विभिन्न परिस्थितियों के बीच तुलना नहीं की जा सकती और ऐसी सामग्री द्वारा प्राप्त परिणाम भ्रान्तिमूलक हो सकते हैं। चुनी हुई इकाइयों का प्रयोग सब परिस्थितियों में न किये जा सकने की कठिनाई दो प्रकार से दूर की जा सकती है। या तो सामग्री को समूहों या वर्गों के रूप में अन्तर्विभक्त (subdivide) करके या विभिन्न इकाइयों को चुनी हुई इकाई के रूप में व्यक्त करके।

यह स्थायी (stable) **और प्रमापित** (standardized) **होनी चाहिए**—यदि इकाइयों का मूल्य बदलता हुआ है तो किसी निश्चित समय के मूल्य को स्थायी और प्रमापित इकाई मान लिया जाता है और अन्य समय के मूल्यों को इसके रूप में व्यक्त करके स्थायित्व लाया जा सकता है।

यह अनुसंधान के लिए उपयुक्त (appropriate) **और सही रूप से निर्धारण-योग्य** (ascertainable) **होनी चाहिए**—अनुसंधानों के लिए अलग-अलग इकाइयों का विभिन्न उपयोग उनकी उपयुक्तता की दृष्टि से किया जाता है। इसके साथ-साथ अगर इसका निर्धारण सही-सही नहीं किया जा सकता तो परिणाम में गलती रहने की आशंका रहती है।

इकाइयों को साधारणतया दो भागों में बांटा जा सकता है:—(१) सरल सांख्यिकीय इकाई (simple statistical unit) और (२) संग्रहीत सांख्यिकीय इकाई (composite statistical unit)।

सरल सांख्यिकीय इकाई—इन इकाइयों को परिभाषित करना अपेक्षाकृत सरल होता है क्योंकि ये वस्तुओं के एक गुण की परिमाणात्मक मापें हैं। जैसे सेर या मन, गज, घन्टे, रुपया, एक कमरा आदि। इनका उपयोग करने में भी कभी-कभी सावधानी बरतनी पड़ती है क्योंकि इनका मूल्य विभिन्न स्थानों में अलग-अलग हो सकता है। भारत के विभिन्न भागों में सेर का मान अलग-अलग है।

संग्रहीत सांख्यिकीय इकाई—ये इकाइयाँ या तो सरल सांख्यिकीय इकाइयों में कोई विशेषण जोड़कर बनती हैं या दो से अधिक सरल सांख्यिकीय इकाइयों को मिलाकर। जैसे गति की इकाई मील-प्रति-घन्टा है, या भार-वाहन की इकाई मन-प्रति मील आदि हैं।

परिशुद्धता-परिमाण (Degree of Accuracy)

किसी भी अनुसंधान में पूर्ण परिशुद्धता प्राप्त करना अत्यन्त कठिन है। इसका कारण यह है कि निरीक्षक और उसके द्वारा उपयुक्त उपादान (instruments) अपरिशुद्धता को जन्म दे सकते हैं और साधारणतः देते हैं। अतएव अनुसंधान शुरु करने से पहले ही इस बात पर विचार कर लेना चाहिए कि किस अंश तक परिशुद्धता की आव-

श्यकता है। इसको ध्यान में रखते हुए विभ्रम के कारणों (sources of error) के प्रभाव को न्यूनतम रखने के उपाय निकाल लेने चाहिए।

परिशुद्धता का परिमाण मुख्यतः अनुसंधान की प्रकृति पर निर्भर रहता है। अगर अनुसंधान से प्राप्त सामग्री में थोड़ा-सा विभ्रम होने पर समस्या के हल में काफ़ी प्रभाव पड़ सकता है तो परिशुद्धता पर विशेष ध्यान रखना पड़ता है, जैसे, वैज्ञानिक प्रयोगों में। अन्यथा कम परिशुद्धता से भी काम चल जाता है।

प्रश्न

(१) अनुसंधान आरम्भ करने से पूर्व किन-किन बातों का ध्यान रखना चाहिए ? सविस्तार समझाइए।

(२) अनुसंधान के उद्देश्य से आप क्या समझते हैं ? किसी अनुसंधान को आरम्भ करने से पूर्व उसका उद्देश्य निश्चित करना क्यों आवश्यक है ?

(३) संगणना-अनुसंधान तथा निदर्शन अनुसंधान में क्या अन्तर है और यह किन-किन परिस्थितियों में उपयोग में लाये जाते हैं ?

(४) सांख्यिकीय इकाइयाँ क्या हैं ? इनका निर्धारण करने में क्या-क्या कठिनाइयाँ होती हैं ?

(५) सांख्यिकीय इकाइयों के आवश्यक गुणों की विवेचना कीजिए।

(६) निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखियेः—

(अ) सरल सांख्यिकीय इकाई (ब) संग्रहीत सांख्यिकीय इकाई (स) परिशुद्धता परिमाण (द) निदर्शन अनुसंधान।

(७) एक बड़े शहर की नगरपालिका प्राइमरी शिक्षा अनिवार्य करना चाहती है। वह किस प्रकार सब आवश्यक सामग्री सुचारु रूप से एकत्रित कर सकती है ?

(बी० कॉम० आगरा)

(८) यदि आप को किसी गाँव का आर्थिक अनुसंधान करना है तो आप किस प्रकार उसकी व्यवस्था करेंगे तथा किन-किन बातों पर विशेष ध्यान देंगे ?

अध्याय ४

सामग्री संकलन

(Collection of Data)

अनुसन्धान के आयोजन के पश्चात् सामग्री-संग्रहण प्रारम्भ किया जाता है। सामग्री-संग्रहण में किस रीति का उपयोग किया जायगा यह इस बात पर निर्भर रहता है कि प्राथमिक सामग्री (primary data) का संग्रहण करना है या द्वितीयक सामग्री (secondary data) का। जैसा बताया जा चुका है, प्राथमिक सामग्री में मौलिक सामग्री (original data) का संग्रहण होता है और द्वितीयक सामग्री में अन्य अन्वेषकों (investigators) द्वारा संग्रहीत सामग्री का उपयोग होता है। अतएव इनकी संग्रहण-विधियों का अध्ययन अलग-अलग किया जाता है।

सामग्री संग्रहण की रीति के चुनाव में और भी कई बातों पर ध्यान देना आवश्यक होता है। इनमें से सबसे महत्वपूर्ण बात है अनुसन्धान का स्वभाव, उद्देश्य तथा सीमा। इन बातों को ध्यान में रखकर ही सामग्री एकत्रित करने की रीति का चुनाव करना चाहिये। यदि सामग्री संग्रहण की रीति के चुनाव में अनुसंधान के उद्देश्य तथा उसकी सीमा का ध्यान न रखा जाय तो उपयुक्त रीति का चुनाव लगभग असम्भव ही है। दूसरी बात जो ध्यान रखने योग्य है, वह है अनुसन्धानकर्त्ता के पास रुपये तथा समय की मात्रा। यदि अनुसन्धानकर्त्ता के पास रुपयों की कमी है तो उसे सामग्री संग्रहण की ऐसी रीति चुननी पड़ेगी जो सस्ती हो और इसी प्रकार यदि उसके पास समय की कमी है तो वह ऐसी रीति को अपनायेगा जिसमें अधिक समय न लगे। इस तरह यह स्पष्ट है कि अनुसन्धानकर्त्ता के पास रुपये तथा समय की मात्रा का भी सामग्री संग्रहण रीति के चुनाव से विशेष सम्बन्ध है।

प्राथमिक सामग्री-संग्रहण (Collection of Primary Data)

प्राथमिक सामग्री का संग्रहण निम्नलिखित रीतियों से किया जा सकता है:—

(१) प्रत्यक्ष स्वयं-अनुसंधान (Direct Personal Investigation)
(२) अप्रत्यक्ष-मौखिक-अनुसंधान (Indirect Oral Investigation)
(३) अनुसूची-प्रश्नावली द्वारा (By Schedule Questionnaires)
(४) स्थानीय प्रतिवेदनों द्वारा (By Local Reports)

इन पर अब अलग-अलग विचार किया जाएगा।

(१) **प्रत्यक्ष स्वयं-अनुसंधान** (Direct Personal Investigation)—इस पद्धति में वस्तु-स्थिति का अध्ययन अन्वेषक स्वयं क्षेत्र में जाकर करता है। वह वस्तु-स्थिति का अंग बनकर उसका निरीक्षण करता है। इसके लिए यह आवश्यक है कि वह परिस्थितियों के अनुकूल बन जाय। इस पद्धति से प्राप्त सामग्री अधिक विश्वसनीय और प्रामाणिक होती है, बशर्ते अन्वेषक की अभिनति या पक्षपात से वह प्रभावित न हुई हो। अधिक समय, परिश्रम और धन के व्यय होने के कारण इस पद्धति का उपयोग केवल उन्हीं स्थलों तक सीमित है जहाँ स्थानीय या गहन अनुसंधान (intensive investigation) की आवश्यकता हो। अगर विस्तृत अनुसंधान (extensive investigation) करना हो तो इसका उपयोग नहीं किया जा सकता।

यदि कारणवशात् स्वयं-अनुसंधान सम्भव न हो तो यथार्थ परिस्थितियों से सम्बन्धित व्यक्तियों से प्रश्न पूछकर और उनसे जिरह (cross-examination) करके सामग्री संग्रहीत की जा सकती है। पर इसमें पर्याप्त सावधानी बरतनी पड़ती है क्योंकि सही सूचना प्राप्त करना सूचकों (informers) पर निर्भर रहता है। अन्वेषक को ऐसा होना चाहिये कि वह उनको अनुसंधान का उद्देश्य आदि उचित रीति से समझा सके जिससे वे कोई तथ्य छिपायें नहीं। यह उन स्थलों में विशेष रूप से उपयोगी है जहाँ अनुसंधान किसी जटिल समस्या के लिए किया गया हो या जहाँ प्रश्नों का अर्थ समझाना आवश्यक हो। वैसे प्रयत्न इस बात का करना चाहिए कि प्रश्न सरल और सुबोध हों ताकि सूचकों की समझ में आसानी से आ जाय जिससे वे उत्तर बिना कठिनाई के दे सकें।

(२) **अप्रत्यक्ष मौखिक-अनुसंधान** (Indirect Oral Investigation)—उन परिस्थितियों में जहाँ उपर्युक्त पद्धति का उपयोग नहीं किया जा सकता, यथार्थ परिस्थिति से अप्रत्यक्ष रूप में सम्बन्धित व्यक्तियों की सहायता से सूचना प्राप्त की जा सकती है। क्षेत्र की विस्तृतता या सूचकों की उदासीनता के कारण ऐसा हो सकता है। इस पद्धति को अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान कहते हैं। इस रीति से सामग्री का संग्रहण करने में कुछ सावधानी रखनी पड़ती है। पहली यह कि क्या सूचक को वास्तविक तथ्यों का ज्ञान है और यह ज्ञान प्रामाणिक माना जा सकता है। इसके साथ-साथ इस सम्भावना पर भी विचार करना चाहिए कि कुछ विशेष हितों के कारण वह अभिनतिपूर्ण या पक्षपाती सूचना तो नहीं दे रहा है। सूचक की मानसिक स्थिति और उसके स्वभाव का भी ध्यान रखना चाहिये। उन स्थितियों में जहाँ सूचक अशिक्षित या अल्प-शिक्षित है, इस बात का निश्चय कर लेना चाहिए कि वह अपने को ठीक-ठीक व्यक्त कर रहा है या नहीं।

इस पद्धति का उपयोग राज्य द्वारा नियुक्त अनुसंधान-समितियों (inquiry committees) द्वारा विशेष रूप से किया जाता है।

(३) अनुसूची-प्रश्नावली द्वारा (By Schedule Questionnaire)—प्रत्यक्ष स्वयं-अनुसंधान का उपयोग, जैसा बताया जा चुका है, उन स्थानों में होता है जहाँ विशेष परिशुद्धता की आवश्यकता होती है या जहाँ अनिच्छुक या उदासीन या अशिक्षित व्यक्तियों से सूचना प्राप्त करनी पड़ती है। पर इसके दोष स्पष्ट हैं। इसका उपयोग विस्तृत अनुसंधानों में नहीं किया जा सकता। साथ ही साथ ये अन्वेषक की अभिनतियों से प्रभावित हो सकते हैं। इसलिए अनुसूची-प्रश्नावली की रीति का उपयोग किया जाता है। इस रीति का प्रयोग दो प्रकार से होता है:—

(क) प्रश्नावली को सूचकों के पास भेज दिया जाता है और वे आवश्यक सूचना देकर उसे अन्वेषकों को लौटा देते हैं।

इस रीति का लाभ यह है कि बहुत कम व्यय में और कम समय में विस्तृत क्षेत्र से पर्याप्त सूचना मिल सकती है। अगर अनुसंधान ठीक तरह से निर्देशित हो तो पर्याप्त परिशुद्धता भी प्राप्त हो सकती है। जो भी प्रश्न पूछे जायँ वे छोटे, सरल, बोधगम्य, कम संख्या में और संदिग्धतारहित हों। इसके साथ-साथ प्रश्नावली में ऐसे प्रश्न नहीं होने चाहिये जिनके उत्तर, सूचक गुप्त रखना चाहें। सांख्यिकीय इकाइयों को ठीक-ठीक परिभाषित करना चाहिये जिससे सामग्री-सा रूप्यता बनी रहे। सूचकों को यह भी बता देना चाहिये कि अनुसंधान का उद्देश्य क्या है और उनका सहयोग कितना महत्वपूर्ण है। इस बात का पूरा प्रयत्न करना चाहिये कि सूचक, अनुसंधान के लाभ को समझें। इन बातों को प्रत्येक प्रश्नावली के साथ एक पत्र भेज कर समझाया जा सकता है।

पर इस रीति में कुछ दोष भी हैं। अगर सूचक अशिक्षित हुए तो इसका उपयोग नहीं किया जा सकता। साधारणतः औसत सूचक, अनुसंधानों के प्रति उदासीन रहता है। अगर उसकी सहायता उचित रूप से न मिली तो विभ्रम (error) की सम्भावना रहती है। कई बार प्रश्नों के उत्तर अधूरे और संदिग्ध रहते हैं। वास्तव में इस रीति की सफलता, पूर्ण रूप से सूचकों की सहायता और उनकी दिलचस्पी पर निर्भर रहती है।

(ख) दूसरी रीति यह है कि प्रश्नावली प्रगणक (enumerator) द्वारा पहुँचाई और संग्रहीत की जाती है। ये प्रगणक सूचकों को उत्तर देने में सहायता देते हैं।

इस रीति में प्रगणक स्वयं प्रश्नावली लेकर सूचकों के पास जाते हैं और उनसे प्राप्त उत्तरों को स्वयं लिखते हैं। वे सूचकों को अनुसंधान का उद्देश्य और सही सूचना देने का महत्व समझाते हैं ताकि सूचक प्रश्नों का उत्तर सही दे सकें। अगर प्रश्न के समझने में कोई कठिनाई हो तो वे उस प्रश्न को सविस्तार समझा सकते हैं। विस्तृत अनुसंधानों में यह विशेष रूप से उपयोगी है क्योंकि इस रीति द्वारा पर्याप्त परिशुद्धता के साथ उचित सामग्री प्राप्त की जा सकती है। सामाजिक या आर्थिक स्थिति सम्बन्धी विस्तृत अनुसंधानों में इसी रीति का उपयोग किया जाता है।

पर इस रीति से किये गये अनुसंधान में प्रामाणिकता और परिशुद्धता प्राप्त करने में प्रगणकों का मुख्य हाथ रहता है। इसलिए इनके चुनाव में विशेष सावधानी वरतनी पड़ती है और उन्हें उचित शिक्षा भी देनी पड़ती है। प्रगणकों को उद्यमी, बुद्धिमान और स्थिर स्वभाव का होना चाहिये जिससे वह उत्तरों की प्रामाणिकता और विश्वसनीयता जान सकें और काल्पनिक या झूठे उत्तरों को पहचान सकें। वे ऐसे हों कि अनुसंधान निरपेक्ष होकर कर सकें जिससे अभिनति या पक्षपात की गुञ्जाइश न रहे। इनके साथ-साथ उन्हें अच्छे स्वभाव का भी होना चाहिये जिससे वे सूचकों को अनुसंधान के विपक्ष में न करें वल्कि उन्हें फुसलाकर और मना कर अपना कार्य सिद्ध कर लें। उनमें इस वात की सामर्थ्य होनी चाहिये कि वे थोड़ी ही देर में सूचकों और अपने वीच अपनत्व स्थापित कर लें। इसके लिए यह आवश्यक है कि वे स्थानीय रीति-रिवाजों, व्यवहारों और भाषा को जानें।

प्रगणकों को चुन लेने के वाद उनको उचित रूप से शिक्षित करना चाहिये। उन्हें अनुसंधान के उद्देश्य और उसके क्षेत्र के वारे में अच्छी तरह वता देना चाहिये; क्योंकि कई सूचक जिज्ञासु होते हैं जिन्हें सव कुछ वताना पड़ता है। उन्हें प्रत्येक प्रश्न के अर्थ, क्षेत्र और महत्व को जानना चाहिये जिससे वे प्रत्येक सूचक को उसके उत्तर की महत्ता समझा सकें। उन्हें जिरह करना सिखाया जाना चाहिए जिससे वे गलत और टालने के लिये दिये गये उत्तरों को पहचान सकें ताकि सामग्री-परिशुद्धता वनी रहे। सिद्धान्त में ये वातें समझाने के वाद भी उन्हें एक दम अकेले क्षेत्र में नहीं भेजना चाहिये। कुछ दिनों तक पुराने प्रगणकों के साथ रह कर जव वे इन सव वातों को व्यवहार में किया जाता देख लें तो वे स्वतंत्र रूप से क्षेत्र में भेजे जा सकते हैं।

(४) **स्थानीय प्रतिवेदनों द्वारा** (By local reports)—इसमें स्थानीय व्यक्तियों या कुछ चुने हुए संवाददाताओं (correspondents) द्वारा वस्तु-स्थिति के वारे में अनुमान लगा लेते हैं और उन्हें अन्वेषक के पास भेज देते हैं। इस रीति से प्राप्त सामग्री अभिनत (biassed), एक-पक्षीय या अधूरी हो सकती है अतएव उसकी प्रामाणिकता संदिग्ध रहती है। पर उन स्थलों में जहाँ लगभग सही परिणामों से काम चल सकता है, इसका उपयोग किया जाता है। यह अल्पव्ययी है और इससे परिणाम शीघ्रतापूर्वक प्राप्त किये जा सकते हैं।

प्राथमिक सामग्री संग्रहण में दूसरी समस्या प्रतिनिधि सामग्री (representative data) का चुनाव करने की होती है। इसका वर्णन आगामी अनुच्छेदों में किया गया है।

प्रतिनिधि-सामग्री (Representative Data)

जैसा वताया जा चुका है, अनुसंधान का आयोजन या तो संगणना अनुसंधान (census

investigation) द्वारा किया जा सकता है या निदर्शन-अनुसंधान (sample investigation) द्वारा । संगणना अनुसंधान में समग्र के प्रत्येक सदस्य के बारे में सूचना प्राप्त की जाती है; पर निदर्शन-अनुसंधान में कुछ समूहों को समग्र का प्रतिनिधि मान लिया जाता है और उनसे प्राप्त सामग्री को पूरे समग्र के लिए प्रतिनिधि माना जाता है । अगर अनुसंधान का क्षेत्र विस्तृत है तो संगणना की रीति बहुत कठिन, यहाँ तक कि अव्यावहारिक हो सकती है । निदर्शन-अनुसंधान में समय, धन और परिश्रम की बचत तो होती ही है और इसके साथ-साथ पर्याप्त रूप से परिशुद्ध सामग्री भी प्राप्त की जा सकती है । कुछ कुशल और इच्छुक प्रगणकों के द्वारा संग्रहीत सामग्री भले ही राशि में कम हो और पूरे समग्र से न ली गई हो, पर वह कई अनिच्छुक और छिपाने वाले व्यक्तियों द्वारा दी गई सूचना की अपेक्षा अधिक प्रामाणिक होगी ।

प्रतिनिधि सामग्री का संग्रहण करने के लिये पहले निदर्शन (sample) का चुनाव करना पड़ता है । इसको दो प्रकार से चुना जा सकता है:—

(१) सविचार-निदर्शन (Deliberate Sampling)

(२) दैव-निदर्शन (Random or Chance Sampling)

सविचार निदर्शन (Deliberate Sampling)

इस रीति में अनुसंधान का आयोजक समग्र में से कुछ समूहों को सविचार चुन लेता है । यह चुनाव वह गुणों के आधार पर करता है । वह यह निश्चित कर लेता है कि किसी निश्चित गुण का एक निश्चित परिमाण पूरे समग्र के लिए प्रतिनिधि माना जा सकता है और इस परिणाम वाले समूहों को वह निदर्शन (sample) मान लेता है । इस निदर्शन का अनुसंधान में गहन अध्ययन किया जाता है । यदि बहुत छोटा निदर्शन लेना हो तो इसका उपयोग किया जा सकता है ।

पर इस रीति में कई दोष हैं । पहला यह कि इसमें व्यक्तिगत अभिनति या पक्षपात की बहुत गुंजाइश रहती है । इसलिए इसका दुरुपयोग बड़ी आसानी से किया जा सकता है । हित-विशेष की रक्षा के लिए कोई आयोजक ऐसे निदर्शन चुन सकता है जिससे उसके मतों की पुष्टि हो । दूसरा यह कि इस प्रकार के निदर्शनों से अनुसंधान करने में उसकी परिशुद्धता के परिमाण की गणना करने की कोई संतोषजनक विधि नहीं । अतएव प्राप्त परिणामों की प्रामाणिकता के बारे में निश्चित और असंदिग्ध रूप से नहीं जाना जा सकता । फिर यदि निदर्शन बड़ा हो तो इस रीति से छाँटने पर अभिनति के कारण उसके प्रतिनिधि होने की सम्भावना कम हो जाती है । पर, अगर चुनाव का आधार निर्विवाद हो तो इस रीति द्वारा चुने गए निदर्शन भी पर्याप्त परिशुद्ध सामग्री दे सकते हैं ।

दैव-निदर्शन (Random Sampling)

"अगर समग्र के प्रत्येक सदस्य के चुने जाने की सम्भावना समान है तो इस प्रकार छाँटने की रीति को दैव-निदर्शन कहा जाता है।" वास्तव में यह लाटरी-रीति है। इस प्रकार के चुनाव में यह देखा गया है कि भले ही कितनी ही सावधानी बरती जाय, अगर चुनाव व्यक्तियों द्वारा किया गया है तो कुछ न कुछ अभिनति अवश्य आ जाती है। अतएव इसमें व्यक्तिगत चुनाव बिल्कुल नहीं किया जाता और यांत्रिक रीतियों (mechanical process) का उपयोग किया जाता है। इसमें समग्र के प्रत्येक सदस्य को एक निश्चित संख्या द्वारा जाना जाता है। इस प्रकार प्रत्येक सदस्य के संगत कोई संख्या होती है जो कागज के टुकड़ों में लिख ली जाती है। इनको अच्छी तरह मिला लिया जाता है और इन में से कुछ टुकड़े ले लिये जाते हैं, जिनके संगत सदस्य निदर्शन बनाते हैं। इस रीति में इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि निदर्शन के सदस्यों को किसी भी दशा में अन्य सदस्यों से, जो लाटरी की रीति से नहीं आये हैं, प्रतिस्थापित (substitute) नहीं करना चाहिए।

इस रीति का सबसे बड़ा लाभ यह है कि आगणन के विभ्रमों (errors of estimation) की गणना और परिणाम के महत्व (significance of result) को संभाविता-सिद्धान्त (theory of probability) द्वारा जाना जा सकता है। सविचार-निदर्शन में ऐसा अब तक नहीं किया जा सका है। इसमें व्यक्तिगत अभिनति की कोई गुंजाइश नहीं रहती क्योंकि निदर्शन का चुनाव यांत्रिक रीतियों से होता है। पर इसके बावजूद भी यह संभव हो सकता है कि निदर्शन प्रतिनिधि-सा न लगे और न ही यह निश्चयपूर्वक कहा जा सकता है कि एक निदर्शन का प्रवरण (selection) पूर्णतः दैव-निदर्शन की रीति से किया गया है।

निदर्शन-प्रवरण (selection of sample) की यह रीति दो आधार-भूत नियमों पर आश्रित है। पहला है **सांख्यिकीय-नियमितता का नियम** (law of statistical regularity) और दूसरा है **महांक जड़ता नियम** (law of inertia of large numbers)। निदर्शन सम्बन्धी सिद्धान्तों में इनका बहुत महत्व है। अतएव इन पर नीचे विचार किया गया है।

सांख्यिकीय नियमितता नियम (law of statistical regularity)—यह नियम बताता है कि अगर किसी समग्र में (जिसमें बहुत संख्या में सदस्य हों) से यथोचित रूप से अधिक पदोंवाले समूहों का दैविक रीति से (at random) प्रवरण (selection) किया जाय तो ये समूह औसतन समग्र के गुणों का प्रतिनिधित्व करेंगे। इस नियम में दो मुख्य बातें हैं: पहली यह कि निदर्शनों (या समूहों) का प्रवरण दैविक रीति से (at random) किया जाय। अर्थात् समग्र के प्रत्येक सदस्य के

चुने जाने का अवसर (chance) समान हो और दूसरा यह कि चुने हुए सदस्यों की संख्या भी अधिक हो । इनकी संख्या जितनी अधिक होगी, उतनी ही अधिक प्रामाणिक इनके द्वारा दी गई समग्र की सूचना भी होगी । इस नियम को संभाविता-नियम (law of probability) भी कहा जाता है क्योंकि इसमें समग्र के सदस्यों की चुने जाने की संभावना पर विचार किया जाता है । जैसे अगर कोई सिक्का १००० बार उछाला जाय तो लगभग ५०० बार हेड ((head) और ५०० बार टेल (tail) आएगा । जितनी अधिक बार यह उछाला जायगा, उतनी ही अधिक सम्भावना दोनों के समान संख्या में आने की होगी । इसी नियम पर बीमा-कम्पनियों की गणनाएँ और जुआरियों के दाँव निर्भर रहते हैं ।

महांक जड़ता नियम (Law of Inertia of Large Numbers)—यह नियम सांख्यिकीय नियमिता नियम (law of statistical regularity) का उपसाध्य (corollary) है। इसके अनुसार अधिक पद-संख्या वाले समूह, कम पद-संख्या वाले समूहों से अपेक्षाकृत अधिक स्थायी होते हैं । अर्थात् अगर पद-संख्या बड़ी हो तो होने वाले परिवर्तन का परिमाण नगण्य होता है । कुछ पदों में परिवर्तन एक दिशा में होगा और कुछ में इसकी विरुद्ध दिशा में, और अगर ये पद पर्याप्त संख्या में लिये जायँ तो ये परिवर्तन परिमाण में बराबर हो जायँगे और इस प्रकार पूरे समूह के लिए कुल परिवर्तन शून्य हो जायगा । जितनी अधिक संख्या में पद लिये जायँगे, उतने ही अधिक निकट एक दिशा और विरुद्ध दिशा में होने वाले परिवर्तनों के परिणाम होते जाएँगे । उनकी परिवर्तन की प्रवृत्ति पद-संख्या अधिक हो जाने के कारण कम होती जायगी अर्थात् समूह की जड़ता बढ़ती चली जाएगी । इसका अर्थ यह नहीं है कि यह नियम कई समयावधियों (periods of time) में भी लागू होता है वास्तव में इस प्रकार के परिवर्तन जो परिस्थिति के बदल जाने के कारण होते हैं, उनमें यह लागू नहीं होता । पर इन दशाओं को छोड़कर, अगर परिस्थितियाँ समान रहें तो अधिक पद-संख्या वाला समूह अपेक्षाकृत अधिक स्थायी होगा [जैसे अगर किसी वस्तु के उत्पादन की मात्रा एक स्थान के लिए देखी जाय तो उसमें अधिक परिमाण में परिवर्तन होंगे, अगर एक देश के लिए देखी जाय तो अपेक्षाकृत कम परिवर्तन होंगे, पर अगर पूरी दुनिया के उत्पादन की मात्रा देखी जाय तो ये परिवर्तन नगण्य से होंगे ।]

द्वितीयक सामग्री संग्रहण (Collection of Secondary Data)

इस संग्रहण में अन्य अन्वेषकों द्वारा संकलित सामग्री का उपयोग किया जाता है । यह या तो किसी संस्था के वैयक्तिक प्रतिवेदनों (private reports) से प्राप्त किया जा सकता है या प्रकाशित सूचनाओं (published information) से ।

प्रतिवेदनों में मुख्यतः व्यवसाय-समितियाँ, चैम्बर ऑफ कॉमर्स (chambers of commerce), सरकार आदि से उपलब्ध, पर अप्रकाशित सामग्री का उपयोग किया जाता है।

प्रकाशित सूचना निम्नलिखित स्थानों से प्राप्त की जा सकती है:—

(१) राजकीय प्रकाशन (official publications)—केन्द्रीय या राज्य सरकार के विभिन्न विभागों द्वारा, नगरपलिकाओं (municipalities) या अन्य ऐसी संस्थाओं द्वारा, अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाओं द्वारा, सरकार द्वारा नियुक्त अनुसंधान समितियों या आयोगों (inquiry committees or commissions) द्वारा या विदेशी सरकारों द्वारा।

(२) व्यवसाय-समितियों, चैम्बर ऑफ कॉमर्स, बैंकों या अन्य ऐसी संस्थाओं के प्रकाशनों से।

(३) पत्रिकाओं, पुस्तकों या समाचार-पत्रों में प्रकाशित सामग्री से।

(४) अन्य वैयक्तिक अन्वेषकों (जैसे अर्थशास्त्रियों, शिक्षा संस्थाओं आदि) के प्रतिवेदनों से।

द्वितीयक-सामग्री-उपयोग (Using Secondary Data)

इसमें विशेष रूप से सचेत और सावधान रहना चाहिए। पहले संग्राहक के बारे में जान लेना चाहिए। अगर वह कोई राजकीय संस्था नहीं है तो यह अच्छी तरह निश्चित कर लेना चाहिए कि वे संग्राहक के अनुमानमात्र तो नहीं हैं, अर्थात् यह निश्चित कर लेना चाहिए कि सामग्री कहाँ तक प्रामाणिक है। यह निश्चित कर लेने के बाद कि प्रस्तुत सामग्री विश्वसनीय और प्रामाणिक है तथा इसमें किसी प्रकार की अभिनति नहीं है, यह जानना चाहिए कि यह सूचना कहाँ से प्राप्त की गई है, इसके संग्रहण का उद्देश्य क्या था, किन रीतियों से अनुसंधान का आयोजन किया गया था और इसकी सांख्यिकीय इकाइयाँ क्या हैं? इसके साथ-साथ इस सामग्री के लिए परिशुद्धता-परिमाण और इसकी एकरूपता पर भी विचार करना चाहिए। अन्त में यह देखना चाहिए कि इस सामग्री का उपयोग वर्तमान परिस्थितियों में करना कहाँ तक उचित है और यह सामग्री दी हुई समस्या के लिए कहाँ तक अनुकूल है?

अगर इन सब प्रश्नों के उत्तर समस्या के दृष्टिकोण से संतोषजनक हैं तो सामग्री का उपयोग किया जा सकता है अन्यथा नहीं।

सामग्री के आवश्यक गुण (Necessary Attributes of Data)

सामग्री में निम्नलिखित गुण होने चाहिए:—

(१) विश्वसनीयता (reliability)

(२) अनुकूलता (suitability)

(३) पर्याप्तता (adequacy)

इन पर अलग-अलग विचार किया जायगा।

सामग्री-विश्वसनीयता (Reliability of Data)—सही परिणाम प्राप्त करने के लिए सामग्री का विश्वसनीय होना आवश्यक है। अगर सामग्री स्वयं अविश्वसनीय है तो उससे प्राप्त परिणाम वस्तुस्थिति को सही रूप में प्रस्तुत नहीं कर सकेंगे और इसलिए अनुसंधान स्वतः असफल हो जायगा। इसको प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित बातें ध्यान में रखनी चाहिए:—

(१) क्या संकलनकर्ता विश्वसनीय है? अर्थात् कोई ऐसा हित तो नहीं है जिसे सिद्ध करने के लिए वह जान-बूझकर गलती करे?

(२) सामग्री-संग्रहण में किस रीति का उपयोग किया गया है और उसके उपयोग में आवश्यक सावधानी और सचेतता बरती गई है या नहीं? इसमें अभिनति या पक्षपात के लिए कितनी गुन्जाइश है?

(३) संग्रहण में परिशुद्धता-परिमाण कितना निश्चित किया गया था और उसे किस अंश तक प्राप्त किया गया?

(४) जिस काल में सामग्री-संग्रहण किया गया था क्या उसे सामान्य काल माना जा सकता है? अर्थात् यह निश्चित करना चाहिए कि किन्हीं असामान्य कारणों द्वारा परिस्थितियाँ विशेष रूप से प्रभावित तो नहीं थीं।

सामग्री-अनुकूलता (Suitability of Data)—प्रस्तुत समस्या का अध्ययन करने के लिए सामग्री इस प्रकार की होनी चाहिए जो उसके अनुकूल हो। इसके लिए सांख्यिकीय इकाइयों को ठीक रूप से निश्चित कर लेना चाहिए और अनुसंधान के उद्देश्य और क्षेत्र का हमेशा ध्यान रखना चाहिए ताकि बेकार की सामग्री जमा न हो पाए।

सामग्री-पर्याप्तता (Adequacy of Data)—इसके लिए भी अनुसंधान के क्षेत्र को निश्चित कर लेना चाहिए ताकि न तो अपेक्षाकृत विस्तृत अनुसंधान की सी सामग्री हो, और न ही सामग्री कम हो जाय। इसके साथ-साथ परिशुद्धता-परिमाण निश्चित कर लेना चाहिए। यह ऐसा होना चाहिए जिससे परिणामों में विभ्रम यथोचित रहें—न तो बिल्कुल परिशुद्ध और न बिल्कुल गलत।

प्रश्न

(१) सूचना प्राप्त करने की विभिन्न रीतियों का वर्णन कीजिए। आप इनमें किसे सबसे अच्छी समझते हैं और क्यों?

(२) सांख्यिकीय अनुसंधान के परिणाम किस अंश तक सही निदर्शन पर निर्भर

रहते हैं ? प्रतिनिधि सामग्री प्राप्त करने के उपयोग में आनेवाली विभिन्न रीतियों की तुलना कीजिये ।

(बी० कॉम०, आगरा '३९)

(३) समंक-संग्रह की संगणना-रीति और निदर्शन-रीति के लाभ-हानि की तुलना कीजिए ।

(बी० कॉम०, कलकत्ता '३१)

(४) विस्तृत अनुसंधान में दैव-निदर्शन रीति की आवश्यकता को स्पष्ट कीजिये । आप उत्तर प्रदेश के ग्रामीण भागों के आर्थिक सर्वेक्षण में इसका उपयोग किस प्रकार करेंगे ?

(बी० कॉम०, इलाहाबाद '३५)

(५) निम्नलिखित पर टिप्पणियाँ लिखिये:—

(१) सामग्री-विश्वसनीयता ।

(२) सांख्यिकीय नियमितता-सिद्धान्त ।

(३) दैव-निदर्शन और सविचार-निदर्शन ।

(४) द्वितीयक सामग्री के प्राप्ति-स्थान ।

(६) द्वितीयक सामग्री के उपयोग में कौन सावधानियाँ वरतनी चाहिए ?

(७) प्रगणकों की सहायता से अनुसंधान करने में किन वातों का ध्यान रखना चाहिये ?

(८) किसी भी गृह-उद्योग के जिसमें आपकी दिलचस्पी हो, आर्थिक पक्ष का सर्वेक्षण करने के लिए प्रश्नावली बनाइये । संक्षेप में वताइये कि आप आवश्यक सामग्री का संग्रहण किस प्रकार करेंगे ? (बी० कॉम०, लखनऊ '४३)

(९) सांख्यिकीय सामग्री के संग्रहण के उपयोग में साधारणतः आनेवाली रीतियों को वर्गीकृत कीजिये और संक्षेप में उनके लाभ और उनकी हानियाँ वताइये ।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद '४६)

(१०) आप उत्तर प्रदेश में हाथ-करघा उद्योग के वारे में अनुसंधान का आयोजन किस प्रकार करेंगे ? इस उद्देश्य के लिए अनुकूल प्रश्नावली की रचना कीजिये ।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद '४२)

(११) आप एक छोटे भारतीय राज्य के जिसमें पाँच कस्वे हैं और एक हज़ार गाँव हैं, आर्थिक सर्वेक्षण का आयोजन किस प्रकार करेंगे ?

(एम० कॉम०, इलाहाबाद '४३)

(१२) सामग्री में किन गुणों का होना आवश्यक है । प्रत्येक का विस्तारपूर्वक वर्णन कीजिए ।

(१३) प्रत्यक्ष स्वयं अनुसंधान की सामग्री संग्रहण की अन्य रीतियों से तुलना कीजिये और गुण-दोषों का निरूपण कीजिये ।

(बी० कॉम०, आगरा १९५०)

(१४) "दैव निदर्शन" से आप क्या समझते हैं ? सांख्यिकीय अनुसंधान में इसके महत्व पर प्रकाश डालिये ।

(१५) स्पष्ट रूप से यह समझाइए कि दैव निदर्शन किस प्रकार सम्भाविता सिद्धान्त पर आधारित है ? सांख्यिकीय नियमितता नियम तथा महांक जड़ता नियम का सम्भाविता सिद्धान्त से क्या सम्बन्ध है ?

अध्याय ५

एकत्रित सामग्री का सम्पादन

(Editing of Collected Data)

अनुसंधान के लिए एकत्रित सामग्री का उपयोग करने से पूर्व यह आवश्यक है कि उसका सम्पादन किया जाय क्योंकि विना इसके इस बात की सम्भावना रहेगी कि अन्वेषक के निष्कर्ष अशुद्ध हों। यों तो सामाजिक शास्त्रों में पूर्ण परिशुद्धता लगभग असम्भव ही सी है फिर भी सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग से साधारणतः शुद्ध निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। इसलिए यह आवश्यक है कि एकत्रित सामग्री के प्रयोग से पूर्व यह देख लिया जाय कि वह सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोगयुक्त हैं या नहीं। कुछ अवसरों पर तो एकत्रित सामग्री इतनी अशुद्ध हो सकती है कि उसको फिर से एकत्रित करना आवश्यक हो जाय, पर बहुधा सामग्री के सम्पादन के पश्चात् उसका उपयोग किया जा सकता है। सामग्री सम्पादन में विशेषकर तीन बातें ध्यान में रखनी पड़ती हैं और वह हैं (१) परिशुद्धता-परिमाण (degree of accuracy), (२) उपसादन (approximation) तथा (३) सांख्यिकीय विभ्रम (statistical error)। इन तीनों बातों को भिन्न-भिन्न समझना आवश्यक है। अतः निम्नलिखित पंक्तियों में इनका विवेचन किया गया है।

परिशुद्धता (Accuracy)

पूर्ण परिशुद्धता (perfect accuracy) का अर्थ यह है कि किसी वस्तु को जैसी वह है वैसा ही बताया जाय। यह असम्भव है। हम कभी भी किसी वस्तु को पूर्ण-परिशुद्धता के साथ नहीं बता सकते। इसके दो कारण हैं—निरीक्षक और वे उपकरण जिनसे वह निरीक्षण करता है। चूंकि मनुष्य पूर्ण नहीं है इसलिए वह जो निरीक्षण करता है या निरीक्षण के लिए जिन उपकरणों को बनाता है, वे पूर्ण नहीं होते। इन कारणों से निरीक्षण के द्वारा प्राप्त की गई सामग्री भी पूर्णतः परिशुद्ध नहीं हो सकती।

सांख्यिकीय में पूर्ण परिशुद्धता की आशा करना हास्यास्पद है। जब भौतिक विज्ञानों

(physical sciences) तक में जहाँ नियंत्रित प्रयोग किए जा सकते हैं, पूर्ण परिशुद्धता संभव नहीं है, तब अगर हम सांख्यिकी में, जहाँ न तो नियन्त्रित प्रयोग हो सकते हैं, न तो सब जगह नापने के यन्त्रों का उपयोग किया जा सकता है और जहाँ वैयक्तिक अभिनति—ज्ञात या अज्ञात—की बहुत अधिक गुंजाइश है, पूर्ण परिशुद्धता प्राप्त करने के प्रयत्न करें तो वे अर्थहीन होंगे। वास्तव में सांख्यिकी में इस बात पर आश्चर्य नहीं होना चाहिए कि परिणाम इतने अपरिशुद्ध क्यों हैं—क्योंकि अपरिशुद्ध होने के लिए कारण हैं—बल्कि आश्चर्य इस बात पर होना चाहिए कि परिशुद्ध परिणाम के इतने निकट के मूल्य किस प्रकार मिल गये। सांख्यिकी वास्तव में हमें वास्तविक जगत को उसकी अपूर्णता के साथ समझने में सहायता देती है। जब प्रयोग करने के स्थल की दशाएँ अपूर्ण हैं, निरीक्षक अपूर्ण है और निरीक्षण के उपकरण अपूर्ण हैं, तो परिणामों का अपूर्णतः परिशुद्ध होना स्वाभाविक ही है।

फिर हमें पूर्णतः परिशुद्ध परिणामों की आवश्यकता भी नहीं पड़ती है। अगर साधारणतः परिशुद्ध परिणाम मिल जायँ, तो वस्तुस्थिति को समझने में कोई विशेष कठिनाई नहीं होती। कई स्थानों में तो पूर्ण परिशुद्धता प्राप्त करने का प्रयास निरर्थक और मूर्खतापूर्ण है। अगर हम पृथ्वी से किसी नक्षत्र की दूरी निकटतम इंचों तक—अगर यह संभव हो—नापें तो इसके कोई लाभ नहीं होगा। अरबों मील की दूरी में इंचों का क्या स्थान है? यह एक चरम सीमा का उदाहरण है। व्यवहार में इससे कहीं अधिक मोटे (crude) परिणाम संतोपजनक होते हैं। कोई भी व्यापारी अनाज तोलते समय तोलों (tolas) का ख्याल नहीं रखता। जहाँ मनों में गिनती हो रही हो वहाँ सेरों का ध्यान रखना ही बहुत है। इसी प्रकार मीलों में दूरी नापने में भी गजों का ध्यान रखना ही कठिन और निरर्थक हो जाता है, फीट और इंच तो बाद की चीजें हैं। वास्तव में हम कभी भी किसी वस्तु को ठीक-ठीक नहीं नापते। हम उसके सही मूल्य का आगणन (estimation) करते हैं। अगर इस आगणन में यथोचित (reasonable) परिशुद्धता हो तो हम सन्तुष्ट रहते हैं। प्रश्न यह उठता है कि यथोचित परिशुद्धता का अर्थ क्या है? यथोचित परिशुद्धता की निरपेक्ष परिभाषा देना सम्भव नहीं है। यह इस बात पर निर्भर करती है कि किस प्रकार की सामग्री पर प्रयोग किया जा रहा है और इस प्रयोग का उद्देश्य क्या है। इन बातों को ध्यान में रखते हुए यथोचित परिशुद्धता को निश्चित करना निरीक्षक की निर्णय-बुद्धि पर छोड़ दिया जाता है। उसकी निर्णय-बुद्धि के अतिरिक्त परम्पराएँ भी इसको निश्चित करने में सहायता देती हैं। अगर हम पृथ्वी से सूर्य की दूरी नाप रहे हों तो १ या २ हजार मील छोड़ देने से कोई विशेष अन्तर नहीं पड़ेगा, पर कपड़े को नापते समय १ या २ इंच से अधिक नहीं छोड़ा जा सकता। सांख्यिकी में निरपेक्ष परिशुद्धता की आवश्यकता नहीं है बल्कि सामग्री की सापेक्ष परिशुद्धता होनी चाहिए।

उपसादन (Approximation)

कई स्थलों में समंकों को बिलकुल ठीक देने की आवश्यकता नहीं पड़ती। अगर सभी स्थानों में समंकों को चार या पाँच दशमलवों तक सही दिया जाय तो सामग्री की उपयोगिता नहीं बढ़ती है बल्कि उसको समझना अधिक कठिन और भ्रम पैदा करने वाला हो जाता है। इसलिए अगर समंकों को इस प्रकार रखना हो जिससे उनको समझना सुविधाजनक और सहज हो जाय, तो सब अंकों को देने के स्थान पर पहले तीन या चार अंक दिए जा सकते हैं, जैसे १६३२७·०२१ के स्थान पर १६३२७ रखना और इसके स्थान पर १६३०० रखना अनुचित नहीं है। बहुत सम्भव है कि जो अङ्क हटाए गए हैं वे विभ्रम के कारण आ गए हों। **इस प्रकार किसी एक संख्या के स्थान पर उसकी निकटवर्ती दूसरी संख्या रखने को जिससे वस्तु-स्थिति को समझने में अधिक कठिनाई न हो और न ही वस्तुस्थिति सम्बन्धी सामग्री में कोई विशेष परिवर्तन हो, उपसादन कहा जाता है।**

उपसादन की कुछ सर्वमान्य विधियाँ हैं, जिनके अनुसार इसे किया जाना चाहिए। ये विधियाँ निम्नलिखित हैं:—

(१) पहली रीति में निकटतम पूर्ण संख्या को वास्तविक सामग्री के स्थान पर रखा जाता है, जैसे अगर कोई अङ्क ५,३२,६७१ है तो इसका निकटतम हजार में ५,३३,००० द्वारा व्यक्त किया जायगा। अगर अङ्क ४,१२,२३० हो तो इसे ४,१२,००० से व्यक्त किया जाएगा। नियम यह है कि जो भाग छोड़ा जा रहा है वह अगर पूर्ण संख्या (इस उदाहरण में एक हजार) के आधे के बराबर या इससे अधिक है तो उसके स्थान पर पूर्ण संख्या को लिखना चाहिए (जैसे, पहले वाले अङ्क में ६७१ के लिए एक हजार रख दिया गया है) और अगर यह भाग आधे से कम है तो उसे छोड़ देना चाहिए (जैसे, दूसरे अङ्क में २३० के स्थान पर कुछ नहीं लिखा गया है।) यही बात प्रतिशतताओं में भी लागू होती है। ५२.३४५६% के स्थान पर ५२% और ४३.७८२१% के स्थान पर ४४% लिखा जा सकता है।

(२) दूसरी रीति में जो भाग छोड़ा जा रहा है उसके स्थान में उसके बाद आने वाली पूर्ण संख्या रख दी जाती है, जसे (इस रीति में) पिछले उदाहरण के ५,३२,६७१ के स्थान पर ५,३३,००० रखा जाएगा और ४,१२,२३० के स्थान में भी ४,१३,००० रखा जायगा। ५२.३४५६% और ४३.७८२१% के स्थान पर क्रमशः ५३% और ४४% रखा जायगा।

(३) इस रीति में पूर्ण संख्या के रूप में सामग्री रखने के लिए कुछ भाग को बिल्कुल छोड़ दिया जाता है। जैसे:—

५,३२,६७१ के स्थान पर ५,३२,००० रखा जायगा।

४,१२,१३० के स्थान पर ४,१२,००० रखा जायगा।

५२·३४५६% के स्थान पर ५२% रखा जायगा।

४३·७८२१% के स्थान पर ४३% रखा जायगा।

किस प्रकार की सामग्री में कितना उपसादन करना चाहिए यह सामग्री पर निर्भर करता है; सामग्री के संग्रहण में कितनी परिशुद्धता रही है यह उसमें किए जाने वाले उपसादन को निश्चित करता है। अगर कुछ रेखाओं की लम्बाई मिलीमीटरों तक सही नापी गई है तो मिलीमीटरों के दशमांशों को उपसादन द्वारा हटाया जा सकता है। अर्थात् ३·२१ मिलीमीटर लिखने के स्थान पर ३·२ मिलीमीटर लिखा जा सकता है। अगर लम्बाई इंचों में सही नापी गई है तो इंचों के दशमांशों को उपसादन द्वारा हटाया जा सकता है।

जिन सामग्रियों में उपसादन किया गया है उन्हें लिखने की भी कुछ निश्चित विधियां हैं। मान लीजिये किसी रेखा की लम्बाई मिलीमीटरों में सही नापी गई है और यह लम्बाई ४ ९९ सें० मी० है। उपसादन करने पर यह लम्बाई ५ सें० मी० के बराबर हो गई है। पर अगर इसे लिखना और कहना है तो केवल ५ सें० मी० नहीं लिखा जायगा, बल्कि ५·० सें० मी० लिखा जायगा और कहा भी जायगा। इन दोनों के बीच में जो अन्तर है वह स्पष्ट हो जाना चाहिये। ५ सें० मी० का अर्थ यह है कि लम्बाई सेन्टीमीटरों में सही नापी गई है—अर्थात् ४·५ या इससे अधिक और ५·५ से कम के बीच की लम्बाइयाँ ५ सें० मी० के बराबर मानी जायँगी। ५·०सें० मी० का अर्थ यह है कि लम्बाई मिलीमीटरों में सही नापी गई है। इस दशा में ५·० सें० मी० का अर्थ यह हुआ कि लम्बाई ४·९५ या इससे अधिक और ५·०५ से कम है। इसी प्रकार ५·०० सें० मी० का अर्थ यह हुआ कि लम्बाई मिलीमीटरों के दशमांशों तक सही नापी गई है।

उपसादन किस प्रकार किया गया है इसे हमेशा बता देना चाहिये। साधारणतः इसे बताने की रीति यह है कि उपसादित अंक के साथ उसके अवर और अपर (lower and upper) सीमाएँ भी बता दी जाती हैं। जैसे अगर कोई अंक १९७ है और इसे दहाइयों तक सही बताना है तो इसके स्थान पर २०० लिखा जायगा। चूँकि यह दहाइयों तक सही है, इसलिए १९५ से २०५ तक के किसी अंक के लिए २०० लिखा जा सकता है। अतः २०५ इसकी अपर सीमा हुई और १९५ इसकी अवर सीमा। इन दोनों के साथ उपसादित अंक बताने के लिए २०० ± ५ लिखा जाता है। उपर्युक्त अनुच्छेद के उदाहरणों में जब लम्बाई सेन्टीमीटरों में सही नापी गई है तो ५ के बदले ५±० ५ लिखा जायगा; और जब मिलीमीटरों में सही नापी गई है तो ५ ± ० ०५ लिखा जायगा।

अगर उपसादित (approximated) अंकों का उपयोग गुणा, भाग, घात और मूल निकालने के लिए करना है तो सावधानी बरतनी चाहिये। इन दशाओं में उपसादन

के कारण अंकों में जो विभ्रम है वह गुणित, विभाजित आदि होकर आएगा और इसलिए परिणाम भ्रमात्मक हो सकते हैं ।

बड़े अंकों के उपसादनों का उन पर आधारित प्रतिशतताओं पर नगण्य असर पड़ता है । इस बात की परीक्षा इस प्रकार के उपसादनों द्वारा प्रतिशतता निकालकर और वास्तविक अंकों की प्रतिशतता की गणना करके की जा सकती है ।

सांख्यिकीय विभ्रम (Statistical Error)

सांख्यिकी में विभ्रम (error) और गलती (mistake) पर्यायवाची शब्द नहीं हैं । गलती (mistake) का अर्थ होता है, अशुद्ध (wrong) रीतियों का उपयोग करना या गणना में भूल करना । यह जानबूझ कर भी की जा सकती है और बिना जाने भी । पर इसे दूर किया जा सकता है । दूसरी ओर विभ्रम (error) का अर्थ वास्तविक मूल्य और आगणित मूल्य (जो वास्तविक मूल्य का उपसादन होगा) के बीच का अन्तर है । विभ्रम यह बताता है कि वास्तविक मूल्य से उपसादित या आगणित मूल्य कितना अधिक या कम है ।

सामग्री या समंकों में विभ्रम होने के मुख्य कारण निम्नलिखित हैं:—

(१) **मूल-विभ्रम** (Errors of origin)—इनके होने का कारण सूचना के विषय या इकाइयों की अनुपयुक्त परिभाषा या अभिनत (biassed) सामग्री-संग्रहण या सामग्री की अन्तर्वती (inherent) अस्थिरताएँ हैं ।

(२) **प्रहस्तन-विभ्रम** (Errors of manipulation)—जानते हुए, गणना करने में, नापने में, वर्णन करने में या उपसादन करने में होने वाले विभ्रम इसके अन्तर्गत आते हैं ।

(३) **अपर्याप्तता-विभ्रम**—(Errors of inadequacy)—बहुत कम संख्या में पदों के निदर्शनों का उपयोग करने या अपूर्ण सूचना के कारण होनेवाले विभ्रम इसके अन्तर्गत आते हैं ।

निरपेक्ष और सापेक्ष विभ्रम (Absolute & Relative Errors)

सांख्यिकीय विभ्रम निरपेक्षतः (absolutely) या सापेक्षतः (relatively) नापे जा सकते हैं । पहले प्रकार को निरपेक्ष विभ्रम (absolute error) कहते हैं और दूसरे को सांक्षेप विभ्रम (relative error) । जैसा कहा जा चुका है, सांख्यिकी में सापेक्ष विभ्रम अधिक महत्वपूर्ण है।

निरपेक्ष-विभ्रम—मान लीजिए किसी समूह के सदस्यों की माध्य लम्बाई ६५" है और इसका आगणन (estimate) या उपसादित मूल्य (approximated value) ६०" है तो निरपेक्ष विभ्रम इन दोनों का अन्तर, अर्थात् ६५"−६०"=५",

हुआ। निरपेक्ष विभ्रम किसी परिणाम के वास्तविक मूल्य और उसके आगणित या उपसादित मूल्य का अन्तर है।

सापेक्ष-विभ्रम—सापेक्ष-विभ्रम निरपेक्ष-विभ्रम और आगणित या उपसादित मूल्य का अनुपात है। उपर्युक्त उदाहरण में निरपेक्ष विभ्रम ५" के बराबर है और आगणन ६०"। इसलिए सापेक्ष विभ्रम $=\frac{५}{६०}=\frac{१}{१२}$।

सापेक्ष विभ्रम को कभी-कभी प्रतिशतता के रूप में भी रखा जाता है। उपर्युक्त उदाहरण में सापेक्ष विभ्रम $\frac{१}{१२}$ है। इसे प्रतिशतता के रूप में रखने के लिए १०० से गुणा कर दिया जाता है। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होगा उसे **प्रतिशतता-विभ्रम** (Percentage Error) कहते हैं। इस उदाहरण में प्रतिशतता विभ्रम $=\frac{१}{१२}\times १०० = ८\cdot३३\%$

अगर आगणित या उपसादित मूल्य वास्तविक मूल्य से अधिक है तो इन दोनों का अन्तर ऋणात्मक होगा। इसलिए निरपेक्ष और सापेक्ष, दोनों प्रकार के, विभ्रम ऋणात्मक होंगे।

सामान्यतः अगर किसी राशि का वास्तविक मूल्य $प_१$ (u_1) हो और उसका आगणित मूल्य प (u) हो तो

निरपेक्ष विभ्रम	Absolute error
$भ्रि = प_१ - प$	$ue = u_1 - u$
और सापेक्ष विभ्रम	and relative error
$भ्र = \frac{प_१ - प}{प}$	$e = \frac{u_1 - u}{u}$

अगर $प_१$ (u_1), प (u) से अधिक है तो विभ्रम धनात्मक (positive) होंगे, पर अगर $प_१$ (u_1) प (u) से कम है तो विभ्रम ऋणात्मक (negative) होंगे।

अभिनत और अनभिनत विभ्रम (Biassed & Unbiassed Errors)

विभ्रम दो प्रकार के होते हैं। एक तो अभिनत विभ्रम (biassed errsors) और दूसरा, अनभिनत विभ्रम (unbiassed errors)।

अभिनत विभ्रमों या तो सूचकों और आगणकों के पक्षपात या उनकी अभिनति के कारण हो सकते हैं, या उपकरणों की त्रुटियों के कारण। ये विभ्रम संचयी (cumulative) होते हैं। अर्थात् जितनी अधिक संख्या में निरीक्षण लिये जाएँगे, उतने ही ये बढ़ते जायेंगे। जैसे, अगर एक सेर का एक बाट $\frac{१}{४}$ छटांक काम है तो उससे जितनी अधिक बार तोला जायगा उतना ही निरपेक्ष विभ्रम बढ़ जायगा। अगर सूचक अभिनत हैं तो उनसे जितनी अधिक राशि में सामग्री ली जायगी उतना ही विभ्रम अधिक होगा। इस प्रकार अगर आगणक एक निश्चित धारणा को सिद्ध करने के उद्देश्य से कोई अनुसंधान करते हैं, तो इस बात में

प्रयत्नशील रहेंगे कि सामग्री ऐसे लोगों के सम्बन्ध में हो जिनकी स्थिति उनकी धारणा को सिद्ध करती हों। ऐसे लोग जितनी अधिक संख्या में होंगे उतना ही निरपेक्ष विभ्रम बढ़ता चला जायगा।

अनभिनत विभ्रम वे विभ्रम होते हैं जो किसी पक्षपात या अभिनत के कारण नहीं होते बल्कि दैव (chance) कारणों से होते हैं। साधारणतः अनभिनत विभ्रम पूरक (compensating) होते हैं—अर्थात् जितनी अधिक संख्या में पद लिए जायँगे उतना ही निरपेक्ष विभ्रम होगा। चूँकि ये सांख्यिकीय नियमितता नियम के अनुसार होते हैं, इसलिए अधिक संख्या में पदों को लेने से जितना विभ्रम एक दिशा में होगा लगभग उतना ही विभ्रम दूसरी दिशा में भी होगा। इसलिए कुल विभ्रम कम हो जायगा। पिछले उदाहरण में अगर बाट ठीक हो और तोलने की गलती के कारण विभ्रम हो, तो जितनी अधिक मात्रा में वस्तु तोली जायगी उतना ही निरपेक्ष विभ्रम कम हो जायगा क्योंकि अगर कुछ तोलों में एक सेर से कम तुला हो तो कुछ में इससे अधिक तुलेगा और ये दोनों एक दूसरे का अपवर्तन (cancellation) कर लेंगे।

यहाँ पर यह ज्ञातव्य है कि अनभिनत विभ्रम हमेशा पूरक (compensating) नहीं होते और न अभिनत विभ्रम हमेशा संचयी होते हैं। जहाँ तक जोड़ने का प्रश्न है, यह सच है पर घटाने में इसके बिल्कुल विपरीत हो जाता है क्योंकि अगर एक ही चिह्न वाली राशियों को (जैसी अभिनत विभ्रम में मिलती) आपस में घटाया जाय तो अन्तर वास्तविक मूल्य के अधिक निकट होगा। पर अगर विपरीत चिह्नों वाली राशियों को (जैसी अनभिनत विभ्रम में मिलाती हैं) आपस में घटाया जाय तो अन्तर में अधिक निकटवर्ती परिणाम रहेगा। अगर दो संख्याओं को गुणा किया जाय तो विपरीत चिह्न वाले विभ्रम समान चिह्नवाले विभ्रमों की अपेक्षा वास्तविक मूल्य के अधिक निकटवर्ती परिणाम देंगे। अर्थात् गुणा करने में अनभिनत विभ्रमों की प्रवृत्ति पूरक होने की होती है। इसके विपरीत भाग देने में अगर दोनों संख्याओं के विभ्रमों के चिह्न समान हुए तो परिणाम वास्तविक मूल्य के अधिक निकट होंगे और अगर इन विभ्रमों के चिह्न विपरीत हुए तो परिणाम वास्तविक मूल्य से दूर होंगे। अतः भाग में, परिणाम में होने वाला विभ्रम अभिनत होने पर अनभिनत विभ्रम होने की अपेक्षा कम होगा। नीचे उदाहरण देकर इस कथन को समझाया गया है।

	वास्तविक मूल्य	अभिनत विभ्रम के साथ मूल्य	अनभिनत विभ्रम के साथ मूल्य
(क)	१००	९९	९९
(ख)	२००	१९७	२०२

(क) के लिए निरपेक्ष अभिनत विभ्रम=१, निरपेक्ष अनभिनत विभ्रम=१

(ख) के लिए निरपेक्ष अभिनत विभ्रम=३, निरपेक्ष अनभिनत विभ्रम=−२

(क+ख) (=३००) के लिए निरपेक्ष अभिनत विभ्रम=४, निरपेक्ष अनभिनत विभ्रम=−१

(ख−क) (=१००) के लिए निरपेक्ष अभिनत विभ्रम=२, निरपेक्ष अनभिनत विभ्रम=−३

(क×ख) (=२०,०००) के लिए निरपेक्ष अभिनत विभ्रम=(२००००−१८९०३) =१०९६, और निरपेक्ष अनभिनत विभ्रम=२।

(ख÷क) (=२) के लिए निरपेक्ष अभिनत विभ्रम=०·०१; और निरपेक्ष अनभिनत विभ्रम=०·०४।

अभिनत विभ्रमों को दूर करने का यथाशक्ति प्रयत्न किया जाना चाहिये क्योंकि समंकों से माध्य आदि की गणना करने में निरपेक्ष विभ्रम और अधिक बढ़ जाता है। अनभिनत विभ्रम को कम करने की रीति यह है कि जितनी अधिक संख्या में संभव हों, उतने पद लेने चाहिये।

प्रश्न

(१) उदाहरणों सहित स्पष्ट रूप से समझाइये कि सांख्यिकीय विभ्रम, गलतियों से कैसे भिन्न हैं ? आपको कितने प्रकार के विभ्रमों का ज्ञान है ? इनको कैसे नापा जा सकता है ? (बी० कॉम०, इलाहाबाद १९४९)

(२) (क) समंकों में विभ्रम के मुख्य स्रोतों और प्रभावों पर विचार कीजिए।

(ख) उपसादन की मुख्य रीतियों और उनकी सांख्यिकी में उपयोगिता बताइये। (बी० कॉम०, आगरा १९४०)

(३) परिशुद्धता से आप क्या समझते हैं ? विस्तारपूर्वक समझाइये।

(४) सांख्यिकीय गणनाओं में परिशुद्धता के किस स्तर की आवश्यकता होती है ? सामान्यतः उपसादन किस प्रकार किया जाता है ? उदाहरण दीजिये। (एम० ए०, इलाहाबाद १९५४)

(५) निरपेक्ष विभ्रम, सापेक्ष विभ्रम और अभिनत विभ्रम को समझाइये।

(६) सांख्यिकीय सामग्री के संग्रहण और निर्वचन में संभवतः होने वाले विभ्रमों के प्रकारों का उल्लेख कीजिये। इनको कम करने के लिए या इन्हें दूर करने के लिए आप क्या सावधानियाँ बरतेंगे ? (एम० ए०, इलाहाबाद १९५०)

(७) "सांख्यिकीय अनुसन्धान और परिशुद्धता परिमाण" पर एक निबन्ध लिखिये।

(८) सांख्यिकी में उपसादन की क्या उपयोगिता है ? उपसादन की मुख्य रीतियों तथा उपसादित संख्याओं को लिखने की विधियों के बारे में आप क्या जानते हैं ?

(९) "न तो अनभिनत विभ्रम सदैव पूरक होते हैं और न अभिनत विभ्रम सदैव संचयी," विवेचना कीजिये।

अध्याय ६

सामग्री का वर्गीकरण और सारणीयन

(Classification & Tabulation of Data)

वर्गीकरण

संकलन या संग्रहण से प्राप्त सामग्री वहुत वड़ी राशि में होती है। इसका अध्ययन इस दशा में किया जाना सम्भव नहीं होता क्योंकि ग्राह्यता के लिए यह आवश्यकीय है कि समान वस्तु असमान वस्तुओं से अलग रक्खी जायँ। सामग्री को उचित रूप से समझने के लिए यह आवश्यक है कि वह संक्षिप्त रूप में व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुत की जाय। इस लक्ष्य की प्राप्ति के लिए सामग्री का सारणीयन (tabulation)) किया जाता है। पर इससे पहले कि सामग्री का सारणीयन किया जाय उसे इस प्रकार अनुविन्यसित (arrange) करना पड़ता है जिससे समान तथ्य एक साथ रहें और असमान तथ्य अलग-अलग रहें। इसी प्रकार सामग्री को अलग-अलग रखन को वर्गीकरण कहते हैं। वर्गीकरण (classification) में तथ्यों को उनके गुणों या समानता के अनुसार वर्गों में वाँट दिया जाता है। इस प्रकार के वर्गों में एक गुण या समानता वाले तथ्य रखे जाते हैं, इस प्रकार अनुविन्यस्त (arranged) सामग्री परस्पर सम्बन्ध स्थापित करने या तुलना करने योग्य नहीं होती, पर यह इस प्रकार सामग्री को प्रस्तुत करने (सारणीय) की ओर पहला कदम है। वास्तव में वर्गीकरण के वाद सामग्री ऐसे रूप में आ जाती है कि उसे देखकर सरलतापूर्वक संदर्भ जाना जा सकता है। इस प्रकार प्रस्तुत की गई सामग्री सविस्तार नहीं होती, पर इससे जो सुविधा होती है वह इस दोष के मुकावले में अधिक है।

व्यवहार में वर्गीकरण दो रीतियों से किया जाता है:—

(१) गुणों के अनुसार ((by attributes)) ।

(२) वर्गान्तरों के अनुसार (by class-intervals) ।

गुणों के अनुसार वर्गीकरण

(Classification according to attributes)

इस रीति में सामग्री को गुणों के अनुसार विभाजित किया जाता है। किसी गुण की उपस्थिति जिनमें हो उन्हें एक वर्ग में रखा जाता है और जिनमें वह गुण न हो

उन्हें दूसरे वर्ग में । जैसे, जन-समुदाय को दो भागों में, अंधों और जो अंधे नहीं हैं— बाँटा जा सकता है । या इन्हीं व्यक्तियों को —पुरुष और स्त्री—दो भागों में बाँटा जा सकता है । इस प्रकार का वर्गीकरण, जिसमें सामग्री को दो उपवर्ग में बाँटा जाता है, सरलवर्गीकरण (simple classification) या द्वन्द्व-भाजन-वर्गीकरण (classification according to dichotomy) कहलाया जाता है ।

अगर एक से अधिक गुणों पर विचार किया जाता हो तो सामग्री कई उपवर्गों में विभाजित की जा सकती है । मान लीजिए कि ऐसे दो गुण जिनके अनुसार वर्गीकरण किया जा रहा हो अन्धापन और स्त्री या पुरुष होना हो तो पहले दो उपवर्ग, स्त्री और पुरुष होंगे । यह वर्गीकरण एक गुण (स्त्री या पुरुष) होने के अनुसार किया गया है । अब स्त्री उपवर्ग के अन्तर्गत आने वालों को अन्धेपन के अनुसार फिर दो उपवर्गों में बाँटा जा सकता है। एक तो वे जो स्त्री हैं और अन्धी भी हैं दूसरे वे जो स्त्री हैं पर अन्धी नहीं हैं, इसी प्रकार पुरुष उपवर्ग को उन पुरुषों में जो अन्धे है और उनमें जो अन्धे नहीं हैं, उपवर्गों में बाँटा जा सकता है । इस प्रकार कुल चार उपवर्ग प्राप्त हुए । ऐसा वर्गीकरण कितने ही गुणों के अनुसार किया जा सकता है । इस तरह किए गए वर्गीकरण को बहुगुण वर्गीकरण (manifold classification) कहते हैं । इस प्रकार का बहुगुण वर्गीकरण जनगणना के प्रतिवेदनों में पाया जाता है । माना पहले पुरुष और स्त्री के अनुसार वर्गीकरण किया गया । इस प्रकार के उपवर्गों को धर्म के अनुसार विभाजित किया जा सकता है । इन धर्मों का उपजातियाँ, फिर पेशे के अनुसार वर्गीकरण आगे बढ़ाया जा सकता है ।

इस प्रकार के वर्गीकरण में, (गुणों के अनुसार किए गए वर्गीकरण) यह आवश्यक नहीं है कि वर्गों के बीच का अन्तर प्राकृतिक या ठीक-ठीक निश्चित हो । प्रायः यह वर्गीकरण स्वेच्छित होता है । जैसे लम्बे और छोटे व्यक्तियों में यदि वर्गीकरण करना हो तो किसी भी निश्चित लम्बाई से अधिक लम्बे व्यक्तियों को लम्बा और अन्य को छोटा कहा जा सकता है । जैसे यह कहा जा सकता है कि ५' ४" या इससे अधिक लम्बाई वाले व्यक्ति लम्बे माने जायेंगे और इससे कम लम्बे व्यक्ति छोटे माने जायेंगे । ऐसी दशाओं में जहाँ गुण किसी नाप के अनुसार माने जाते हैं, निश्चितता आ जाती है । पर यह विभाजन अनिश्चित भी हो सकता है । उन दशाओं में जहाँ एक गुण धीरे-धीरे दूसरे गुणों में परिवर्तित हो जाता है, ऐसा होता है । जैसे अन्धापन और अन्धा न होने के गुण किसी निश्चित सीमा से अलग-अलग नहीं किए जा सकते । जहाँ भी गुणों के अनुसार वर्गीकरण किया गया हो, इस बात का विचार रखना चाहिए । पर इस रीति से वर्गीकरण करने में इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि समूह का प्रत्येक सदस्य या तो एक गुण के अन्तर्गत आएगा या उसमें वह गुण नहीं होगा । ऐसा नहीं हो सकता कि एक ही व्यक्ति में एक गुण हो भी और नहीं भी हो । इसमें किसी प्रकार की द्विविधा नहीं होनी चाहिए ।

वर्गान्तरानुसार वर्गीकरण

(Classification according to class-intervals)

वर्गीकरण करने की दूसरी रीति वर्गान्तर के अनुसार करने की है। साधारणत: सांख्यिकी में जिन गुणों का उपयोग होता है, वे आंकिक रूप में रखे जा सकते हैं। जैसे व्यक्तियों की लम्बाइयाँ, उनकी आय, उनके वजन आदि। अतएव लम्बे या छोटे कहने की अपेक्षा यह कहना अधिक अच्छा होगा कि वह ५′ और ६′ के बीच में है। इस प्रकार दी हुई लम्बाइयों को निश्चित वर्गों के अन्तर्गत रख दिया जाता है और प्रत्येक वर्ग में आने वाले मूल्यों को गिनकर उसके सामने रख दिया जाता है। इस प्रकार एक गुण को कई छोटे-छोटे भागों में बाँट दिया जाता है। इस रीति में सरल-वर्गीकरण की अपेक्षा अधिक सुतथ्यता (precision) है। इन छोटे भागों को **वर्गान्तर** (class interval) कहते हैं। अगर ये भाग ३′–४′, ४′–५′ और ५′–६′ हों तो इन्हें वर्गान्तर कहा जायगा। वर्गान्तर को निश्चित करने वाली सीमाएँ वर्ग-सीमाएँ (class-limits) कहलाती हैं। उपर्युक्त उदाहरण में पहले वर्ग की वर्ग-सीमाएँ ३′ और ४′ हैं। वर्ग की दो सीमाओं के बीच के अन्तर को **वर्ग-विस्तार** (class-magnitude) कहते हैं। दिए हुए उदाहरण में प्रत्येक वर्ग का वर्ग-विस्तार १′ है। प्रत्येक वर्ग के अन्तर्गत आने वाले पदों की संख्या को **वर्ग-वारंवारता** (class-frequency) कहते हैं।

वर्गान्तरानुसार वर्गीकरण करने की रीति निम्नलिखित है:—

सर्वप्रथम सामग्री के लिए वर्ग विस्तार निश्चित कर लिया जाता है। अर्थात् यह निश्चित कर लिया जाता है कि प्रत्येक वर्गान्तर की **अपर-सीमा** (upper limit) और **अधर सीमा** (lower limit) का अन्तर कितना रखा जायगा। इस बात का प्रयत्न करना चाहिए कि प्रत्येक वर्ग का वर्ग-विस्तार बराबर रहे। भले ही किसी वर्ग की वर्ग-वारंवारता शून्य हो अर्थात् उस वर्ग के अन्तर्गत कोई पद न आए, तब भी उस वर्ग को रखना चाहिए। पर अगर वर्ग-विस्तार अलग-अलग रखने में अधिक सुविधा हो तो ऐसा किया जा सकता है। इसका सबसे बड़ा लाभ यह है कि विभिन्न वर्गों की परस्पर-तुलना की जा सकती है। प्राय: वर्ग-विस्तार इकाई रखा जाता है। पर अगर ऐसा न किया जा सके तो वर्ग-विस्तार निश्चित करने में दो बातों का विशेष ध्यान रखना चाहिए। पहली यह कि वर्गीकरण इस प्रकार का हो जिसमें किसी एक वर्ग के अन्तर्गत आनेवाले पदों के मूल्यों को बिना गण्य विभ्रम के इस प्रकार माना जा सके जैसे वे वर्गान्तर के **मध्य-मूल** (mid value) में स्थित हों। और दूसरी यह कि वर्गीकरण के लाभ सुविधा और संक्षिप्तता से मिल सकें। इसके लिए वर्ग-विस्तार जितना बड़ा होगा उतनी अधिक सुविधा होगी, पर यह स्वेच्छित रूप से बड़ा नहीं किया जा सकता। पहली बात का ध्यान रखते हुए जितने कम वर्गान्तर

हों उतनी अधिक संक्षिप्तता प्राप्त होगी । साधारणतः १५ से २५ के बीच वर्गों की संख्या लेने पर ये शर्तें पूरी हो जाती हैं । अतएव दी हुई सामग्री के अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों के अन्तर को १५ से २५ के बीच जितने वर्ग बनाने हों उनकी संख्या से विभाजित करके वर्ग-विस्तार का अनुमान लगाया जा सकता है । वास्तविक वर्ग-विस्तार इनके आस-पास का कोई पूर्णांक (integer) या सरल भिन्न होगी ।

जैसा पहले कहा जा चुका है, वर्ग-विस्तार निश्चित करने में इस बात का प्रयत्न किया जाता है कि एक वर्ग के अन्तर्गत आने वाले पदों के मूल्यों को वर्ग के मध्य-मूल्य के द्वारा प्रस्तुत किया जा सके । इसको वर्गान्तरों का मूल-बिन्दु (origin) भी कहा जाता है । इसके मूल्य का स्वयं में कोई विशेष महत्व नहीं है, पर सुविधा के लिए यह इस प्रकार का चुना जा सकता है जिससे या तो वर्ग-सीमाएँ पूर्णांक हो जाएँ या वर्ग का मध्य-मूल्य पूर्णांक हो जाय ।

यह निश्चित कर लेने के बाद वर्गीकरण किया जाता है । वर्गीकरण में एक कोने में वर्ग-सीमाएँ लिख ली जाती हैं और इसके बाद उस वर्ग के अन्तर्गत आने वाले प्रत्येक पद के मूल्य के लिए एक खड़ी लकीर खींच दी जाती है । इस प्रकार की चार खड़ी लकीरों के बाद आने वाले पाँचवें पद के मूल्य को, इन खड़ी लकीरों को एक तिरछी लकीर से काटकर दिखाया जाता है । इससे गणना करने में आसानी होती है । कभी-कभी यह निश्चित करने में कि एक विशेष मूल्य किस वर्ग के अन्तर्गत आएगा, कुछ कठिनाई होती है । जैसे अगर वर्गान्तर २·५-३·५ और ३·५-४·५ माना जाय तो ३·५ मूल्य वाले पद को किस वर्ग के अन्तर्गत रखा जायगा ? इस कठिनाई को दूर करने की एक रीति यह है कि वर्गान्तर की अपर सीमा को उस वर्ग के अन्तर्गत आने वाला मूल्य न माना जाय बल्कि उसके बाद आने वाले वर्ग में गिना जाय । जैसे उपर्युक्त उदाहरण में ३·५ मूल्य वाला पद २·५–३·५ वाले वर्गान्तर में नहीं रक्खा जायगा बल्कि उसके बाद आने वाले, अर्थात् ३·५–४·५ वाले वर्ग में रखा जायगा । इस रीति को अपवर्जी (exclusive) रीति कहते हैं । इसके विपरीत दूसरी रीति में, जिसे समावेशी (inclusive) रीति कहते हैं, वर्गान्तर की अपर सीमा वाले मूल्य भी उसी वर्ग में आते हैं । पर इस रीति का उपयोग प्रायः नहीं किया जाता क्योंकि इससे श्रेणी में संततता (continuity) नहीं रह पाती । निम्नलिखित उदाहरण से ये बातें स्पष्ट हो जायेंगी ।

मान लीजिए १०० वस्तुओं के दामों में निम्नलिखित प्रतिशत परिवर्तन हुए ।

७.२	१०.२	१०.६	११.०	१०.३	९.७	१०.७	१०.१	८.९	९.३
९.१	९.८	११.९	९.३	८.३	१२.०	११.२	९.८	११.७	१०.७
८.०	१०.६	८.५	१२.७	८.७	८.७	९.२	१२.०	१०.८	७.७
९.०	१०.९	१३.३	१०.२	१०.४	८.७	११.१	९.९	१०.२	१२.२

१०.६ ९.६ १०.५ ९.० ७.९ १०.४ १०.० ९.८ ९.५ १०.९
९.४ ९.४ ७.९ ११.७ १४.२ ८.५ ६.७ १०.४ ८.८ १०.७
११.५ १०.९ १०.३ ९.८ ९.४ ९.१ १०.९ ७.६ ११.२ ७.५
१०.० १०.२ ८.५ १०.८ १०.४ १०.७ ९.२ १०.२ १०.२ ८.३
१०.७ १०.० ११.८ १०.० ८.८ १०.१ ११.६ १०.३ ८.२ ८.५
११.१ १०.० ९.८ १०.६ ५.७ ८.८ १२.१ ९.८ ९.४ १०.२

इनका वर्गान्तरानुसार वर्गीकरण करने के लिए पहले वर्ग-विस्तार निश्चित करना पड़ेगा। सबसे अधिक परिवर्तन १४·२% है और सबसे कम परिवर्तन ५७%। इनका अन्तर १४·२—५·७=८·५ हुआ। अगर वर्ग-विस्तार १ माना जाय तो ९ वर्ग बनेंगे। अब वर्ग-सीमाएँ निश्चित करनी हैं। अगर मध्य-मूल्य पूर्णांक बनाना है तो ये सीमाएँ क्रमशः ५·५–६·५, ६·५-७५,...१३·५–१४·५ होंगी। अब प्रत्येक वर्ग के लिए बारंबारता निकाली जा सकती है। यहाँ अपवर्जी रीति का उपयोग किया गया है। इस सामग्री का वर्गीकृत रूप निम्नलिखित हुआ:—

वर्ग सीमाएँ (class-limits)	मध्य-मूल्य (mid-value)	बारंबारता (frequency)
५.५—६.५	६	१
६·५—७·५	७	२
७.५—८.५	८	९
८.५—९.५	९	२२
९.५–१०.५	१०	३३
१०.५–११.५	११	२२
११.५–१२.५	१२	८
१२.५–१३.५	१३	२
१३.५–१४.५	१४	१

सारणीयन (Tabulation)

वर्गीकरण करने के पश्चात् सामग्री का सारणीयन (tabulation) किया जाता है। इसका उद्देश्य यह है कि सामग्री को सुविधाजनक, संक्षिप्त और समझने योग्य दशा में रखा जाय जिससे अनुसंधान के बारे में सूचना मिल सके या निर्वचन (interpretation) आसानी से किया जा सके। बाउले (Bowley) के अनुसार सारणीयन 'किसी भी रूप में उपलब्ध संचित सामग्री और सांख्यिकी द्वारा निकाले गये अन्तिम तर्क-संगत परिणामों के बीच की क्रिया है।' सारणीयन का कार्य आसान नहीं है। सामग्री को सारणी के रूप में रखने के लिए कुछ सावधानियाँ (precaution) बरतनी पड़ती हैं।

सारणीयन के नियम (Rules of tabulation)

सारणी परिशुद्ध (accurate) और स्पष्ट होनी चाहिए। अगर स्पष्ट नहीं हुई तो सारणीयन का उद्देश्य प्राप्त नहीं होगा। ऐसा नहीं होना चाहिए कि सारणी को समझने के लिए अन्य स्थलों में दी गई व्याख्याओं को या पाद-टिप्पणियां ((foot-notes) को पढ़ने की आवश्यकता पड़े। अगर सामग्री बहुत बड़ी राशि में हो तो उसे एक साथ प्रस्तुत करने का प्रयास नहीं करना चाहिये। इससे भ्रान्ति बढ़ सकती है और उसका अध्ययन असुविधाजनक भी हो सकता है। ऐसी सामग्री को यथोचित आकार की सारणियों के रूप में रखा जा सकता है और इस तरह सामग्री को सुविधाजनक रूप में समझा जा सकता है। अर्थात् सारणी इस प्रकार की हो कि सामग्री बोधगम्य हो सके। पर इसका अर्थ यह नहीं है कि एक ही प्रकार की सामग्री विभिन्न सारणियों में दी जाय। प्रत्येक सारणी को स्वयं में पूर्ण होना चाहिये। एक निश्चित उद्देश्य की पूर्ति एक सारणी द्वारा हो जानी चाहिये। सारणी कागज के आकार के अनुकूल होनी चाहिये। इसलिए प्रत्येक कॉलम और पंक्ति की चौड़ाई पहले से ही निश्चित कर लेनी चाहिये। एक वर्ग के अन्तर्गत आने वाली सामग्री को दूसरे वर्ग के अन्तर्गत आनेवाली सामग्री से स्पष्टतया अलग करने के लिए इनके बीच की रेखा अधिक मोटी खींचनी चाहिये। उपवर्गों में विभाजित करनेवाली रेखाएँ अपेक्षाकृत कम मोटी होंगी। वैसे कितने वर्ग और उपवर्ग बनेंगे यह सामग्री पर निर्भर रहेगा। इस बात का प्रयास करना चाहिये कि शीर्षकों (heading) की संख्या कम रहे—भले ही उपशीर्षकों (sub-headings) की संख्या बढ़ जाए। इससे अपेक्षाकृत अधिक मुख्य बातें समझने में आसानी होगी। शीर्षक और उप-शीर्षक इस प्रकार के होने चाहिये कि वे स्वयं स्पष्ट हो जायँ; उनकी अन्यत्र व्याख्या करने की आवश्यकता नहीं पड़नी चाहिये। वे कॉलम जिनके अन्तर्गत आई सामग्री की तुलना करनी हो साथ-साथ रखने चाहिये। इसी प्रकार प्रतिशतों, औसतों या योगों को भी साथ-साथ रखना चाहिये। अगर किसी सारणी में प्रतिशत और अंक साथ-साथ देने हैं तो अलग-अलग प्रकार के अक्षरों का उपयोग करना चाहिए। जहाँ तक हो सके उपसादन (approximation) का उपयोग करके सामग्री को पूर्णांकों के रूप में रखने का प्रयत्न करना चाहिए। इस प्रकार अनावश्यकीय विस्तार (details) कम किये जा सकते हैं। प्रत्येक कॉलम में शीर्षक के नीचे उसके अन्तर्गत आने वाली सामग्री की इकाई लिख देनी चाहिये जिससे यह सरलतापूर्वक जाना जा सके कि वे अंक क्या बता रहे हैं। सारणी में लिखे जाने से पूर्व प्रत्येक अंक को जांच लेना चाहिये और यह निश्चित कर लेना चाहिये कि वह ठीक स्थान पर लिखा जा रहा है। प्रत्येक सारणी के साथ पाद-टिप्पणी में विशिष्टता वाले अंकों के बारे में लिख देना चाहिये। और अंत में सामग्री के संग्रहण की रीति, उनके प्राप्तिस्थान, उनके द्वारा निकाले गये परिणाम और इन

परिणामों की परिसीमाएँ लिख देनी चाहिये। साथ ही साथ सम्भावित विभ्रम भी बता दिया जाना चाहिये।

विभिन्न प्रकार के सारणीयन (Different Types of Tabulations)

विभिन्न प्रकार की सारणियाँ इस आधार पर बनाई जाती हैं कि वे कितने गुणों के बारे में सूचना देती हैं। इस प्रकार एक-गुण सारणीयन (single-tabulation) में विभिन्न पदों के विषय में एक गुण की सूचना दी जाती है। इस गुण के बारे में अगर विभिन्न प्रश्न पूछे जायँ तो इस सारणी द्वारा इनका उत्तर दिया जा सकता है। उदाहरण के लिए निम्नलिखित सारणी में व्यक्तियों की लम्बाइयाँ और इनकी बारंबारता दी गई है। यह एक-गुण सारणीयन का नमूना है:—

७५ व्यक्तियों की लम्बाइयाँ

व्यक्तियों की लम्बाइयाँ (इंचों में)	बारंबारता
३५–४०	६
४०–४५	१३
४५–५०	१५
५०–५५	२३
५५–६०	१८
कुल व्यक्तियों की संख्या	७५

इस सारणी से यह सूचना मिलती है कि ७५ व्यक्तियों के समूह में विभिन्न लम्बाइयों के वर्गों के अन्तर्गत कितने व्यक्ति आते हैं। अगर यह जानना चाहा जाय कि ४०-४५ इंच लम्बाई वाले कितने व्यक्ति हैं तो इसका उत्तर इस सारणी से दिया जा सकता है। ऐसे व्यक्ति १३ हैं। इसके साथ-साथ यह सारणी यह भी बताती है कि अधिकतम व्यक्ति ५०-५५ इंच लम्बे हैं और न्यूनतम व्यक्ति ३५-४० इंच लम्बे हैं। यहाँ इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि प्रत्येक प्रश्न, जिसका उत्तर इस सारणी द्वारा दिया जा सकता है, एक दूसरे से स्वतन्त्र है।

पर अगर एक ही पद के बारे में दो प्रश्न पूछे जायँ तो इससे काम नहीं चलेगा। ऐसी दशा में **द्विगुण-सारणीयन** (double-tabulation) किया जाता है। द्विगुण सारणीयन के द्वारा एक ही पद के बारे में दो प्रश्नों का उत्तर जाना जा सकता है। निम्नलिखित सारणी, जिसमें सांख्यिकी, गणित और अर्थशास्त्र के प्राप्तांक दिखाये गये हैं, इसका नमूना है :

५० विद्यार्थियों के कुछ विषयों में प्राप्तांक

प्राप्तांक	दिए हुए अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या		
	गणित में	सांख्यिकी में	अर्थशास्त्र में
२०—३०	२	१	४
३०—४०	७	४	९
४०—५०	१६	१७	२०
५०—६०	२०	१८	१५
६०—७०	३	७	२
७०—८०	२	३	—
कुल विद्यार्थियों की संख्या	५०	५०	५०

इस सारणी से यह सूचना प्राप्त हो सकती है कि किसी विषय में एक वर्ग के अन्तर्गत दिये गये प्राप्तांक जिन विद्यार्थियों को मिले हैं, उनकी संख्या कितनी है। इस प्रकार यह दो प्रश्नों के उत्तर देती है। एक तो विषय के बारे में और दूसरा प्राप्तांकों के बारे में। ये प्रश्न परस्पर-निर्भर हैं, इसलिए यह सारणी द्विगुण-सारणीयन के अनुसार निर्मित है।

त्रिगुण सारणीयन उन दशाओं में किया जाता है जहाँ एक ही सारणी द्वारा तीन परस्पर-आश्रित प्रश्नों के उत्तर देने होते हैं। जैसे निम्नलिखित सारणी द्वारा मलेरिया और चेचक से विभिन्न राज्यों में होनेवाली वयस्कों और बच्चों की मृत्यु का ब्योरा दिया जा सकता है। इस सारणी से तीन प्रश्नों के उत्तर मिल सकते हैं। पहला यह कि विभिन्न राज्यों में कितने व्यक्ति मलेरिया या चेचक से मरते हैं, दूसरा यह कि इनमें कितने वयस्क हैं और कितने बच्चे; और तीसरा यह कि पूरे भारत में कितने लोग मलेरिया या चेचक से मरते हैं। क्योंकि यह तीन परस्पराश्रित प्रश्नों के उत्तर देती है, इसलिए इसे त्रिगुण सारणी कहा जायगा।

राज्य	मलेरिया			चेचक			योग		
	वयस्क	वच्चे	कुल	वयस्क	वच्चे	कुल	वयस्क	वच्चे	कुल
आसाम									
मद्रास									
उत्तर प्रदेश									
पंजाव									
उड़ीसा									
विहार									
वम्वई									
मध्य प्रदेश									
बंगाल									
अन्य राज्य									
पूरे भारत के लिए									

जव एक ही सारणी द्वारा तीन से अविक प्रश्नों के उत्तर दिये जा सकते हैं तो उसकी रचना वहुगुण-सारणीयन (manifold tabulation) के अनुसार की गई होती है। निम्नलिखित सारणी में वहुगुण सारणीयन का नमूना है :

राज्य	धर्म	जाति	आयु	पुरुष			स्त्री			कुल		
				शिक्षित	अशिक्षित	कुल	शिक्षित	अशिक्षित	कुल	शिक्षित	अशिक्षित	कुल
उत्तर प्रदेश	हिन्दू	ब्राह्मण	०–२५									
			२५–५०									
			५०–७५									
			७५ से अधिक									
			योग									
		राजपूत	०–२५									
			२५–५०									
			५०–७५									
			७५ से अधिक									
			योग									
		कायस्थ	०–२५									
			२५–५०									
			५०–७५									
			७५ से अधिक									
			योग									
		अन्य	०–२५									
			२५–५०									
			५०–७५									
			७५ से अधिक									
			योग									
			योग (सब हिन्दू)									
	मुसलमान		०–२५									
			२५–५०									
			५०–७५									
			७५ से अधिक									

इस सारणी को कितना ही वड़ा वनाया जा सकता है। जैसा इसको देखकर ज्ञात होगा, इससे कई प्रश्नों के उत्तर मिल सकते हैं। किसी राज्य में शिक्षितों की क्या संख्या है? किसी धर्म में क्या संख्या है? किसी जाति में क्या संख्या है? स्त्री और पुरुषों में क्या संख्या है? आदि। व्यवहार में प्रायः इसी प्रकार की सारणियाँ देखने में आया करती हैं।

सारणीयन का विभाजन दूसरी प्रकार से भी किया जा सकता है। इसके अनुसार **सरल वर्गीकरण** (simple tabulation) में केवल एक गुण के विषय में वताया जाता है और **जटिल, सारणीयन** (complex tabulation) में एक से अधिक गुणों के वारे में वताया जाता है। उदाहरण में दी गई पहली सारणी सरल सारणीयन का नमूना है और अन्य सारणियाँ जटिल सारणीयन का।

प्रश्न

(१) वर्गीकरण और सारणीयन का अन्तर स्पष्ट कीजिए।

(२) आप किस प्रकार किये गये निरीक्षणों का वर्गीकरण शुरू करेंगे और सारणीयन में किन बातों पर विचार करेंगे? साधारणतया उपयोग में आने वाली सारणियों को बताइये। (बी० कॉम०, आगरा १९४६)

(३) वर्गान्तरानुसार वर्गीकरण किस प्रकार किया जाता है? निम्नलिखित सामग्री का वर्गीकरण १, २ और ३ इकाई का वर्ग-विस्तार लेकर कीजिए:—

३४.५, ३५.५, ३४.५, ३७.५, ३४.५, ३७.५, ३४, ३६, ४५, ४२, ३४, ३३.५, ४५.५, ४५.५, ३७, २०, ५१, ४६, ४४, ४५, २९, २७, २८, २४.५, ६३.५, ४७.१, २१.५, ३३.५, ३.२, ३२, ४१, ४.१, २३, ३१, ४१, २३, २१, ३९, २३, ३३, ४१.५, ४१, ३३, ३७.५, ३४.५, ४०, ३४.५।

(४) सारणीयन में आप क्या सावधानियाँ वरतेंगे? एक निरंक सारणी की रचना करिये जिससे उत्तर प्रदेश के सात महत्वपूर्ण शहरों में जनसंख्या का विवरण यौन और चार धर्मों के अनुसार ५ आयु-वर्गों में दिखाया जा सके। (बी० कॉम०, आगरा, १९३७)

(५) निम्नलिखित सूचना व्यक्त करने के लिए एक उचित शीर्षक, विभाग और उप-विभाग वाली सारणी की रचना कीजिए:

(१) भारत से सूती कपड़ा निर्यात।
(२) वर्मा, चीन, जावा, ईरान और ईराक के लिए।
(३) प्रत्येक देश के लिए भेजे गये कपड़े की राशि।
(४) प्रत्येक देश के लिए भेजे गये कपड़े का मूल्य।
(५) १९३९-४० से १९४५-४६ तक का प्रत्येक वर्ष।

(६) प्रति वर्ष किया गया निर्यात।

(७) प्रति वर्ष निर्यात का मूल्य।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४६)

(६) निम्नलिखित सारणी का पुनर्विन्यास कीजिए ताकि वह अधिक सुबोध हो जाय :

	ब्राह्मण		राजपूत		कायस्थ		हरिजन	
यौन	शिक्षित	अशिक्षित	शिक्षित	अशिक्षित	शिक्षित	अशिक्षित	शिक्षित	अशिक्षित
पुरुष								
स्त्री								

(बी० कॉम०, इलाहाबाद,)

(७) एकगुण, द्विगुण, त्रिगुण और बहुगुण सारणीयन में क्या अन्तर है ? नमूना देकर प्रत्येक को स्पष्ट करिये।

(८) निम्नलिखित पर टिप्पणियां लिखिए :—

(क) गुणानुसार वर्गीकरण।

(ख) वर्गान्तर की अपर और अवर सीमाएँ।

(ग) वर्गान्तर का विस्तार।

(घ) जटिल सारणीयन।

(च) वर्ग वारंवारता।

(९) निम्नलिखित कथन को सारणी के रूप में रखिए। शीर्षकों और ऐसे कॉलमों को भी दीजिए जिनमें योगों का प्रतिशत दिया जा सके।

"१९२० में एक देश में तांबा और पीतल ५.८ लाख रुपये का, कोयला ५.७ लाख रुपये का, लोहा आदि ६.५ लाख रुपये का, सोना और चांदी १.९ लाख रुपये का, अल्यूमीनियम ४.६ लाख रुपये का और अन्य पदार्थ ०.५ लाख रुपये के निकाले गये। १९२१ में ये क्रमशः ६.९ लाख, ६.६ लाख, ९.८ लाख, १.० लाख, ४.४ लाख और ०.६ लाख रुपय के निकाले गये थे।"

अध्याय ७

सांख्यिकीय माध्य

(Statistical Averages)

सामग्री-संग्रहण (collection of data) का उद्देश्य किसी विषय के बारे में जानकारी प्राप्त करना होता है, पर संग्रहीत सामग्री की राशि अधिक होने के कारण उसे समझ सकना बहुत कठिन हो जाता है । दूसरे, हम यह भी जानना चाहते हैं कि विभिन्न संग्रहीत सामग्रियों (collected data) में क्या अन्तर है । हम उनकी तुलना करना चाहते हैं । इसके लिए इतनी अधिक राशि में प्रस्तुत सामग्री का उपयोग सम्भव नहीं है । अगर कोई ऐसी संख्या हो जो इस समूह (group) या श्रेणी का प्रतिनिधित्व कर सके तो इस कठिनाई से बचा जा सकता है । सांख्यिकी में ऐसी संख्याओं को दिये हुए समूह का माध्य (average) कहते हैं । किसी समूह का माध्य उस समूह के पदों की स्थिति के बारे में एक निश्चित जानकारी देता है । यह वह संख्या है जिसके आसपास किसी चल (variable), (जिसके विभिन्न मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने वाली संख्या की गणना करनी है) के विभिन्न मूल्य अधिकांशतः एकत्रित होते हैं ।

अच्छे माध्य के गुण

यदि माध्य किसी समूह का प्रतिनिधित्व करता है तो यह आवश्यक है कि उसमें निम्नलिखित गुण पाये जायें:—

(१) वह एक निश्चित संख्या हो, अर्थात् उस समूह के लिए उसका मान व्यक्ति-निरपेक्ष हो ।

(२) उसकी गणना करते समय समूह का कोई पद नहीं छूटना चाहिए, अन्यथा वह पूरे समूह का सही अर्थ में प्रतिनिधित्व नहीं है ।

(३) उसका व्यवहार बीज गणितीय रीतियों में आसानी से किया जा सके । यदि उसमें यह गुण नहीं है तो उसका उपयोग सीमित होगा ।

(४) उसकी गणना करना सुविधाजनक होना चाहिए, और

(५) वह ऐसी संख्या होनी चाहिए जो आकस्मिक परिवर्तनों से अपेक्षाकृत कम प्रभावित हो ।

माध्य के बारे में एक बात और जाननी आवश्यक है, वह यह कि वे पद (items) जिनका माध्य निकालना है, एक ही परिवार के हों। किसी व्यक्ति की आय और आयु का माध्य नहीं निकाला जा सकता। किसी समूह के माध्य की इकाई (unit) उसके पदों की इकाई होती है। जैसे इंचों में नापी गई लम्बाइयों का माध्य इंचों में, फुटों में नापी गई का फुटों में होगा। इसी प्रकार अगर किसी की दैनिक आय रुपयों में दी गई है तो उसका माध्य पौंड या डालरों में नहीं हो सकता।

सांख्यिकी में निम्नलिखित माध्यों का उपयोग किया जाता है:—

(१) भूयिष्ठक (mode)
(२) मध्यका (median)
(३) समानान्तर माध्य या मध्यक (arithmetic average or mean)
(४) गुणोत्तर माध्य या मध्यक (geometric average or mean)
(५) हरात्मक माध्य या मध्यक (harmonic average or mean)

उपरोक्त माध्यों में अंतिम तीन माध्य (३,४ और ५) गणितीय माध्य हैं। समानान्तर माध्य या मध्यक को कभी-कभी केवल माध्य या मध्यक भी कहा जाता है।

इन पाँचों में प्रथम दो माध्य यानी भूयिष्ठक और मध्यक को स्थिति सम्बन्धी माध्य (averages of position) कहा जाता है, इन्हें वर्णात्मिक माध्य (descriptive averages) भी कहा जाता है। यह पाँचों माध्य एकघातीयमाध्य (averages of the first order) है। एकघातीय माध्य वह माध्य होते हैं जिन्हें प्राथमिक समंकों के आधार पर निकाला जाता है, इसी प्रकार द्विघातीय माध्य (averages of the second order) वे माध्य है जिन्हें निकालने में प्राथमिक समंकों के स्थान पर इन समंकों से व्युत्पन्न समंकों का प्रयोग किया जाता है। वे अपकिरण (dispersion) के विभिन्न माध्य द्विघातीय माध्य होते हैं क्योंकि उनके अपकिरण निकालने में एकघातीय माध्य तथा उनसे विभिन्न पदों के विचलन का उपयोग किया जाता है।

इन माध्यों के अतिरिक्त कुछ और माध्य भी हैं जिनका प्रयोग अपेक्षाकृत कम होता है, यह माध्य निम्नलिखित हैं :—

(१) वर्गकरणी माध्य (quadratic average)
(२) चल माध्य (moving average)
(३) प्रगामी माध्य (progressive average)
(४) संग्रथित माध्य (composite average)

इन माध्यों में पहला यानी वर्गकरणीय माध्य द्विघातीय माध्य है। दूसरे, तीसरे और चौथे माध्यों का उपयोग विशेषकर व्यापार सम्बन्धी विवेचना में होता है। अतः इन्हें व्यापारिक माध्य (business averages) भी कहा जाता है।

भूयिष्ठक (Mode)

भूयिष्ठक चल का वह मूल्य है जो दिये हुए समूहों में अधिकतम बार आता है या वह मूल्य जिसके आसपास चल के मूल्य सबसे अधिक संख्या में एकत्रित रहते हैं। अतः जब यह कहा जाता है कि किसी समूह के सदस्यों की आयों का भूयिष्ठ-मूल्य (modal value) ७० रु० प्रतिमास है तो यह समझा जाता है कि उस समूह के अधिकतम सदस्यों की आय ७० रु० प्रतिमास है। वैसे इस समूह में कुछ की आय २० या २५ रु० प्रतिमास और कुछ सदस्यों की ५०० रु० या इससे अधिक प्रतिमास भी हो सकती है।

भूयिष्ठक (mode) की परिभाषा से ऐसा प्रतीत होता है कि इसका निर्वारण सबसे आसान होगा, क्योंकि किसी वारंवारता-सारणी (frequency table) में सबसे अधिक वारंवारता वाले पद का मूल्य भूयिष्ठ-मूल्य (modal value) होगा। यह तभी सम्भव हो सकता है जब वारंवारता-सारणी (frequency table) में अनियमितता (irregularity) न हो पर वास्तव में इसी प्रकार की वारंवारता-सारणियाँ प्राप्त होती हैं। इनके लिए भूयिष्ठक (mode) का निर्वारण करने की विधि को वर्गण-विधि (grouping method) कहते हैं।

वर्गण विधि (grouping method) में पहले समूह के पदों को क्रमानुसार रख लिया जाता है और उनके सम्मुख उनकी वारंवारताएँ लिख ली जाती है, अब तीसरे और चौथे कॉलम में, दूसरे कॉलम में दी गई वारंवारताओं को दो-दो करके जोड़े गये योगों को लिखा जाता है क्योंकि ऐसा दो प्रकार से किया जा सकता है। पहले और दूसरे, तीसरे और चौथे आदि पदों को जोड़कर और दूसरे और तीसरे, चौथे और पाँचवें आदि पदों को जोड़कर। फिर इन वारंवारताओं को ३–३ करके जोड़ा जाता है। ऐसा तीन प्रकार से किया जा सकता है, (१) पहले, दूसरे और तीसरे, चौथे, पाँचवें और छठे आदि पदों को जोड़कर (२) दूसरे, तीसरे और चौथे, पाँचवें, छठे और सातवें आदि पदों को जोड़ कर और (३) तीसरे, चौथे और पाँचवें, छठे, सातवें और आठवें आदि पदों को जोड़कर। यदि आवश्यकता पड़े तो वारंवारताओं को चार-चार करके या पाँच-पाँच करके भी जोड़ा जा सकता है। इसके बाद प्रत्येक कॉलम में अधिकतम वारंवारता वाले पद को अंकित (mark) कर लिया जाता है। यह रीति निम्नलिखित उदाहरण में स्पष्ट की गई है :—

खण्डित श्रेणी का भूयिष्ठक निकालना :

उदाहरण १ : दी हुई श्रेणी का भूयिष्ठक निकालिये।

चल का मूल्य (size of item)	वारंवारता (frequency) (१)	(२)	(३)	(४)	(५)	(६)
१	४	९		२१		
२	५		१७		३१	
३	१२	२६				४५
४	१४		३३	५७		
५	१९	४३			६५	
६	२४		४६			६६
७	२२	४५		६४		
८	२३		४२		६४	
९	१९	४१				५७
१०	२२		३८	५२		
११	१६	३०			४५	
१२	१४		२९			३६
१३	१५	२२				
१४	७					

इस सारणी में पहले कॉलम के अनुसार भूयिष्ठक छठा पद प्रतीत होता है, पर तीसरे कॉलम के अनुसार छठे या सातवें में कोई भी हो सकता है और पाँचवें कॉलम के अनुसार ५वें, छठे और ७वें में कोई हो सकता है। इस प्रकार प्रत्येक कॉलम में भूयिष्ठक अलग-अलग आता है। प्रत्येक पद कितनी बार भूयिष्ठक वाले समूह में आया, यह बात निम्नलिखित सारणी के रूप में दिखाई जा सकती है:

विश्लेषण-सारिणी (analysis-table)

कॉलम	अधिकतम वारंवारता वाले चलों का मूल्य (size of item containing max. frequency)				
१		६			
२			७	८	
३		६	७		
४			७	८	९
५	५	६	७		
६		६	७	८	
पदों की संख्या	१	४	५	३	१

इस सारिणी से यह ज्ञात हो जाता है कि ७वाँ पद जिसका मूल्य भी ७ है सबसे अधिक वार अधिकतम वारंवारता वाले वर्गों (group) में आता है । अतएव इस समूह का भूयिष्ठक (mode) ७ हुआ । पहली सारिणी से ऐसा प्रतीत होता है कि भूयिष्ठक (mode) ६ठा पद है, जिसका मूल्य ६ है, पर ६ को इस समूह का भूयिष्ठक नहीं माना जा सकता क्योंकि भूयिष्ठ-मूल्य (modal value) को उसके आसपास के पदों की वारंवारता और उनके मूल्य भी प्रभावित करते हैं । केवल इसलिए कि एक पद की वारंवारता एक समूह में अधिकतम है, वह भूयिष्ठ-पद नहीं हो जाता ।

संतत श्रेणी का भूयिष्ठक निकालना

उपरोक्त उदाहरण में श्रेणी खंडित (discrete) थी । यदि श्रेणी संतत (continuous) हो तो भूयिष्ठ-पद किसी वर्ग के अन्तर्गत होगा । यदि वर्गान्तर सब वर्गों के लिए एक-सा हो तो वर्ग के वीच में भूयिष्ठ का मूल्य निकालने के लिए निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है :—

$$\text{भूयिष्ठक} = \text{भू} = \text{सी}_१ + \left\{ \frac{\text{व}_१ - \text{व}_०}{२\text{व}_१ - \text{व}_० - \text{व}_२} (\text{सी}_२ - \text{सी}_१) \right\}$$

जहाँ, $\text{सी}_१$ भूयिष्ठक वर्ग की अधर सीमा है ।

$\text{सी}_२$ भूयिष्ठक वर्ग की अपर सीमा है ।

$\text{व}_०$ भूयिष्ठक से पूर्व वर्ग की वारंवारता है ।

$\text{व}_१$ भूयिष्ठक वर्ग की वारंवारता है ।

$\text{व}_२$ भूयिष्ठक से बाद वाले वर्ग की वारंवारता है ।

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} (l_2 - l_1)$$

where, Z stands for mode,

l_1 and l_2 stand for the lower and upper limits of the modal group.

f_1 stands for frequencies in the modal group.

f_0 stands for frequencies in the group preceding the modal group.

f_2 stands for frequencies in the group succeeding the modal group.

कभी-कभी इस सूत्र के बदले निम्नलिखित का उपयोग किया जाता है :—

$$\text{भू} = \text{सी}_१ + \left\{ \frac{\text{व}_२}{\text{व}_२ + \text{व}_०} (\text{सी}_२ - \text{सी}_१) \right\}$$

$$Z = l_1 + \left\{ \frac{f_2}{f_2 + f_0} (l_2 - l_1) \right\}$$

इन सूत्रों का उपयोग निम्न उदाहरण में समझाया गया है :—

उदाहरण २

निम्न श्रेणी का भूयिष्ठक निर्धारित करिये :—

पद का आकार	४-८	८-१२	१२-१६	१६-२०	२०-२४	२४-२८	२८-३२	३२-३६	३६-४०
वारंवारता	१०	१२	१६	१४	१०	८	१७	५	४

भूयिष्ठक निकालना

पद का आकार (size of item)	वारंवारता (frequency)) (१)	(२)	(३)	(४)	(५)	(६)
४–८	१०					
८–१२	१२	२२		३८		
१२–१६	१६		२८		४२	
१६–२०	१४	३०				
२०–२४	१०		२४	३२		४०
२४–२८	८	१८			३५	
२८–३२	१७		२५			
३२–३६	५	२२		२६		३०
३६–४०	४		९			

विश्लेषण-सारणी (analysis-table)

कॉलम	अधिकतम वारंवारता वाले वर्ग					
१						२८–३२
२			१२–१६	१६–२०		
३		८–१२	१२–१६			
४	४–८	८–१२	१२–१६			
५		८–१२	१२–१६	१६–२०		
६			१२–१६	१६–२०	२०–२४	
पदों की सख्या	१	३	५	२ ३	१	१

इस सारणी के अनुसार अधिकतम वारंवारता वाला वर्ग १२–१६ है। अतएव भूयिष्ठक इसी वर्ग में होगा। भूयिष्ठक का ठीक-ठीक स्थान निर्धारण के लिए पिछले पृष्ठ में दिये गये सूत्र का उपयोग किया जायगा।

$$\text{भू} = \text{सी}_1 + \left\{ \frac{\text{व}_1 - \text{व}_0}{2\text{व}_1 - \text{व}_0 - \text{व}_2} (\text{सी}_2 - \text{सी}_1) \right\}$$

$$= १२ + \left\{ \frac{१६-१२}{३२-१२-१४} (१६-१२) \right\}$$

$$= १२ + \frac{८}{३}$$

$$= १४{\cdot}७ \text{ (लगभग)}$$

$$Z = l_1 + \left\{ \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} (l_2 - l_1) \right\}$$

$$= 12 + \left\{ \frac{16-12}{32-12-14} (16-12) \right\}$$

$$= 12 + \frac{8}{3}$$

$$= 14{\cdot}7 \text{ (approx)}$$

भूयिष्ठक निकालने की यह विधि बहुत संतोषजनक नहीं है। वास्तव में भूयिष्ठक का निर्धारण करना सरल नहीं है। हम ऐसे पद को चाहते हैं जिसकी वारंवारता अधिकतम हो। इसके लिए सबसे संतोषप्रद विधि वक्र अन्वायोजन (curve fitting) की है। वर्गण की जिस रीति का वर्णन किया गया है वह वास्तव में व्यतिक्रमों (irregularities) को कम से कम करने के लिए है। व्यवहार में जो वारंवारता वंटन (frequency distributions) प्राप्त होते हैं उनमें दो भूयिष्ठक भी हो सकते हैं। ऐसी दशाओं में अद्वितीय (unique) भूयिष्ठक प्राप्त करने का प्रयास बेकार है। ऐसे वारंवारता वंटन द्विभूयिष्ठक (bi-modal) कहलाते हैं। इसी प्रकार यदि किसी वारंवारता वंटन में तीन पदों की वारंवारता समान है और यही संख्या सबसे बड़ी है तो इस वंटन में तीन भूयिष्ठक होंगे और ऐसी माला को त्रिभूयिष्ठक (tri-modal) कहा जायगा। इसी प्रकार बहु-भूयिष्ठक माला (multi-modal series) भी हो सकती है।

भूयिष्ठक के लाभ और उसकी कमियाँ

लाभ—भूयिष्ठक बड़ी आसानी से समझा जा सकता है। वास्तव में साधारण बोलचाल में माध्य से भूयिष्ठक ही समझा जाता है। **इसके मूल्य पर असामान्य (extreme) पदों का प्रभाव नहीं पड़ता।** अगर यह मालूम हो कि पहले और अन्त के पदों की वारंवारताएँ अपेक्षाकृत कम हैं तो इसके निर्धारण के लिए, मध्यका की भाँति, उनको

ठीक-ठीक जानना आवश्यक नहीं है। केवल बीच के पद जानने से ही भूयिष्ठक का मूल्य ज्ञात हो सकता है। यह निश्चित रूप से यह बताता है कि किस पद को किसी समूह में प्रायः पाया जायगा। अगर श्रेणी सक्रम (regular) और संमित (symmetrical) हो तो इसके निर्धारण के लिए गणना नहीं करनी पड़ती। केवल निरीक्षण करके इसका मूल्य जाना जा सकता है।

कमियाँ—भूयिष्ठक व्यवहार में प्रायः कोई निश्चित जानकारी नहीं देता क्योंकि सक्रम (regular) समूह या श्रेणियाँ अधिकांशतः नहीं मिलतीं। अतएव कई दशाओं में यह अनुपयोगी है। प्रायः इसका स्थान-निर्धारण नहीं किया जा सकता विशेषतः उन बंटनों में जिनमें व्यतिक्रम हों। सामग्री को क्रमानुसार रखना और पदों का वर्गण करना कई स्थानों में सुविधाजनक नहीं होता। चूँकि इसका निर्धारण केवल बारंबारताओं पर निर्भर है अतएव कुछ दशाओं में यह समूह का प्रतिनिधि नहीं माना जा सकता। मान लीजिये किसी समूह में २० व्यक्ति हैं, जिनमें ३ व्यक्तियों की आय ५० रु है। शेष १७ व्यक्तियों की आय २०० रु० से अधिक है पर किसी की भी एक दूसरे के बराबर नहीं है। इस स्थिति में भूयिष्ठक ५० हुआ, पर यह समूह का सही प्रतिनिधित्व नहीं करता। इसका व्यवहार गणितीय विधियों में नहीं किया जा सकता। भूयिष्ठक का निर्धारण पूर्ण रूप से संतोषजनक रूप में करना अत्यधिक कठिन है।

मध्यका (MEDIAN)

मध्यका किसी समूह या श्रेणी के उस पद का मूल्य है जो इस समूह या श्रेणी के पदों को आरोही या अवरोही क्रमों (ascending or descending order) में रखने पर बीच का पद होता है। यह मध्य पद श्रेणी को दो ऐसे बराबर भागों में विभाजित करता है जिनमें से एक भाग के पदों का मूल्य मध्य पद के मूल्य से कम तथा दूसरे भाग का मूल्य मध्य पद के मूल्य से अधिक होता है। मान लीजिए किसी कक्षा में २१ विद्यार्थी हैं और यदि उन्हें उनकी ऊँचाई के आधार पर एक पंक्ति में खड़ा किया जाय तो ११वाँ विद्यार्थी बिल्कुल बीच में होगा। उसके दोनों ओर दस-दस विद्यार्थी के दो समूह होंगे जिनमें से एक समूह की ऊँचाई उसकी अपनी ऊँचाई से कम तथा दूसरे समूह की ऊँचाई उसकी ऊँचाई से अधिक होगी। इस ११वें विद्यार्थी की ऊँचाई इस समूह का मध्यका होगा।

उपरोक्त कथन को गणितीय रूप से इस प्रकार कहा जा सकता है:—

मा $=\frac{\text{स}+१}{२}$ वें पद का मूल्य	$M=\text{Size}\left(\frac{n+1}{2}\right)$th item
जब, मा = मध्यका स = श्रेणी के कुल पदों की संख्या	where, M=Median n=number of items.

उदाहरण ३

निम्नलिखित संख्याओं का मध्यका निकालिए:—

७, ३, ६, ५, ८, ११, १

इस समूह को आरोही क्रम (ascending order) में निम्न रूप से रखा जायगा :—

क्रम संख्या	पदों का मूल्य
१	१
२	३
३	५
४	६
५	७
६	८
७	११

ऊपर लिखे सूत्र के अनुसार,

$$\text{मा} = \left(\frac{\text{स}+१}{२}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$
$$= \left(\frac{७+१}{२}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$
$$= \text{चौथे पद का मूल्य}$$
$$= ६ ।$$

$$M = \text{size of } \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{th item}$$
$$= \text{size of } \left(\frac{7+1}{2}\right) \text{th or}$$
$$= \text{size of 4th item}$$
$$= 6.$$

इसलिए इस समूह का मध्यका ६ हुआ ।

उदाहरण ४

एक व्यक्ति की २१ सप्ताह की आय निम्नांकित है—उसकी मध्यका आय निकालिए ।

आय (रुपयों में) : ४०, ५१, ४७, ६०, ५३, ४२, ४८, ५९, ५४, ६३, ४५, ४३, ५७, ५०, ६१, ४६, ६७, ६४, ५६, ३९, ५५ ।

२१ सप्ताह की आय आरोही क्रम में

क्रम संख्या	पदों का मूल्य (साप्ताहिक आय)	क्रम संख्या	पदों का मूल्य (साप्ताहिक आय)
१	३९	१२	५४
२	४०	१३	५५
३	४२	१४	५६
४	४३	१५	५७
५	४५	१६	५९
६	४६	१७	६०
७	४७	१८	६१
८	४८	१९	६३
९	५०	२०	६४
१०	५१	२१	६७
११	५३		

मा$=\left(\frac{स+१}{२}\right)$ वें पद का मूल्य

$=\left(\frac{२१+१}{२}\right)$ या ११वें पद का मूल्य

$=$५३ रुपया ।

$M=$Size of $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$

$=$size of $\frac{21+1}{2}$, 11th item

$=$Rs. 53

उपरोक्त उदाहरणों में पदों की संख्या अयुग्म (odd) थी । इसलिए मध्य पद पाने में कोई कठिनाई नहीं हुई । परन्तु यदि पदों की संख्या युग्म (even) हो तो समूह का कोई भी पद मध्य पद नहीं होगा वल्कि मध्य में दो पद होंगे । अतः मध्यका मूल्य इन दो पदों के बीच में कहीं भी हो सकता है। व्यवहार में इन दो पदों के मध्य मूल्य को पूरे समूह का मध्यका माना जाता है।

साधारण श्रेणी का मध्यका निकालना

उदाहरण ५

६ व्यक्तियों की लम्बाइयां ६०", ६२", ६५", ६१", ६६" और ६४" हैं। इनकी मध्यका लम्बाई कितनी होगी ?

हल

६ व्यक्तियों की लम्बाइयाँ आरोही क्रम में

क्रम संख्या	पदों का मूल्य (लम्बाई)
१	६०
२	६१
३	६२
४	६४
५	६५
६	६६

$$\text{मा} = \left(\frac{\text{स}+१}{२}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$= \left(\frac{६+१}{२}\right) \text{ वें या ३·५ वें पद का मूल्य}$$

$$= \frac{\text{३ रे पद का मूल्य} + \text{४ थे पद का मूल्य}}{२}$$

$$= \frac{६२'' + ६४''}{२}$$

$$= ६३''$$

$$M = \text{Size of } \left(\frac{n+1}{2}\right)\text{th item}$$

$$= \text{,, ,, } \left(\frac{6+1}{2}\right)\text{th or 3.5th item}$$

$$= \frac{\text{,, ,, 3rd item} + \text{Size or 4th item}}{2}$$

$$= \frac{62'' + 64''}{2}$$

$$= 63''$$

वर्गित समूह या श्रेणी का मध्यका

किसी समूह या श्रेणी को दो प्रकार से वर्गित किया जा सकता है या तो पदों का मूल्य निश्चित हो और उसकी वारंवारता लिख ली जाय या पदों को वर्गीकृत रूप में रखा जाय और उनकी वारंवारता लिख ली जाय पहले प्रकार की श्रेणी को खंडित श्रेणी (discrete series) तथा दूसरे प्रकार की श्रेणी को संतत श्रेणी (continuous series) कहा जाता है।

खंडित श्रेणी का मध्यका निकालना

Discrete series :-

इस प्रकार की श्रेणी में मध्यका मूल्य उस वर्ग का मूल्य है जिसमें मध्य पद होता है। इसकी गणना करने के लिए पदों को आरोही या अवरोही क्रमों के अनुसार रखा जाता है। फिर प्रत्येक पद के मूल्य की संचयी वारंवारता (cumulative frequency) निकाल ली जाती है। मध्यका का मूल्य $\frac{(\text{कुल वारंवारता}+१)}{२}$ वें पद के मूल्य के बराबर होता है।

उदाहरण ६

निम्नलिखित समूह को वर्गित रूप में लिखिये और उसका मध्यका निकालिए:—

३, ७, ६, ३, ५, ९, ४, ६, ५, ९, ८, ४, ५, ७, ५, ६, ८, ४, ७, ६।

हल

संचयी वारंवारता सारिणी

चल का मूल्य (size of item)	वारंवारता (frequency)	संचयी वारंवारता (cumulative frequency)
३	२	२
४	३	५
५	४	९
६	४	१३
७	३	१६
८	२	१८
९	२	२०

मा $= \left(\frac{\text{स}+१}{२}\right)$ वें पद का मूल्य

$= \left(\frac{२०+१}{२}\right)$ वें या १०·५वें पद का मूल्य

$=$ ६

$M =$ Size of $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ th item

$=$,, ,, $\left(\frac{20+1}{2}\right)$ th or 10·5 th item

$=6$

उपर्युक्त सारिणी में १०·५वाँ पद ९वें और १३वें पद के बीच में है और ९वें से १३वें पदों का मूल्य ६ है। इसलिए इस समूह का मध्यका ६ है।

संतत श्रेणी का मध्यका निकालना

यदि पदों के मूल्य वर्गीकृत किये गये हों और हमें एक संतत श्रेणी का मध्यका निकालना हो तो एक विशेष कठिनाई का सामना करना पड़ता है। मध्य पद का मूल्य किसी एक वर्ग में होता है और मध्यका का मूल्य मालूम करने के लिए अन्तरगणना (interpolation) करनी होती है। अगले पृष्ठ के उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी :—

उदाहरण ७

निम्नलिखित सारणी से मध्यका निकालिए।

चल का मूल्य (size of item)	वारंवारता (frequency)
१०—२०	४२
२०—३०	२५
३०—४०	५८
४०—५०	४०

हल

संचयी वारंवारता सारणी

चल का मूल्य	वारंवारता	संचयी वारंवारता
१०—२०	४२	४२
२०—३०	२५	६७
३०—४०	५८	१२५
४०—५०	४०	१६५

$$\text{मा} = \left(\frac{\text{स}+१}{२}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$= \left(\frac{१६५+१}{२}\right) \text{ वें या ८३वें पद का मूल्य}$$

$$M = \text{Size of } \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th} \text{ item or}$$

$$= \text{,, ,, } \left(\frac{165+1}{२}\right)^{th} \text{ or}$$

83rd item

८३वें पद का मूल्य ३०—४० वर्ग में किसी भी स्थान पर हो सकता है। इस वर्ग का वर्गान्तर १० है और इस वर्ग की वारंवारता ५८ है। अब हम यह मानकर आगे चल सकते हैं कि यह वर्गान्तर इस वर्ग की वारंवारता पर समान रूप से वंटित है। इस कल्पना के अनुसार ८३वें पद का मूल्य बरावर है $३० + \frac{१०}{५८}$ (८३—६७) या ३२.७६।

उपरोक्त कथन को गणितीय रूप से इस प्रकार लिखा जा सकता है:—

$$\text{मा} = \text{सी}_1 + \left\{ \frac{\text{सी}_2 - \text{सी}_1}{\text{व}} (\text{मि} - \text{वी}) \right\}$$

जब, सी$_1$ = मध्य वर्ग की अधर सीमा
सी$_2$ = " " " अपर सीमा
व = " " " वारंवारता
वी = " " से पूर्व-वर्ग की संचयी वारंवारता
मि = मध्य-पद

$$\text{मा} = ३० + \left\{ \frac{४० - ३०}{५८} (८३ - ६७) \right\}$$

$= ३२.७६$

$$M = l_1 + \left\{ \frac{l_2 - l_1}{f} (m - c) \right\}$$

where, l_1 = lower limit of the median group.
l_2 = upper limit of median group.
f = frequency of the median group.
c = cumulative frequency of the preceding group.
m = middle item.

$$M = 30 + \left\{ \frac{40 - 30}{58} (83 - 67) \right\}$$

$= 32.76$

मध्यका के लाभ और उसकी कमियाँ

लाभ—जैसा बताया जा चुका है मध्यका किसी श्रेणी या समूह को क्रम में रखने के बाद उनका मध्य-पद है। अगर यह मध्य-पद केवल क्रम में रखने से ही ज्ञात हो जाता है तो मध्यका समूह का ही एक पद होता है। इसका निर्धारण करना सरल है और समझना आसान, केवल क्रम में रखने पर और मध्य-पद निकालने पर इसका मूल्य ज्ञात हो सकता है। अगर वर्गित (grouped) सामग्री है तो इसका मूल्य निकालने के लिए अन्तर्गणन का सूत्र मात्र जानना पड़ता है अगर मध्यका दिया हो तो बड़ी आसानी से यह समझ में आ जाता है कि समूह का यह मध्य-पद है। इसका मूल्य मध्य-पद का मूल्य होता है, इसलिए इसके मूल्य में अन्य पदों के मूल्यों का प्रभाव नहीं पड़ता। यह उन स्थितियों में विशेष रूप से उपयोगी है जहाँ असामान्य मूल्यों के प्रभाव के कारण पिछले परिच्छेद में दिये गये माध्यों को समूह या श्रेणी का प्रतिनिधि नहीं माना जा सकता। जैसे माना एक समूह २, ४, ७, ९, १२ है इनका मध्यका ७ है। अब जब तक इस श्रेणी में ५ पद रहें तब तक यदि १२ के स्थान पर १०० भी पद का मूल्य हो तो भी मध्यका वही ७ रहेगा। इसका निर्धारण करने के लिए समूह के सब पदों का ज्ञान होना आवश्यकीय नहीं है। केवल इतना भर मालूम होना चाहिए कि मध्य पद का क्या मूल्य है। मध्यका का उपयोग उन गुणों का माध्य निकालने के लिए होता है जिन्हें गणितीय रीति से नहीं निकाला जा सकता पर जिन्हें क्रमानुसार रखा जा सकता है। अतएव जहाँ अन्य सब माध्यों का उपयोग नहीं हो सकता वहाँ इसके कारण माध्य-पद जाना जा सकता है।

कमियाँ—यदि पदों की संख्या अपेक्षाकृत कम हो तो इस बात की संभावना रहती है कि मध्यका समूह का प्रतिनिधि न हो। यदि असंतत वंटन (discontinuous series) के लिए मध्यका का स्थान निर्धारण करना हो तो कई बार इसका मूल्य अनिश्चित आता है। इसी प्रकार यदि सामग्री वर्गित (grouped) हो तो इसका मूल्य स्थान-निर्धारण (location) ठीक-ठीक नहीं किया जा सकता है। कभी-कभी सामग्री को क्रमानुसार रखना कठिन हो जाता है। ऐसी स्थितियों में इसका मूल्य ज्ञात करना सम्भव नहीं हो पाता। इसका उपयोग करने के विरुद्ध सबसे बड़ी बाधा यह है कि इसका उपयोग, सिवा समूह के प्रतिनिधि-पद बताने के, अन्य गणनाओं से नहीं किया जा सकता। गणितीय विधियों में प्रयुक्त होने वाले राशियों में जिस स्थिरता और निश्चितता की आवश्यकता होती है उसका इसमें अभाव है। इसलिए और अन्य कारणों से इसका व्यवहार बीज गणितीय गणनाओं में नहीं किया जा सकता।

चतुर्थक, दशमक और शततमक
(Quartiles, Deciles & Percentiles)

मध्यका के बारे में देखा जा चुका है कि वह क्रमानुसार रक्खे गये समूह को दो बराबर भागों में बाँटता है। अर्थात् जो पद माध्य-पद (median item) होता है उससे अधिक और कम मूल्य वाले पदों की संख्या बराबर होती है। समूह के बारे में अधिक विस्तृत रूप से जानने के लिए उसे २ के बदले ४ या १० या १०० बराबर भागों में बाँटा जा सकता है। इस प्रकार क्रमशः ३, ९ और ९९ पद मिलेंगे। इन पदों को चतुर्थक (quartiles), दशमक (deciles) और शततक (percentiles) कहा जाता है।

मध्यका द्वारा कोई समूह दो बराबर भागों में बँट जाता है। अब यदि प्रथम पद से मध्यका तक के पदों को इसी प्रकार दो बराबर भागों में बाँटा जाय तो फिर एक ऐसा पद मिलेगा जिससे कम मूल्य वाले पदों की संख्या (अर्थात् इसके और प्रथम पद के बीच के पदों की संख्या) और उससे अधिक, पर मध्यका से कम मूल्य वाले पदों की संख्या बराबर होगी। इसी प्रकार एक अन्य पद मध्यका और अंतिम पद के बीच में मिलेगा। इन पदों को चतुर्थक कहा जाता है। मध्यका से कम मूल्य वाले पदों की संख्या को जो बराबर भागों में बाँटता है उसे **प्रथम चतुर्थक** कहा जाता है और जो मध्यका से अधिक मूल्य वाले पदों की संख्या को बराबर भागों में बाँटता है उसे **तृतीय चतुर्थक** कहते हैं। मध्यका को **द्वितीय चतुर्थक** भी कहा जाता है।

जैसा कि ऊपर कहा जा चुका है दशमक क्रमानुसार लगे हुए श्रेणी को दस बराबर भागों में बाँटने वाले पद के मूल्य को कहते हैं। और इसी प्रकार किसी श्रेणी को जो क्रमानुसार लगी हो १०० बराबर भागों में बाँटने वाले प्रत्येक पद के मूल्य को शततमक कहते हैं।

यह बात ध्यान रखने योग्य है कि मध्यका, चतुर्थक, दशमक तथा शततमक पद संख्याएँ नहीं बल्कि उनका मूल्य होता है। चतुर्थक, दशमक तथा शततमक की पद-संख्याएँ मालूम करने के लिए उसी सिद्धान्त का प्रयोग किया जाता है जिससे मध्यका की पद-संख्या मालूम की जाती है। सर्वप्रथम श्रेणी को क्रमानुसार लगाया जाता है, तत्पश्चात् निम्नलिखित सूत्रों के अनुसार पद-संख्या मालूम की जाती है:—

$$\text{चतु}_{१} = \left(\frac{\text{स}+१}{४}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$\text{चतु}_{3} = ३\left(\frac{\text{स}+१}{४}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$\text{दश}_{१} = \left(\frac{\text{स}+१}{१०}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$\text{दश}_{४} = ४\left(\frac{\text{स}+१}{१०}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$\text{शत}_{१} = \left(\frac{\text{स}+१}{१००}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$\text{शत}_{९०} = ९०\left(\frac{\text{स}+१}{१००}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{n+1}{4}\right)\text{th item}$$

$$Q_3 = \text{,, ,, } 3\left(\frac{n+1}{4}\right)\text{th item}$$

$$D_1 = \text{,, ,, } \left(\frac{n+1}{10}\right)\text{th item}$$

$$D_4 = \text{,, ,, } 4\left(\frac{n+1}{100}\right)\text{th item}$$

$$P_1 = \text{,, ,, } \left(\frac{n+1}{100}\right)\text{th item}$$

$$P_{90} = \text{,, ,, } 90\left(\frac{n+1}{100}\right)\text{th item}$$

जबकि; चतु$_१$, चतु$_३$, दश$_१$, दश$_४$, शत$_१$ तथा शत$_{९०}$ क्रमशः प्रथम चतुर्थक, तृतीय चतुर्थक, प्रथम दशमक, चतुर्थक दशमक, प्रथम शततमक, तथा नब्बेत्रें शततमक के लिए आया है ।

Where, Q_1, Q_3, D_1, D_4 P_1 and P_{90} respectively stand for the first quartile, third quartile, first decile, fourth decile, first percentile and nintieth percentile.

अब कुछ उदाहरणों से यह स्पष्ट किया जायगा कि साधारण श्रेणी, खंडित श्रेणी तथा संतत श्रेणी में चतुर्थक, दशमक तथा शततमकों का मूल्य किस प्रकार निकाला जाता है ।

साधारण श्रेणी

उदाहरण ८

निम्नलिखित सारणी में ३० विद्यार्थियों के प्राप्तांक आरोही (ascending) क्रमानुसार दिये गये हैं । इनका प्रथम चतुर्थक, तृतीय चतुर्थक, चौथा दशमक तथा बीसवां शततमक निकालिए ।

क्रम-संख्या	प्राप्तांक	क्रम संख्या	प्राप्तांक	क्रम संख्या	प्राप्तांक
१	१२	११	३३	२१	४७
२	१७	१२	३५	२२	४८
३	२१	१३	३७	२३	४८
४	२४	१४	३८	२४	४९
५	२६	१५	३८	२५	५०
६	२७	१६	४०	२६	५२
७	३०	१७	४२	२७	५५
८	३२	१८	४४	२८	५८
९	३३	१९	४४	२९	६२
१०	३३	२०	४५	३०	६८

हल

चतु₁ $= \left(\frac{\text{स}+१}{४}\right)$ वें या $\left(\frac{३०+१}{४}\right)$ वें पद का या ७·७५ वें पद का मूल्य

=७वें पद का मूल्य+
३/४ (८ वें पद का मूल्य−७ वें पद का मूल्य

=३०+$\frac{३}{४}$(३२−३०)

=३१.५

चतु₃ =३$\left(\frac{\text{स}+१}{४}\right)$ वें या २३·२५ वें पद का मूल्य

=२३वें पद का मूल्य+
$\frac{१}{४}$(२४वें पद का मूल्य−
२३ वें पद का मूल्य)

=४८+$\frac{१}{४}$ (४९—४८)

=४८·२५

दश₄ =४ $\left(\frac{\text{स}+१}{१०}\right)$ वें या १२·४ वें पद का मूल्य

=१२ वें पद का मूल्य+
$\frac{४}{१०}$(१३ वें पद का मूल्य
− १२ वें पद का मूल्य)

=३५+$\frac{४}{१०}$(३७−३५)

=३५·८ ।

शत₂₀= २०$\left(\frac{\text{स}+१}{१००}\right)$ वें या ६.२ रे पद का मूल्य

=६ वें पद का मूल्य+
$\frac{२}{१०}$ (७ वें पद का मूल्य−
६ वें पद का मूल्य)

=२७+$\frac{२}{१०}$(३०−२७)

=२७·६ ।

Q_1=Size of $\left(\frac{n+1}{4}\right)$th or $\left(\frac{30+1}{4}\right)$th or 7.75th item

=Size of 7th item+
$\frac{3}{4}$ (size of 8th item—
size of 7th item)

$=30+\frac{3}{4}(32-30)$

$=31.5$

Q_3=Size of $3\left(\frac{n+1}{4}\right)$th or 23.25 th item

=Size of 23rd item+
$\frac{1}{4}$(size of 24th item
—size of 23rd item)

$=48+\frac{1}{4}(49-48)$

$=48.25$

D_4 =Size of $4\left(\frac{n+1}{10}\right)$th or 12·4th item.

=Size of 12th item+
$\frac{4}{10}$ (size of 12th item
-size of 13th item)

$=35+\frac{4}{10}(37-35)$

$=35.8.$

P_{20}=Size of $20\left(\frac{n+1}{100}\right)$th or 6.2 nd item

=Size of 6th item+
$\frac{2}{10}$ (size of 7th item
—size of 6th item)

$=27+\frac{2}{10}(30-27)$

$=27.6$

खंडित श्रेणी

उदाहरण ६

निम्नलिखित सारणी से प्रथम चतुर्थक, तथा तृतीय चतुर्थक का मूल्य निकालिए ।

जूते का नाप (इन्चों में)	वारंवारता	संचयी वारंवारता
५·५	७	७
६	५	१२
६·५	१५	२७
७	३०	५७
७·५	६०	११७
८	९५	२१२
८·५	८२	२९४
९	७५	३६९
९·५	४४	४१३

हल

$च_1 = \left(\frac{४१३+१}{४}\right)$वें या १०३·५वें पद का मूल्य
$= ७·५''$

$Q_1 = \text{Size of } \left(\frac{413+1}{4}\right)^{th}$ or 103·5 th item
$= 7·5''$

$चतु_3 = ३\left(\frac{४१३+१}{४}\right)$ वें या ३१०·५ वें पद का मूल्य
९''

$Q_3 = \text{Size of}\left\{3\left(\frac{413+1}{4}\right)\right\}^{th}$ or 310·5th item
$= 9''$

इसी प्रकार दशमक तथा शततमक का मूल्य भी निकाला जा सकता है ।

संतत श्रेणी Continuous

सतंत श्रेणी चतुर्थक, दशमक तथा शततमक निकालने में वही कठिनाई होती है जो मध्यका निकालने में हुई थी । यहाँ भी हमें अंतर्गणन के सूत्र का उपयोग करना पड़ता है । यह सूत्र इस प्रकार है:—

$$चतु_1 = सी_1 + \left\{\frac{सी_2 - सी_1}{व}\left(च_{प_1} - वी\right)\right\}$$

$$चतु_3 = सी_1 + \left\{\frac{सी_2 - सी_1}{व}\left(च_{प_3} - वी\right)\right\}$$

जहाँ, $च_{प_1}$ तथा $च_{प_3}$ क्रमशः प्रथम चतुर्थक पद तथा तृतीय चतुर्थक पद के लिए है । अन्य संकेतों के अर्थ वही हैं जो मध्यका के सूत्र में थे ।

$$Q_1 = l_1 + \left\{ \frac{l_2 - l_1}{f} \left(q_1 - c \right) \right\}$$

$$Q_3 = l_1 + \left\{ \frac{l_2 - l_1}{f} \left(q_3 - c \right) \right\}$$

where, q_1 and q_3 stand for first and third quartile numbers respectively, and the other symbols stand for same things for which they stood in the formula of median. 10.5

इसी प्रकार दशमक तथा शततमक के सूत्र भी निकाले जा सकते हैं।

उदाहरण १०

निम्नलिखित सारणी से प्रथम चतुर्थक तथा तृतीय चतुर्थक निकालिए।

वेतन	पाने वालों की संख्या	संचयी बारंबारता
६—८ रुपये	४	४
८—१०	६	१०
१०—१२	१०	२०
१२—१४	१२	३२
१४—१६	६	३८
१६—१८	५	४३
१८—२०	४	४७

चतु$_1$ $=\left(\frac{४७+१}{४}\right)$ वें या १२वें पद का मूल्य

$=१०+\left\{\frac{१२—१०}{१०}\left(१२-१०\right)\right\}$

$=१०+ \cdot ४$

$=१०\cdot४$ रुपये।

चतु$_3$ $=$ ३$\left(\frac{४७+१}{४}\right)$वें या ३६वें पद का मूल्य

$=१४+\left\{\frac{१६-१४}{६}\left(३६—३२\right)\right\}$

$=१५\cdot३$ रुपये।

Q_1 = Size of $\left(\frac{47+1}{4}\right)^{th}$ or 12th item.

$=10+\left\{\frac{12-10}{10}\left(12-10\right)\right\}$

$=10\cdot4$ Rupees.

Q_3 = Size of $3\left(\frac{47+1}{4}\right)$ th or 36th item.

$=14+\left\{\frac{16-14}{6}\left(36-32\right)\right\}$

$==15.3$ Rupees.

इसी प्रकार दशमक तथा शततमक भी निकाले जा सकते हैं।

यह बात ध्यान रखनी चाहिये कि चतुर्थकों, दशमकों तथा शततमकों को वस्तुतः माध्य नहीं कहा जा सकता क्योंकि यह पूरे समूह के नहीं वल्कि उनके भागों पर निर्भर रहते हैं। ये मध्यका के दोनों ओर चल के विचलन को वताते हैं। इनका विशेप उपयोग अपकिरण (dispersion) ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

मध्यका, चतुर्थक, दशमक इत्यादि रेखा चित्रों द्वारा भी मालूम किये जा सकते हैं। इनका वर्णन रेखाचित्र वाले अध्याय में किया जायगा।

समान्तर माध्य (मध्यक)

(Arithmetic Average)

किसी समूह का समान्तर मध्यक उस समूह के पदों के मूल्यों के योग को उसके पदों की संख्या से विभाजित करके प्राप्त होता ह। यदि किसी समूह के व्यक्तियों की लम्बाइयाँ ६४", ६९", ६३", ६०", ६५", ६८", ६२", ६७", ७०", ६६" और ६१" है तो मध्यक लम्बाई ज्ञात करने के लिए पहले इनको जोड़ा जायगा। इन संख्याओं का योग ७१५" होता है। अब ७१५" को इस समूह के पदों की संख्या (जो ११ है) से विभाजित किया जायगा। विभाजित करने पर जो संख्या प्राप्त होगी वही समान्तर मध्यक कहलायेगा। इन ११ व्यक्तियों की लम्बाइयों का समान्तर मध्यक इस रीति के अनुसार $\frac{७१५}{११}$ इंच अथवा ६५ इंच हुआ।

साधारण श्रेणी का समान्तर मध्यक निकालना

जैसा कि ऊपर कहा चुका है कि समान्तर मध्यक पदों के मूल्यों के योग को पदों की संख्या से विभाजित करके प्राप्त होता है। इस रीति को गणितीय सूत्र के रूप में दिखाया जा सकता है। मान लीजिये किसी चल(variable) के विभिन्न मूल्य $य_1, य_2, य_3, य_4$ (x_1, x_2, x_3, x_4) हैं, इनका योग $य_1 + य_2 + य_3 + य_4$ $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ हुआ और इनकी पद संख्या ४ हुई। इसलिए इनका समान्तर मध्यक $\frac{य_1 + य_2 + य_3 + य_4}{४}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)$ हुआ। इस सूत्र को और अधिक सूक्ष्म रूप से निम्न प्रकार लिखा जा सकता है:—

$$म = \frac{यो_म}{स}$$

जबकि, म = समान्तर माध्य
यो$_म$ = चल के विभिन्न मूल्यों का योग
स = पद संख्या

$$a = \frac{\Sigma x}{n}$$

where, a = arithmetic average
Σx = summation of individaul values of x
n = number of items

उदाहरण ११

एक प्रयोग में दो वस्तुओं के बीच की दूरी नापी गई। वे ५७०", ५६७", ५७८", ५८५", ५७४", ५८२", ५७६", ५६८", ५७५", और ५८१" आई। इन संख्याओं का समान्तर मध्यक निकालिये।

हल

$$म = \frac{यो_य}{स}$$
$= \frac{५७५६}{१०}$ इञ्च
$=$ ५७५·६ इञ्च

$$a = \frac{\Sigma x}{n}$$
$= \frac{5756}{10}$ inches.
$= 575 \cdot 6$ inches.

लघु रीति

समान्तर मध्यक निकालने की एक रीति का वर्णन ऊपर के उदाहरण में स्पष्ट किया गया है। पर यह रीति उसी अवस्था में प्रयोग में लाई जा सकती है जब कि पदों की संख्या अधिक न हो और चल के विभिन्न मूल्य भी छोटे ही अङ्क हों क्योंकि यदि ऐसा न हुआ तो समान्तर मध्यक निकालने में काफी कठिनाई का सामना करना पड़ेगा।

इस कठिनाई को दूर करने के लिए एक सरल रीति का प्रयोग किया जाता है। इसके अनुसार दिये हुए समूह या श्रेणी के किसी एक पद को 'कल्पित माध्य' (assumed average) मान लेते हैं। कल्पित माध्य को समूह या श्रेणी के अन्य पदों से घटाया जाता है। इस प्रकार घटाने से जो संख्याएँ प्राप्त होती हैं उन्हें 'चल का कल्पित माध्य से विचलन' (deviations of the variable from the assumed mean) कहा जाता है। इन विचलनों को इनकी वारंवारताओं (जो विभिन्न पदों की वारंवारताएँ है) से गुणा किया जाता है और गुणनफलों के योग को वारंवारताओं के योग से विभाजित करके जो संख्या आती है उसे कल्पित माध्य में जोड़ देने से समूह का समान्तर मध्यक ज्ञात हो जाता है। समूह के किस पद को कल्पित माध्य चुना जाय इसके लिए कोई नियम नहीं।

ऊपर हल किये हुए उदाहरण ११ को इस रीति के अनुसार निम्न प्रकार हल किया जा सकता है:—

वस्तुओं के बीच की दूरी (इंचों में)	कल्पित माध्य (५७६) से विचलन (च$_{य}$) dx
५७०	—६
५६७	—९
५७८	+२
५८५	+९
५७४	—२
५८२	+६
५७६	०
५६८	—८
५७५	—१
५८१	+५
स=१०	यो$_{चय}$=—४″ Σdx

म=य+$\frac{\text{यो}_{\text{चय}}}{\text{स}}$

जबकि, य=कल्पित माध्य
यो$_{चय}$=कल्पित माध्य से विचलनों का योग

स=पद-संख्या
उपरोक्त सारणी में

म=५७६+$\frac{-४}{१०}$इंच
=५७५·६ इञ्च

$$a=x+\frac{\Sigma dx}{n}$$

where, x=assumed average
Σdx=summation of the deviation from assumed average.
n=number of items
In the above table

a= 576+$\frac{-4}{10}$inches
=575·6 inches

खंडित श्रेणी का समान्तर मध्यक निकालना

खंडित श्रेणी में चल के विभिन्न मूल्यों को उनकी बारंबारता (frequency)

से गुणा करके जो गुणनफल प्राप्त होते हैं उन्हें जोड़ लिया जाता है । इस योग को वारंवारताओं के योग से (जो कि पद-संख्या के बराबर होते हैं) विभाजित करके जो संख्या मिलती है वही इस समूह का समान्तर मध्यक होता है ।

खंडित श्रेणी में भी लघु रीति का प्रयोग किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरण से दोनों रीतियाँ स्पष्ट हो जायेंगी ।

उदाहरण १२

निम्न सारिणी से समान्तर मध्यक निकालिए । ऋजु रीति (direct method) तथा लघु रीति (short method) दोनों का प्रयोग स्पष्ट कीजिये ।

चल का मूल्य (size of item)	४	५	८	२	१०	३	७	९	६	१
वारंवारता (frequency)	१	४	३	२	५	३	६	२	३	१

हल

ऋजु रीति (direct method) तथा
लघु रीति (short method) से

चल का मूल्य (size of item) य (*m*)	वारंवारता (frequency) व (*f*)	चल का मूल्य × वारंवारता वय (*mf*)	कल्पित माध्य (६) से विचलन (deviation from assumed av. (6) चय (*dx*)	कुल विचलन total deviation वचय (*fdx*)
४	१	४	—२	—२
५	४	२०	—१	—४
८	३	२४	+२	+६
२	२	४	—४	—८
१०	५	५०	+४	+२०
३	३	९	—३	—९
७	६	४२	+१	+६
९	२	१८	+३	+६
६	३	१८	०	०
१	१	१	—५	—५
	स=३० (n)	यो वय=१९० (Σmf)		यो वचय=+१० (Σfdx)

ऋजु रीति

$$म = \frac{यो_{वय}}{स}$$

$$= \frac{१९०}{३०}$$

$$= ६.३३$$

लघु रीति

$$म = य + \frac{यो_{वचय}}{स}$$

$$= ६ + \frac{+१०}{३०}$$

$$= ६\cdot३३$$

Direct Method

$$a = \frac{\Sigma mf}{n}$$

$$= \frac{190}{30}$$

$$= 6.33$$

Short-cut Method

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{n}$$

$$= 6 + \frac{+10}{30}$$

$$= 6\cdot33$$

संतत श्रेणी का समान्तर मध्यक निकालना

संतत श्रेणी का समान्तर मध्यक निकालने की रीति लगभग वही है जिससे खंडित श्रेणी का समान्तर मध्यक निकाला जाता है। संतत श्रेणी का समान्तर मध्यक निकालते समय विभिन्न वर्गान्तिरों का मध्य मूल्य मालूम कर लिया जाता है और जब वर्गान्तिरों का स्थान मध्य मूल्य ले लेते हैं तब संतत श्रेणी और खंडित श्रेणी में कोई अन्तर नहीं रह जाता। निम्नलिखित उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण १३

किसी परीक्षा में २४० विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नलिखित सारणी में दिये गये हैं। इनका समान्तर मध्यक ऋजु रीति (direct method) तथा लघु रीति ((short method) दोनों से निकालिए।

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
०—१०	२५
१०—२०	१५
२०—३०	२०
३०—४०	१५
४०—५०	२०
५०—६०	३०
६०—७०	६५
७०—८०	५०

समान्तर मध्यक निकालना

हल

प्राप्तांक	मध्य मूल्य (mid-value) य (m)	वारंवारता (frequency) व (f)	मध्य मूल्य × वारंवारता वय (mf)	कल्पित माध्य (४५) से विचलन {deviation from as. av. (45)} च य (dx)	कुल विचलन (total deviation) वचय (fdx)
०—१०	५	२५	१२५	—४०	—१०००
१०—२०	१५	१५	२२५	—३०	— ४५०
२०—३०	२५	२०	५००	—२०	— ४००
३०—४०	३५	१५	५२५	—१०	— १५०
४०—५०	४५	२०	९००	०	०
५०—६०	५५	३०	१६५०	+१०	+ ३००
६०—७०	६५	६५	४२२५	+२०	+१३००
७०—८०	७५	५०	३७५०	+३०	+१५००
		स(n)=२४०	$यो_{वय}$=११९०० (Σmf)		$यो_{वचय}$=+११०० (Σfdx)

ऋजु रीति

$$म = \frac{यो_{वय}}{स}$$

$$= \frac{११९००}{२४०}$$

$$= ४९.५८$$

लघु रीति

$$म = य + \frac{यो_{वचय}}{स}$$

$$= ४५ + \frac{+११००}{२४०}$$

$$= ४९.५८$$

Direct Method

$$a = \frac{\Sigma mf}{n}$$

$$= \frac{11900}{240}$$

$$= 49.58$$

Short-cut Method

$$a = x + \frac{\Sigma fdx}{n}$$

$$= 45 + \frac{+1100}{240}$$

$$= 49.58$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि ऋजु रीति और लघु रीति दोनों ही हमें किसी प्रश्न का एक ही उत्तर देती हैं। संतत श्रेणी में लघु रीति को और भी अधिक लघु बनाया जा सकता है। ऊपर दिये हुए उदाहरण में कल्पित माध्य से लिये हुए विचलन क्रमश: —४०, —३०, —२०, —१०, ०, +१०, +२० तथा +३० हैं। इन्हें यदि वर्गान्तर के विस्तार से विभाजित कर दिया जाय तो यह संख्याएँ क्रमश: —४, —३, –२, –१, ०, +१, +२ तथा +३ रह जायँगी। ऐसा करने से कुल विचलन निकालने में आसानी पड़ती है। समान्तर मध्यक निकालते समय, यदि इस रीति का प्रयोग किया गया है तो जिस सूत्र को हम अब तक प्रयोग में लाये हैं उसमें कुछ अन्तर करना पड़ेगा। उस नये सूत्र का रूप निम्नलिखित होगा:—

$$म = य + \left(\frac{यो_{\overline{वचय}}}{स} \times त\right)$$

जबकि $यो_{\overline{वचय}}$ = कल्पित माध्य से विचलन ÷ वर्गान्तर का विस्तार × वारंवारता, का योग

त = वर्गान्तर का विस्तार

$$a = x + \left(\frac{\Sigma fdx}{n} \times c\right)$$

where, Σfdx stands for deviations from the assumed average ÷ magnitude of the class interval × frequency, totalled together

c = magnitude of class interval

उपरोक्त उदाहरण में यदि कल्पित माध्य से विचलनों—का मूल्य क्रमश:—४, —३, —२, —१, ०, +१, +२ तथा +३ माना जाय तो विचलन और वारंवारताओं

के गुणनफल का योग ११०० न होकर केवल ११० होगा। अब यदि इस नये सूत्र का प्रयोग किया जाय तो समान्तर मध्यक निम्नलिखित रूप से निकलेगा:—

$$म = य + \left(\frac{\text{यो}\ वचय}{स} \times त \right) \qquad a = x + \left(\frac{\Sigma fdx}{n} \times c \right)$$

$$= ४५ + \left(\tfrac{११०}{२४०} \times १० \right) \qquad = 45 + \left(\tfrac{110}{240} \times 10 \right)$$

$$= ४९·५८ \qquad = 49·58$$

इस रीति के उपयोग से समान्तर मध्यक निकालने का कार्य काफी सरल हो जाता है और आगे चलकर जब विचलन तथा सह-सम्बन्ध इत्यादि की विवेचना करनी पड़ती है तब भी इससे समय की बहुत बचत होती है।

चारलियर चेक (Charlier's Check)—समान्तर मध्यक निकालने में बहुधा विचलन निकालते समय या उसे वारंवारता से गुणा करते समय गलती हो जाती है, इसकी जाँच करने के लिए चारलियर की बताई हुई रीति का प्रयोग होता है। इसके अनुसार कल्पित माध्य से लिये गये विचलनों में १ जोड दिया जाता है और फिर उन्हें वारंवारता से गुणा कर उनका योग मालूम कर लिया जाता है। इस योग और पहले लिये गये योग का अन्तर वारंवारता के योग के बराबर होना चाहिये। यदि ऐसा है तब यह इस बात का प्रमाण है कि गणना सही है अन्यथा उसमें कोई अशुद्धि है। ऊपर दिये गये उदाहरण नं० १३ को लेकर यही बात नीचे दर्शाई गई है।

प्राप्तांक	वारंवारता व (f)	कल्पित माध्य ४५ से विचलन चय (dx)	चय + १ ($dx+1$)	वचय (fdx)	व (चय + १) $f(dx+1)$
०—१०	२५	—४	—३	—१००	—७५
१०—२०	१५	—३	—२	— ४५	—३०
२०—३०	२०	—२	—१	— ४०	—२०
३०—४०	१५	—१	०	— १५	०
४०—५०	२०	०	+१	०	+२०
५०—६०	३०	+१	+२	+३०	+६०
६०—७०	६५	+२	+३	+१३०	+१९५
७०—८०	५०	+३	+४	+१५०	+२००
	स (n) = २४०			यो वचय = ११० Σfdx	यो व (चय + १) = ३५० $\Sigma f(dx+1)$

चारलियर चेक के अनुसार यदि गणना सही है तो

$यो_{वचय}$=यो व (चय+१)−स	$\Sigma fdx=\Sigma\{f(dx+1)\}-n$
११०=३५०−२४०=११०	$110=350-240=110$

अब यह सिद्ध हो गया कि उपरोक्त गणना में किसी प्रकार की अशुद्धि नहीं है।

समान्तर मध्यक के लाभ और उसकी कमियाँ

समान्तर मध्यक अन्य सब माध्यों से अधिक प्रचलित माध्य है। जीवन के सभी क्षेत्रों में इसका उपयोग होता है। इसका कारण यह है कि **इसे समझने में कठिनाई नहीं होती।** यदि यह कहा जाय कि एक व्यक्ति की एक सप्ताह की आय का माध्य ११ रु० है तो इसे समझने में कोई विशेष प्रयत्न नहीं करना पड़ता। दो बातें स्वतः स्पष्ट हो जाती हैं। पहली यह कि वह प्रतिदिन ११ रु० के आसपास कमाता है और दूसरी यह कि उसकी पूरे सप्ताह की आय ७×११ रु० = ७७ रु० है। **इसकी निश्चितता भी इसके अधिक प्रचलन का कारण है।** एक समूह का समान्तर मध्यक एक और केवल एक ही संख्या हो सकती है, भले ही उसके पदों को किसी भाँति रखा जाय या किसी भी रीति से किसी भी व्यक्ति द्वारा इसकी गणना की जाय। यदि २, ४, ७, ९, ८, को ९,७,८,२,४, करके व्यक्त किया जाय तो समान्तर मध्यक वही $\frac{३०}{५}$=६ होगा। **इसकी गणना करना अपेक्षाकृत सरल है।** क्योंकि **इसकी गणना करने में किसी समूह या श्रेणी के सब पदों पर विचार करना पड़ता है,** इसलिए इस पर उन सब पदों के मूल्यों का प्रभाव पड़ता है और इसे हम इस कारण समूह या श्रेणी का प्रतिनिधि कह सकते हैं। **इसे निकालने के लिए चल के प्रत्येक मूल्य को जानना आवश्यकीय नहीं है।** चल के मूल्यों के योग और उनकी संख्या को जानकर ही इसका मान निकाला जा सकता है। **यह एक ऐसी संख्या है जिसका व्यवहार अन्य बीजगणितीय गणनाओं में किया जा सकता है।**

समान्तर मध्यक के उपयोग में सावधानी बरतनी चाहिये क्योंकि **कई दशाएँ ऐसी हो सकती हैं जिनमें यह समूह या श्रेणी का प्रतिनिधित्व नहीं करता है।** जैसा कहा जा चुका है, इसकी गणना करने में समूह या श्रेणी के प्रत्येक पद का उपयोग किया जाता है। इसलिए **चल के किसी असामान्य मूल्य का इसके मूल्य में प्रभाव पड़ सकता है।** जैसे यदि किसी दूकानदार की आय १००० रु० प्रतिमास है और उस दुकान में कार्य करने वाले तीन अन्य व्यक्तियों की आय क्रमशः २५ रु०, ३५ रु० और ४० रु० प्रतिमास है तो इन सब को माध्य आय $\frac{१०००+२५+३५+४०}{४}$ रु० प्रतिमास = २७५ रु० प्रतिमास हुई। यह आय अन्य आयों का किसी भी विचार से प्रतिनिधित्व नहीं करती। वास्तव में ऐसी दशाओं में समान्तर मध्यक को प्रतिनिधि मानना उसका दुरुपयोग करना है। यह एक

ऐसी संख्या हो सकती है जो समूह या श्रेणी के किसी पद के बराबर न हो। इसी कारण कुछ दशाओं में यह असम्भव परिणाम देती है। जैसे, एक समूह में प्रति परिवार बच्चों की संख्या निकालनी है जो निम्न सारणी में दिखाया गया है :—

बच्चों की संख्या	१	२	३	४	५
परिवारों की संख्या	४	७	११	१३	५

यदि प्रति परिवार बच्चों की माध्य संख्या ज्ञात की जाय तो वह $\frac{१२८}{४०}$ = ३.२ बच्चे प्रति परिवार आएगी। यह एक बेतुका परिणाम है। इसकी गणना करने में प्रत्येक पद का मूल्य ठीक-ठीक ज्ञात होना चाहिए। पर कभी-कभी ऐसा नहीं होता। केवल यह मालूम रहता है कि कौन पद किससे बड़ा है—पदों का मूल्य मालूम नहीं रहता। यहाँ समान्तर मध्यक का उपयोग नहीं किया जा सकता। माध्यों का एक उपयोग संग्रहीत सामग्रियों की तुलना करने के लिए होता है। समान्तर मध्यकों की तुलना करके कई बार सामग्रियों की तुलना नहीं की जा सकती। इन दशाओं में समूह के प्रत्येक पद का मूल्य अलग-अलग ज्ञात होना चाहिए। जैसे मान लीजिये कि दो समूहों, जिनमें प्रत्येक में ४ व्यक्ति हैं, के सदस्यों की आय निम्नांकित है:-

	पहला	दूसरा	तीसरा	चौथा
समूह क के सदस्यों की आय (रुपयों में)	१,०००	१००	७५	२५
समूह ख के सदस्यों की आय (रुपयों में)	३२५	३००	२८५	२९०

इन दोनों समूहों की अलग-अलग माध्य आय $\frac{१२००}{४}$ = ३०० रु० प्रतिमास है पर केवल इतना जानकर हम यह नहीं कह सकते कि दोनों समूहों की आर्थिक सम्पन्नता बराबर है।

भारित समान्तर मध्यक (Weighted Arithmetic Average)

साधारण समान्तर मध्यक में प्रत्येक पद को चाहे वह छोटा हो या बड़ा बराबर महत्त्व दिया जाता है। परन्तु कभी-कभी दी हुई सामग्री में विभिन्न पदों को विभिन्न भार देना आवश्यक होता है। ऐसी परिस्थिति में माध्य मालूम करते समय प्रत्येक पद को पहले उसके भार से (जो कि उसके और एक निश्चित पद के महत्वों का अनुपात होता है) गुणा करते हैं और इन गुणनफलों के योग को भारों के योग से विभाजित करके जो राशि प्राप्त होती है उसे समूह का प्रतिनिधि माना जाता है। इस प्रकार से गणना किये हुए

माध्य को भारित समान्तर मध्यक कहते हैं। प्रायः भार और वारंवारता एक ही होते हैं पर भार का उपयोग विशेषतः उन स्थानों में किया जाता है जहाँ वारंवारता निश्चित रूप से ज्ञात नहीं होती बल्कि अनुमानित होती है जैसे देशनांकों (index numbers) में।

पहले जो सूत्र समान्तर मध्यक निकालने के लिये दिये जा चुके हैं उनमें वारंवारता (व) या (f) के स्थान पर भार (भ) या (w) रख देने से भारित मध्यक के लिए सूत्र ज्ञात हो जाते हैं। यदि भा० म०,($w.\ a.$) भारित समान्तर मध्यक हो, $य_१, य_२, \ldots य_स$ ($x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$) समूह या श्रेणी के विभिन्न पद हों जिनके भार क्रमशः $भ_१, भ_२ \ldots\ldots भ_स$ ($w_1, w_2 \ldots\ldots w_n$) हों तो:—

$$भा०\ म० = \frac{भ_१ य_१ + भ_२ य_२ \ldots\ldots भ_स य_स}{भ_१ + भ_२ \ldots\ldots भ_स}$$

अथवा

$$भा०\ म० = \frac{यो_{भय}}{यो_{भ}}$$

$$w.a. = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 \ldots\ldots w_n x_n}{w_1 + w_2 \ldots\ldots\ldots w_n}$$

or

$$w.a. = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

यह सूत्र निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो जायेंगे।

उदाहरण १४

अगर १५ पौंड चाय २ रु० ५० नये पैसे प्रति पौंड, १० पौंड चाय ३ रु० प्रति पौंड और ५ पौंड चाय ३ रु० ५० नये पैसे प्रति पौंड के भाव से खरीदी जाय तो भारित माध्य दाम कितना हुआ?

हल :

चाय का मूल्य प्रति पौंड (नये पैसों में) य (x)	खरीदी चाय की मात्रा (भार) भ (w)	य×भ ($x \times w$)
२५०	१५	३७५०
३००	१०	३०००
३५०	५	१७५०
	यो$_{भ}$ =३० (Σw)	यो$_{भ य}$ (Σwx)=८५००

$$\text{मा० म०} = \frac{\text{यो}_{भय}}{\text{यो}_{भ}} \qquad w.a. = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

$$= \frac{८५००}{३०} \text{ न० पै०} \qquad = \frac{8500}{30} np.$$

=२ रु० ८३ न० पै० प्रति पौंड =Rs. 2. 83 *np*.

इस उदाहरण में भार निश्चित थे पर कभी-कभी अनुसन्धान की सुविधा न होने या अन्य कारणों से ठीक सूचना नहीं मिल पाती। यहाँ अनुमानित ((estimated) भारों का प्रयोग किया जाता है। ये भार पूर्णरूपेण सही नहीं होते हैं। अगर वे लगभग ठीक हों और पदों की संख्या अधिक हो तो कुछ पदों के लिए विभ्रम ऋणात्मक (negative) होगा और कुछ में धनात्मक (positive)। ये धनात्मक और ऋणात्मक विभ्रम एक दूसरे का विलोपन (cancellation) कर देंगे।

यदि प्रत्येक पद का महत्व दूसरे से भिन्न है तो भारित माध्य लेना आवश्यकीय है अन्यथा परिणाम गलत होंगे। निम्नलिखित उदाहरण से बात स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण १५

एक छात्रवृत्ति देने के लिए परीक्षा ली गई जिसमें विभिन्न विषयों के भार अलग-अलग थे। तीन प्रतियोगियों के प्राप्तांक निम्न सारणी में दिये गये हैं :

विषय	भार	क के प्राप्तांक %	ख के प्राप्तांक %	ग के प्राप्तांक %
सांख्यिकी	४	६३	६०	६५
गणित	३	६५	६४	७०
अर्थशास्त्र	२	५८	५६	६३
हिन्दी	१	७०	८०	५२

अगर अधिकतम माध्य अंक पाने वाले छात्र को छात्रवृत्ति दी जाय तो वह किसे दी जानी चाहिए ?

हल

विषय	भार भ (w)	क के प्राप्तांक य (x)	ख के प्राप्तांक र (y)	ग के प्राप्तांक ल (z)	य × भ ($x \times w$)	र × भ ($y \times w$)	ल × भ ($z \times w$)
सांख्यिकी	४	६३	६०	६५	२५२	२४०	२६०
गणित	३	६५	६४	७०	१९५	१९२	२१०
अर्थशास्त्र	२	५८	५६	६३	११६	११२	१२६
हिन्दी	१	७०	८०	५२	७०	८०	५२
	यो$_{भ}$ = १० (Σw)	यो$_{य}$ = २५६ (Σx)	यो$_{र}$ = २६० (Σy)	यो$_{ल}$ = ५० (Σz)	यो$_{भय}$ = ६३३ (Σwx)	यो$_{भर}$ = ६२४ (Σwy)	यो$_{भल}$ = ६४८ (Σwz)

माध्य क ख ग के साधारण प्राप्तांक $= \text{क्रमशः } \frac{२५६}{४}, \frac{२६०}{४}$ तथा $\frac{२५०}{४}$ या = क्रमशः ६४, ६५ तथा ६२·५

Simple arithmetic average of the marks of x, y and $z = \frac{256}{4}, \frac{260}{4}$, and $\frac{250}{4}$ or 64, 65 and 62·5 respectively.

क, ख, ग के प्राप्तांकों का भारित माध्य

$$= \frac{\text{यो}_{\text{भय}}}{\text{यो}_{\text{भ}}}, \frac{\text{यो}_{\text{भर}}}{\text{यो}_{\text{भ}}}, \frac{\text{यो}_{\text{भल}}}{\text{यो}_{\text{भ}}}$$

$$= \frac{६३३}{१०}, \frac{६२४}{१०}, \frac{६४८}{१०}$$

$$= ६३·३, ६२·४, ६४·८$$

Weighted arithmetic average of the marks of x, y and z

$$= \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}, \frac{\Sigma wy}{\Sigma w}, \frac{\Sigma wz}{\Sigma w}$$

$$= \frac{633}{10}, \frac{624}{10}, \frac{648}{10}$$

= 63·3 62·4 and 64·8 respectively

इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि साधारण माध्य प्राप्तांक के अनुसार छात्रवृत्ति दी जाय तो छात्रवृत्ति ख को मिलनी चाहिए लेकिन यदि छात्रवृत्ति प्राप्तांकों के भारित माध्य के अनुसार दी जाय तो छात्रवृत्ति ख को नहीं बल्कि ग को मिलनी चाहिए। और यही इस समस्या का सही उत्तर है।

भारित समान्तर मध्यक निकालने की लघु रीति

जिस प्रकार साधारण समान्तर माध्य को हम लघु रीति से निकाल सकते हैं उसी प्रकार भारित समान्तर माध्य भी लघु रीति से निकाला जा सकता है। इस रीति में पहले कल्पित माध्य से प्रत्येक पद का विचलन निकाल कर उसे पद के भार से गुणा किया जाता है। इस प्रकार के गुणन-फलों के योग को भारों के योग से विभाजित किया जाता है। इस संख्या को कल्पित माध्य में जोड़ देने से उस समूह का भारित माध्य प्राप्त हो जाता है। गणितीय रूप से यही बात, इस प्रकार कही जा सकती है। यदि य (x) किसी श्रेणी का कल्पित माध्य हो और $च_१, च_२ \cdots\cdots च_स$ ($d_1, d_2 \cdots\cdots d_n$) कल्पित माध्य से $य_१\ य_२ \cdots\cdots य_स$ ($x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$) के विचलन हों तो

$$\text{भा०म०} = \text{य} + \left(\frac{\text{यो}_{\text{चभ}}}{\text{यो}_{\text{भ}}}\right)$$

$$w.a. = x + \left(\frac{\Sigma dw}{\Sigma w}\right)$$

अगले उदाहरण से यह रीति स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण १६

निम्नलिखित सारणी से एक पेटी चाय का भारित समान्तर माध्य मूल्य लघु रीति से निकालिए।

मूल्य प्रति पेटी (रुपयों में)	१६	२२	२६	२८	३२	३६	४०
बेची गई चाय की मात्रा (पेटी में)	२००	२७५	४००	१५०	१००	७५	५०

हल

मूल्य प्रति पेटी (रुपयों में) य (x)	बेची गई चाय की की मात्रा (भार) भ (w)	कल्पित माध्य (२८) से विचलन {deviations ftom as. av. (28)} च (d)	च×भ ($d \times w$)
१६	२००	—१२	—२४००
२२	२७५	— ६	—१६५०
२६	४००	— २	—८००
२८	१५०	०	०
३२	१००	+ ४	+४००
३६	७५	+ ८	+६००
४०	५०	+१२	+६००
	यो$_{भ}$ = १२५० (Σw)		यो$_{चभ}$ = −३२५० (Σdw)

$$\text{भा० मे०} = \text{य} + \left(\frac{\text{यो}_{\text{चभ}}}{\text{यो}_{\text{भ}}}\right)$$

$$= \text{२८} + \left(\frac{-\text{३२५०}}{\text{१२५०}}\right)$$

$$= \text{२८} - \text{२·६ रुपये}$$

$$= \text{२५·४ रुपये}$$

$$w.\ a. = x + \left(\frac{\Sigma dw}{\Sigma w}\right)$$

$$= 28 + \left(\frac{-3250}{1250}\right)$$

$$= 28 - 2{\cdot}6 \text{ rupees}$$

$$= 25{\cdot}4 \text{ rupees}$$

भारित समान्तर माध्य का उपयोग Use of weight Average:—

उपरोक्त उदाहरणों से यह बात स्पष्ट हो गई है कि जब किसी श्रेणी के विभिन्न पदों का महत्व बराबर नहीं होता तब यह आवश्यक है कि उस श्रेणी का माध्य निकालते समय सदैव भारित माध्य ही निकालना चाहिए क्योंकि साधारण माध्य ऐसी अवस्था में सही परिणाम नहीं दे सकता। इसके अतिरिक्त और भी ऐसी परिस्थितियाँ हैं जहाँ साधारण माध्य के स्थान पर भारित माध्य का उपयोग होना चाहिए। ऐसी कुछ परिस्थितियों का वर्णन नीचे किया गया है।

यदि किसी विषय की सूचना दो समूहों या श्रेणियों, जिनकी पद-संख्या अलग-अलग है, के रूप में दी गई हो और उन दोनों से मिलकर बने हुए समूह के बारे में जानना हो तो भारित समान्तर मध्यक का उपयोग किया जायगा, अर्थात् यदि एक श्रेणी दो अंग-श्रेणियों (component series) से बनी हो जिनकी पद-संख्या अलग-अलग हो तो इस श्रेणी का मध्यक, अंग श्रेणियों के मध्यकों को उनके पदों की संख्या से गुणा करके प्राप्त गुणनफलों को दोनों अंग श्रेणियों के पदों की संख्या से विभाजित करके प्राप्त होगा। यहाँ भार अंग श्रेणियों के पदों की संख्याएँ हैं।

उदाहरण १७

१०. व्यक्तियों की ऊँचाइयाँ ६ और ४ पदों के समूहों में दी गई हैं। इन समूहों के मध्यक निकाल कर इनसे मिले समूह का मध्यक निकालिये।

हल

पहले समूह के व्यक्तियोंकी लम्बाइयाँ ६०", ६२", ६५", ६१", ६६", ६४"।
दूसरे समूह के व्यक्तियों की लम्बाइयाँ ६२", ५९", ६३", ६०"।

पहले समूह का समान्तर मध्यक $= \frac{६० + ६२ + ६५ + ६१ + ६६ + ६४}{६}$ इञ्च

$= \frac{३७८}{६}$ इञ्च $=$ ६३"।

दूसरे समूह का समान्तर मध्यक $= \frac{६२ + ५९ + ६३ + ६०}{४}$ इंच

$= \frac{२४४}{४}$ इंच $=$ ६१"।

∴ इन दोनों से बने समूह का भारित समान्तर मध्यक $= \frac{(६ \times ६३) + (४ \times ६१)}{१०}$ इञ्च

$= \frac{३७८ + २४४}{१०} = \frac{६२२}{१०}$ इञ्च

$=$ ६२·२ इंच।

अगर इन माध्यों का साधारण माध्य निकाला जाय तो वह बराबर होगा $\frac{६१+६३}{२}$ इञ्च=६२ इञ्च।

यह देखने के लिए कि इनमें से कौन माध्य पूरे समूह का माध्य होगा, हम दोनों अंग-समूहों (component groups) को एक समूह मानते हैं और इसका माध्य साधारण रीति से निकालते हैं।

$$\text{यह माध्य}=\frac{(६०+६२+६५+६१+६६+६४)+(६२+५९+६३+६०)}{१०}\text{ इञ्च}$$

$$=६२\cdot६ \text{ इंच।}$$

स्पष्टत: दोनों समूहों के माध्यों का भारित माध्य ही इनसे बने समूह का माध्य है।

भारित समान्तर माध्य का उपयोग उन दशाओं में भी किया जाता है जिनमें अर्घों (rates) या अनुपातों (ratios) का मध्यक निकालना होता है।

उदाहरण १८

पाँच समूहों के सदस्यों की लम्बाइयाँ नापी गईं, पहले में ५% दूसरे में १०%, तीसरे में ८% और चौथे में ४% सदस्यों की लम्बाइयाँ ५० इंच से कम थीं, तो इन सब समूहों को मिलाकर बने हुए समूह में कितने प्रतिशत सदस्यों की लम्बाइयाँ ५०" से कम होंगी। इस समस्या का सही हल नहीं निकाला जा सकता क्योंकि इसमें यह नहीं दिया गया है कि प्रत्येक समूह में कितने सदस्य हैं। मान लीजिये कि पहले में ५०, दूसरे में ७०, तीसरे में ७५ और चौथे में ५५ सदस्य हैं। इनका माध्य, भारित माध्य होगा और सदस्यों की संख्या भार होगी।

∴ ५०" से कम लम्बाई वाले व्यक्तियों का प्रतिशत अनुपात

$$=\frac{(५०\times५)+(७०\times१०)+(७५\times८)+(५५\times४)}{५०+७०+७५+५५}\text{ प्रतिशत}$$

$$=\frac{२५०+७००+६००+२२०}{२५०}\text{ प्रतिशत}$$

$$=\frac{१७७०}{२५०}\text{ प्रतिशत}=७\cdot०८\text{ प्रतिशत होगा।}$$

यह बात सदा ध्यान में रखनी चाहिये कि भारावंटन (weighting) का प्रयोग सुतथ्यता के लिए किया जाता है, विशेषकर जबकि पदों की संख्या कम हो। यदि पदों की संख्या बहुत अधिक है तब भारावंटन अधिक आवश्यक नहीं क्योंकि ऐसी अवस्था में साधारण और भारित माध्यों में अधिक अन्तर नहीं होता।

गुणोत्तर मध्यक

(GEOMETRIC MEAN)

किसी श्रेणी के विभिन्न पदों के गुणनफलों का स वाँ मूल (n^{th} root) उस श्रेणी का **गुणोत्तर मध्यक कहलाता है।** (जबकि स उस समूह या श्रेणी के पदों की संख्या है)। अगर किसी समूह के स (n) पद $य_1, य_2, य_3, \cdots य_स$ ($x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$) हैं और यदि ग (g) इस समूह का गुणोत्तर मध्यक है तो :

$$ग = \sqrt[स]{य_1 \times य_2 \times य_3 \cdots य_स} \quad g = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \cdots\cdots x_n}$$

यदि किसी समूह में केवल दो ही पद ८ और १८ हैं तो इनका गुणोत्तर मध्यक $\sqrt{८ \times १८} = १२$ हुआ। यदि ३ पद ४, १० और २५ हैं तो इनका गुणोत्तर मध्यक इनके गुणनफल का घनमूल (cube root) होगा। अर्थात् गुणोत्तर मध्यक $\sqrt[३]{४ \times १० \times २५} = \sqrt[३]{१०००}$ या १० होगा।

समूह या श्रेणी में २ या ३ पद होने पर वर्ग या घनमूल गुणनखण्डों की रीति से निकाला जा सकता है। पर इससे अधिक होने पर गुणनखण्डों की रीति अव्यवहारिक हो जाती है। इसलिए छेदा या लघुगणकों (logarithms) का उपयोग किया जाता है। गुणोत्तर मध्यक निकालने के लिए सर्वप्रथम श्रेणी के विभिन्न पदों का छेदा (logarithm) निकाल कर जोड़ लिया जाता है और फिर उस संख्या को पदों की संख्या से विभाजित करके जो लब्धि या भागफल (quotient) प्राप्त होता है उसका प्रतिछेदा (anti-logarithm) ही उस श्रेणी का गुणोत्तर मध्यक होता है। इस सिद्धान्त को सूत्ररूप में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$ग = \text{प्रतिछेदा} \left(\frac{छे\,य_1 + छे\,य_2 + छे \ldots\ldots य_स}{स} \right)$$

$$g = \text{Antilog}\left(\frac{\log x_1 + \log x_2 + \ldots\ldots \log x_n}{n} \right)$$

उदाहरण १६

निम्नलिखित संख्याओं का गुणोत्तर मध्यक निकालिए :

५, १०, १९२, १४३७५, २०४९८, १२०६७४, १५४९१,

हल

गुणोत्तर मध्यक निकालना

चल का मूल्य (size of item)	छेदा (logarithm)
५	०·६९९०
१०	१·००००
१९२	२·२८३३
१४३७४	४·१५८४
२०४९८	४·३११८
१२०६७४	५·०८२८
१५४९१	४·१९०३
स=७ (n)	यो छे=२१·७२५६ (Σ logs)

$$ग = प्र० छे० \left(\frac{छे_{य_1} + छे_{य_2} + \ldots\ldots छे_{यस}}{स}\right)$$

$$= प्र० छे० \frac{२१·७२५६}{७}$$

$$= प्र० छे० ३·१०३७$$

$$= १२७१$$

$$g = \text{Antilog}\left(\frac{\log x_1 + \log x_2 + \ldots\ldots \log x_n}{n}\right).$$

$$\text{A. L.} \frac{21·7256}{7}$$

$$= \text{A. L. } 3·1037$$

$$= 1271$$

किसी श्रेणी का गुणोत्तर मध्यक उसके समान्तर मध्यक से सदैव कम होता है, परन्त यदि किसी श्रेणी के सब पदों का मूल्य समान है तो समान्तर मध्यक और गुणोत्तर मध्यक में कोई अन्तर नहीं होगा।

भारित गुणोत्तर मध्यक (Weighted Geometric Mean)

किसी समूह का भारित गुणोत्तर मध्यक निकालने के लिए पहले उसके प्रत्येक पद को उसी से उतनी बार गुणा करते हैं जितना कि उस पद का भार या बारंबारता हो। इस प्रकार प्राप्त गुणनफलों के समूह के गुणनफल का स वाँ मूल, (n^{th} root) जहाँ स भारों का मूल्य है, उस समूह का भारित गुणोत्तर मध्यक होता है।

गणितीय सूत्र के रूप में व्यक्त करने के लिए माना किसी समूह के पद $य_1, य_2 \ldots य_स$ ($x_1, x_2 \ldots x_n$) हैं जिनके भार क्रमशः $भ_1, भ_2 \ldots भ_स$ ($w_1, w_2 \ldots w_n$) हैं। यदि समूह का भारित गुणोत्तर मध्यक भा० ग० ($w.\ g.$) है तो :

$$भा०\ ग० = \sqrt[यो_भ]{य_1^{भ_1} \times य_2^{भ_2} \times \ldots य_स^{भ_स}}$$

$$w.\ g. = \sqrt[\Sigma w]{x_1^{w_1} \times x_2^{w_2} \times \ldots x_n^{w_n}}$$

ऐसी परिस्थिति में छेदा या लघुगणकों का प्रयोग अनिवार्य हो जाता है। प्रथम श्रेणी के विभिन्न पदों का छेदा निकाल कर उसे उस पद के भार से गुणा किया जाता है। इन गुणनफलों के योग को भारों के योग से विभाजित कर जो लब्धि प्राप्त होती है, उसका प्रतिच्छेदा (Antilogrithm) ही उस श्रेणी का भारित गुणोत्तर मध्यक होता है। गणितीय सूत्र के रूप में इसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :—

$$भा०ग० = प्र०\ छे० \left\{ \frac{(छे\ य_1 \times भ_1) + (छे\ य_2 \times भ_2) + \ldots (छे\ य_स \times भ_स)}{भ_1 + भ_2 + \ldots भ_स} \right\}$$

$$w.\ g. = A.L. \left\{ \frac{(\log x_1 \times w_1) + (\log x_2 \times w_2) + \ldots (\log x_n \times w_n)}{w_1 + w_2 + \ldots w_n} \right\}$$

उदाहरण २०

एक समूह के पदों का मूल्य ५, ६, ७, ८, ९, १० और ११ है और उनके भार क्रमशः २,४,७,१०,९,६ और २ हैं। इनका भारित गुणोत्तर मध्यक निकालिए।

हल

भारित गुणोत्तर मध्यक निकालना

चल का मूल्य (size of item) य (x)	भार (weight) भ (w)	छेदा 'य' छे$_{य}$ ($\log x$)	छेदा × भार (log. × weight)
५	२	०.६९९०	१.३९८०
६	४	०.७७८२	३.११२८
७	७	०.८४५१	५.९१५७
८	१०	०.९०३१	९.०३१०
९	९	०.९५४२	८.५८७८
१०	६	१.००००	६·००००
११	२	१.०४१४	२.०८२८
	यो$_{भ}$ =४० (Σw)		यो$_{छे भ}$=३६·१२८१

भा० ग० = प्र० छे० $\left(\frac{३६·१२८१}{४०}\right)$
= प्र० छे० ०·९०३२
= ८·००२

w. g. = Antilog $\left(\frac{36·1281}{40}\right)$
= A. L. 0·9032
= 8·002.

गुणोत्तर मध्यक के लाभ, कमियाँ तथा उपयोग

गुणोत्तर मध्यक एक संख्या है जिसकी गणना करने के लिए, समान्तर मध्यक की भाँति, सब पदों पर विचार करना पड़ता है। क्योंकि इसकी गणना करने में सब पद आते हैं, इसलिए प्रत्येक का मूल्य निश्चित रूप से ज्ञात होना चाहिए। इस पर अधिक मान वाले पदों का प्रभाव अपेक्षाकृत कम पड़ता है। इसलिए जिन स्थलों में कम मूल्य वाले पदों को अधिक महत्व देना होता है वहाँ इसका उपयोग किया जा सकता है। अनुपातों (ratios) या अर्घों (rates) का माध्य निकालने के लिए इसका उपयोग किया जाता है। इसीलिए इसका उपयोग देशनांकों (Index numbers) में भी किया जाता है। यह बीजगणितीय रीतियों के लिए अनुपयुक्त नहीं है। पर यदि किसी समूह का कोई पद शून्य या ऋणात्मक हुआ तो इसका उपयोग नहीं किया जा सकता। क्योंकि पहली दशा में इसका मान शून्य होगा और दूसरी दशा में एक काल्पनिक (imaginary) राशि। इसलिए यह समूह का प्रतिनिधि नहीं हो पायेगा और अन्य गणनाओं

में भी इसका उपयोग नहीं किया जा सकेगा। इसकी गणना करना कठिन होता है और अपनी अमूर्तता के कारण समझ में भी सरलता से नहीं आता। यह एक ऐसी संख्या हो सकती है जो दिये हुए समूह में न हो।

हरात्मक मध्यक

(Harmonic Mean)

किसी समूह या श्रेणी के पदों की संख्या को विभिन्न पद-मूल्यों के व्युत्क्रमों (reciprocals) के योग से विभाजित करने पर जो लब्धि प्राप्त होती है वह उस श्रेणी का हरात्मक मध्यक होता है।

इसी परिभाषा को दूसरे रूप में भी रखा जा सकता है। किसी समूह या श्रेणी के पदों का हरात्मक मध्यक उनके व्युत्क्रमों के समान्तर मध्यक का व्युत्क्रम है।

यदि २, ४ और ६ का हरात्मक मध्यक निकालना है तो पहली रीति के अनुसार वह $\frac{३}{\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{६}}$ = या $\frac{३६}{११}$ हुआ। दूसरी रीति के अनुसार हरात्मक मध्यक = $\frac{\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{६}}{३}$ का व्युत्क्रम हुआ। हल करने पर यह $\frac{११}{३६}$ का व्युत्क्रम या $\frac{३६}{११}$ ही हुआ।

इन दोनों रीतियों को गणितीय रूप में निम्न रीति से लिखा जा सकता है। यदि $य_१$, $य_२$, $य_स$ (x_1 $x_2 \cdots x_n$) चल के विभिन्न मूल्य हैं तथा स (n) पदों की संख्या है तो (h) या हरात्मक मध्यक (harmonic mean) सूत्र रूप में इस प्रकार निकाला जायगा :

$$ह = \frac{स}{\frac{१}{य_१}+\frac{१}{य_२}+\frac{१}{य_३}+\frac{१}{य_स}}$$

अथवा

$$ह = व्युत्क्रम \frac{\frac{१}{य_१}+\frac{१}{य_२}+\frac{१}{य_३}+\frac{१}{य_स}}{स}$$

जबकि, ह = हरात्मक मध्यक

$य_१, य_२, य_३ \ldots य_स$ य चल के विभिन्न मूल्य हैं।

स = पदों की संख्या

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots\frac{1}{x_n}}$$

or,

$$h = \text{reciprocal}\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x}}{n}$$

where, h = harmomic mean

$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ = individual values of x.

n = number of items

उदाहरण २१

निम्नलिखित संख्याओं का हरात्मक मध्यक निकालिए :—

१·०, १·५, ५·०, १५·०, २५०·०, ·५, ·०५, ·०९५, १२४५·० तथा ·००९।

हल

हरात्मक मध्यक निकालना

चल का मूल्य (size of item)	व्युत्क्रम (reciprocal)
१·०	१·००००
१·५	·६६६७
५·०	·२०००
१५·०	·०६६६
२५०·०	·००४०
·५	२·००००
·०५	२०·००००
·०९५	१०·५३००
१२४५·०	·०००८
·००९	१११·१०००
स(n)=१०	१४५·५६८१

पहली रीति

$$ह=\frac{१०}{१४५·५६८१}$$

=·०६८४९

दूसरी रीति

$$ह=व्युत्क्रम\ \frac{१४५·५६८१}{१०}$$

=व्युत्क्रम १४·५५६८१

=·०६८४९

First Method

$$h=\frac{10}{145{\cdot}5681}$$

$=\cdot06849$

Second Method

$$h=\text{reciprocal}\ \frac{145{\cdot}5681}{10}$$

$=\text{reciprocal}\ 14{\cdot}55681$

$=\cdot06849$

भारित हरात्मक मध्यक (Weighted Harmonic Mean)

भारित हरात्मक मध्यक निकालने के लिए सर्वप्रथम पदों के व्युत्क्रमों को उनके भार से गुणा किया जाता है। और गुणनफलों के योग से पद-संख्या को विभाजित करने पर जो लब्धि प्राप्त होती है वही उस श्रेणी का भारित हरात्मक मध्यक होता है। दूसरी

रीति के अनुसार हरात्मक मध्यक पदों से व्युत्क्रमों और भारों के गुणनफल के समान्तर मध्यक का व्युत्क्रम होता है। ये दोनों रीतियाँ निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो जायेंगी :

उदाहरण २२

निम्न सारणी में पहले और दूसरे कॉलमों में दी गई सामग्री से भारित हरात्मक मध्यक निकालिए :

पद (item)	भार (weight)	पदों का व्युत्क्रम (reciprocal of items)	भार × व्युत्क्रम (weight × reci.)
·१	५	१·००००	५·००००
·५	१०	२·००००	२०·००००
१०·०	२०	·१०००	२·००००
४५·०	१०	·०२२२	·२२२०
१७५·०	१५	·००५७	·०८५५
·०१	२	१००·००००	२००·००००
४·०	१५	·२५००	३·७५००
११·२	८	·०८९३	·७१४४
	८५		२३१·७७१९

पहली रीति

$$ह = \frac{८५}{२३१·७७१९}$$
$$= ·३६६३$$

दूसरी रीति

$$ह = व्युत्क्रम\ \frac{२३१·७७१९}{८५}$$
$$= व्युत्क्रम\ २·७२७$$
$$= ·३६६३$$

First Method

$$h = \frac{85}{231 \cdot 7719}$$
$$= \cdot 3663$$

Second Method

$$h = \text{reciprocal}\ \frac{231 \cdot 7719}{85}$$
$$= \text{reciprocal}\ 2 \cdot 727$$
$$= \cdot 3663$$

हरात्मक मध्यक के लाभ, कमियाँ तथा उपयोग

हरात्मक मध्यक का उपयोग विशेषकर अर्घों (rates) का माध्य निकालते समय करना पड़ता है क्योंकि ऐसे में समान्तर माध्य गलत परिणाम देता है। मान लीजिये एक मोटर-बस दो स्थानों, क और ख जो १८० मील की दूरी पर हैं, के बीच चलती है। क से ख जाते समय उसकी गति (speed) ३० मील प्रति घंटा है और ख से क आते समय ६० मील प्रति घंटा। उसकी माध्य गति निकालनी है। अगर हम इन गतियों का समान्तर

माध्य लें तो वह $\frac{३०+६०}{२}$ मील प्रति घंटा=४५ मील प्रति घंटा आयेगा। इसलिए वह क से ख और ख से क की दूरी (१८०+१८०=३६० मील) को ४५ मील प्रति घंटा के अनुसार ($\frac{३६०}{४५}$)=८ घंटे में तय करेगी। पर वास्तव में वह इस दूरी को ($\frac{१८०}{३०}+\frac{१८०}{६०}$)=९ घंटे में तय करती है। इसलिए उसकी माध्य गति $\frac{३६०}{९}$ मील प्रति घंटा या ४० मील प्रति घंटा हुई। समान्तर मध्यक निकालने से यहाँ गलत परिणाम मिला। यदि हम इन गतियों का हरात्मक मध्यक निकालें तो वह $\frac{२}{\frac{१}{३०}+\frac{१}{६०}}$ या ४० मील प्रति घंटा होगा। इस प्रकार हम देखते हैं कि हरात्मक मध्यक के प्रयोग से हमें सही परिणाम मिला।

यदि हम चाहें तो ऊपर दिये हुए उदाहरण को इस प्रकार लिख सकते हैं कि हमें हरात्मक मध्यक गलत और समान्तर मध्यक सही परिणाम दे। यदि हम यह कहें कि क से ख जाने में मोटर-बस की गति २ मिनट प्रति मील थी और ख से क तक आने में १ मिनट प्रति मील थी तो इनका समान्तर मध्यक $\frac{२+१}{२}$ या १·५ मिनट प्रति मील हुआ। इस हिसाब से बस की गति ४० मील प्रति घंटा हुई जो कि सही परिणाम है। यदि इन संख्याओं का हरात्मक मध्यक निकाला जाय तो वह हमें गलत परिणाम देगा।

हरात्मक मध्यक समान्तर मध्यक की भाँति एक निश्चित अंक है जिसकी गणना करने के लिए समूह या श्रेणी के सब पदों पर विचार करना पड़ता है। यह ऐसी संख्या हो सकती है जो दिये हुए समूह का कोई पद न हो। इसकी गणना करना समान्तर मध्यक की गणना करने से अधिक कठिन होता है और अपनी अमूर्तता (abstractness) के कारण इसको समझना भी कठिन है। पर इन दोनों के बावजूद भी इसका उपयोग कई विशेष दशाओं में आवश्यकीय हो जाता है। उन समस्याओं में जहाँ अर्घों (rates) या अनुपातों (ratios) का माध्य निकालना हो या जहाँ क्षुद्रतम (smallest) मान वाले पदों को अधिकतम महत्व दिया जाना हो, इसका उपयोग किया जाता है, क्योंकि छोटी संख्याओं का व्युत्क्रम बड़ी संख्याओं से बड़ा होता है, इसलिए यह दूसरी प्रकार की समस्याओं के लिए उपयुक्त है।

अन्य माध्य

वर्गकरणी माध्य (Quadratic Mean)—यदि किसी माला में कुछ पदों का मूल्य धनात्मक हो और कुछ का ऋणात्मक, तो वर्गकरणी माध्य का उपयोग करना चाहिए क्योंकि ऐसी परिस्थिति में इसके द्वारा निकाले गये परिणाम अन्य विधियों की अपेक्षाकृत अधिक शुद्ध होते हैं। **वर्गकरणी माध्य पद मूल्यों के वर्ग के माध्य का वर्गमूल**

है। इसकी गणना करने में सर्वप्रथम विभिन्न पद-मूल्यों का वर्ग निकाल कर जोड़ लिया जाता है। इस योग को पदों की संख्या से विभाजित कर जो संख्या प्राप्त होती है उसका वर्गमूल ही वर्गकरणी माध्य होता है। सूत्र रूप में

$$\text{व० मा०} = \sqrt{\frac{\text{य}_1^2 + \text{य}_2^2 + \ldots \text{य}_\text{स}^2}{\text{स}}}$$

जब कि व० मा० = वर्गकरणी माध्य, य_1 य_2 इत्यादि विभिन्न पदों के मूल्य, और स पदों की संख्या है।

$$q.m. \sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2 + \ldots m_n^2}{n}}$$

Where *q.m* stands for Quadratic Mean and m_1, m_2 etc. for the value of the variable and n for the number of items.

उदाहरणार्थ यदि हमें ३, ४, –५ तथा ६ का वर्गकरणी माध्य निकालना है तो हमें इन संख्याओं के वर्ग का योग निकालना पड़ेगा। यह योग (९+१६+२५+३६)= ८६ हुआ। पदों की संख्या ४ है अतः वर्गों का माध्य $\frac{८६}{४}$ = २१·५ हुआ। इस संख्या का वर्ग-मूल $\sqrt{२१.५}$ = ४.६३ हुआ। यही वर्गीकरण माध्य है।

यह माध्य बड़ी संख्याओं के मूल्य से अधिक प्रभावित होता है क्योंकि इसमें संख्याओं का वर्ग निकाला जाता है, अतः इसका उपयोग बड़ी सावधानी से करना चाहिये।

चल माध्य (Moving Average)—यह माध्य समान्तर माध्य की रीति से ही निकाला जाता है। इसमें सर्वप्रथम चल माध्य की 'अवधि' निश्चित की जाती है क्योंकि चल माध्य केवल काल-माला (time-series) ही में निकाला जाता है, चल माध्य की अवधि ३ वर्ष, ५ वर्ष या ६, ७ वर्ष कुछ भी हो सकती है। इस प्रश्न पर 'काल-माला-विश्लेषण' वाले अध्याय में प्रकाश डाला जायगा।

यदि तीन वर्षीय चल माध्य निकालना है तो पहले तीन वर्ष के मूल्यों का समान्तर माध्य बीच वाले वर्ष (यानी दूसरे वर्ष) के सामने रखा जायगा। इसके बाद पहले वर्ष को छोड़कर अगले तीन वर्षों (यानी दूसरे तीसरे और चौथे) के मूल्यों का समान्तर माध्य बीच वाले वर्ष (यानी तीसरे वर्ष) के सामने रखा जायगा। इस तरह हर बार ऊपर से एक वर्ष छोड़ दिया जायगा और नीचे वाला एक वर्ष ले लिया जायगा। इसी विधि से पूरी काल-माला का चल माध्य मालूम किया जा सकता है। यदि पांच वर्षीय चल माध्य निकालना है तो सर्वप्रथम पांच वर्षों के मूल्यों का समान्तर माध्य तीसरे वर्ष के आगे रखा जायगा। फिर दूसरे, तीसरे, चौथे, पांचवें और छठें वर्ष के मूल्यों का समान्तर माध्य चौथे वर्ष के सामने रखा जायगा। और इसी प्रकार पूरी काल-माला के माध्य निकाले जायेंगे। आगे के उदाहरण से यह स्पष्ट हो जायगा—

उदाहरण २३

निम्नलिखित सामग्री से ३ वर्षीय चल माध्य निकालिये :—

वर्ष	विक्री (लाख रुपयों में)	तीन वर्षीय चल योग	तीन वर्षीय चल माध्य
१९४५	८	...	...
१९४६	९	२५	८.३
१९४७	८	२४	८.०
१९४८	७	२३	७.७
१९४९	८	२४	८.०
१९५०	९	२७	९.०
१९५१	१०	३०	१०.०
१९५२	११	३२	१०.७
१९५३	११	३४	११.३
१९५४	१२	३३	११.०
१९५५	१०	..	...

इसी प्रकार यदि पाँच वर्षीय चल माध्य निकालना होता तो पहले पहली पाँच संख्याओं का समान्तर मध्यक सन् १९४७ के आगे रखा जाता। इसके बाद सन् १९४६ से सन् १९५० तक की विक्री का समान्तर माध्य सन् १९४८ के सामने रखा जाता। इसी प्रकार पूरी माला का चल माध्य निकाला जा सकता है।

यदि चल माध्य की अवधि समसंख्या (even number) जैसे ४, ६ या ८ वर्ष हो तो कुछ कठिनाई पड़ती है। इस प्रश्न पर 'काल-श्रेणी विश्लेपण' वाले अध्याय में विचार किया जायगा।

प्रगामी माध्य (Progressive Average) इसकी गणना भी समान्तर माध्य के आधार पर ही होती है। यह एक संचयी (cumulative) माध्य है। इसकी गणना में पिछले सव वर्षों के मूल्य जोडकर उनका समान्तर माध्य निकाला जाता है। कोई मूल्य छोड़ा नहीं जाता, इसका यह अर्थ हुआ कि दूसरे वर्ष का प्रगामी माध्य पहले और दूसरे वर्ष के मूल्यों का समान्तर माध्य हुआ और तीसरे वर्ष का प्रगामी माध्य पहले, दूसरे और तीसरे वर्ष के मूल्यों का समान्तर माध्य हुआ।

निम्नलिखित उदाहरण से यह स्पष्ट हो जायगा ।

उदाहरण २४

निम्नलिखित सामग्री से प्रगामी माध्य निकालिये :—

वर्ष	बिक्री (लाख रुपयों में)	प्रगामी योग	प्रगामी माध्य
१९४५	८	८	८
१९४६	९	१७	८.५
१९४७	८	२५	८.३
१९४८	७	३२	८.०
१९४९	८	४०	८.०
१९५०	९	४९	८.१
१९५१	१०	५९	८.४
१९५२	११	७०	८.८
१९५३	११	८१	९.०
१९५४	१२	९३	९.३
१९५५	१०	१०३	९.३

संग्रथित माध्य (Composite average)—यह माध्य भी एक प्रकार का समान्तर माध्य ही है, जो कि विभिन्न माध्यों के माध्य की गणना करने से निकलता है। यदि हमें किसी छात्रालय में रहने वाले विद्यार्थियों का औसत मासिक व्यय मालूम है तो उनका औसत वार्षिक व्यय आसानी से निकाला जा सकता है। उनके मासिक व्यय के माध्यों को जोड़ कर यदि १२ से भाग दिया जाय तो उनके वार्षिक व्यय का माध्य मालूम हो जायगा, इस प्रकार १२ मासिक माध्यों का माध्य, वार्षिक माध्य होगा। यह संग्रथित माध्य कहलाएगा।

यदि हमें दो छात्रालयों के विद्यार्थियों के व्यय के वार्षिक माध्य मालूम हैं और उन दोनों छात्रालयों में विद्यार्थियों की संख्या बराबर है तो दोनों छात्रालयों का संग्रथित माध्य निकालना बहुत आसान होगा। दोनों माध्यों का समान्तर माध्य ही संग्रथित माध्य होगा। पर यदि उनमें विद्यार्थियों की संख्या भिन्न हो तो संग्रथित माध्य निकालने के लिए हमें भारित समान्तर माध्य निकालना होगा, और भार विद्यार्थियों की संख्या होगा। यह बात भारित समान्तर माध्य के सम्बन्ध में पहले बतलाई जा चुकी है।

माध्यों का परस्पर सम्बन्ध

बारंबारता बंटन या तो संमित होते हैं या असंमित। इन बंटनों के बारे में अगले अध्याय (अपकिरण तथा विषमता) में लिखा गया है। यहाँ केवल इतना बतलाया जा

रहा है कि संमित वंटन में मध्यका, समान्तर मध्यक तथा भूयिष्ठक तीनों का मूल्य वरावर होता है, और यदि वारंवारता वंटन असंमित है तो इनका मूल्य भिन्न होता है, यदि वंटन अधिक असंमित नहीं है तो भूयिष्ठक, मध्यका तथा समान्तर माध्य का परस्पर सम्बन्ध लगभग निम्न प्रकार का होता है :—

मध्यका = स० मध्यक − $\frac{1}{3}$ (स० मध्यक − भूयिष्ठक)	median = mean − $\frac{1}{3}$ (mean − mode)
भूयिष्ठक = स० मध्यक + ३ (स० मध्यक − मध्यका)	mode = mean + 3 (mean − median)
या	or
(मध्यका − भूयिष्ठक) = $\frac{2}{3}$ (स० मध्यक − भूयिष्ठक)	(median − mode) = $\frac{2}{3}$ mean − mode)

इसके अतिरिक्त गुणोत्तर मध्यक सदैव हरात्मक मध्यक से अधिक होता है और समान्तर मध्यक, गुणोत्तर मध्यक से अधिक वर्गकरणी माध्य, समान्तर मध्यक से भी अधिक होता है, परन्तु यदि चल के सभी पदों का मूल्य समान है तो इन चारों माध्यों का एक ही मूल्य होगा ।

माध्यों की परिसीमाएँ
(Limitations of Averages)

इस अध्याय के आरम्भ में हम यह बता चुके हैं कि एक अच्छे माध्य में क्या-क्या गुण आवश्यक हैं। यह भी बताया जा चुका है कि विभिन्न माध्यों में यह गुण कहाँ तक पाये जाते हैं। परन्तु इस अध्याय में दी हुई विभिन्न माध्यों की विवेचना से यह निष्कर्ष नहीं निकालना चाहिए कि कोई एक माध्य दूसरे माध्यों से अधिक अच्छा है क्योंकि प्रत्येक माध्य की अपनी अलग विशेषताएँ हैं और अपने-अपने क्षेत्र में प्रत्येक माध्य दूसरे से अच्छा है। अतः माध्य चुनते समय हमें सदैव इस वात का ध्यान रखना चाहिए कि माध्य कैसी श्रेणी का निकालना है तथा माध्य निकालने का उद्देश्य क्या है। इन दो वातों के अतिरिक्त हमें प्रत्येक माध्य की परिसीमाओं का भी ध्यान रखना चाहिए। इस अध्याय में यह वताया जा चुका है कि प्रत्येक माध्य की क्या परिसीमाएँ हैं और किन परिस्थितियों में कौन से माध्य का प्रयोग करना चाहिए। उन विशेष परिसीमाओं के अतिरिक्त जिनका कि वर्णन किया जा चुका है, सभी माध्यों की एक बहुत वड़ी परिसीमा यह है कि वे **केवल माध्य हैं**। वे किसी समूह या श्रेणी के मध्यपद के आसपास का मूल्य वतलाते हैं। श्रेणी में कुछ पदों का मूल्य माध्य-मूल्य से अधिक तथा कुछ पदों का मूल्य माध्य-मूल्य से कम होना अनिवार्य है। यदि किसी मिल में काम करने वाल मजदूरों का माध्य वेतन

५० रुपया मासिक है तो इसका यह अर्थ नहीं कि उस मिल के प्रत्येक मजदूर का वेतन इतना ही है। ऐसा होना असम्भव नहीं पर साधारणतः कुछ मजदूरों का वेतन ५० रुपये से अधिक और कुछ का वेतन ५० रुपये से कम होगा। हमें यह न भूलना चाहिए कि **माध्य किसी समूह या श्रेणी का प्रतिनिधित्व उसी सीमा तक कर सकते हैं जहां तक एक संख्या बहुत-सी संख्याओं के समूह का प्रतिनिधित्व कर सकती है।**

प्रमापित मृत्यु और जन्म-अर्घ
(Standardized Death and Birth Rates)

मृत्यु-अर्घ और जन्मार्घ प्रति एक हजार के रूप में दिये जाते हैं। ये यह बताते हैं कि प्रति हजार व्यक्तियों में कितनों की मृत्यु हुई या कितनों का जन्म हुआ। इन्हें **अशोधित जन्म या मृत्यु-अर्घ** (crude birth or death rates) कहा जाता है। यह प्रत्येक आयु समूह में प्रति हजार व्यक्तियों में होने वाले जन्मों या होने वाली मृत्युओं के भारित समान्तर माध्य के बराबर होता है।

अगर इस अशोधित मृत्यु और जन्म-अर्घ के आधार पर दो स्थानों या प्रदेशों की तुलना करनी है, तो परिणाम विभ्रमात्मक होंगे। क्योंकि इनके आधार पर की गई तुलना वास्तविक तुलना नहीं कही जा सकती। इन स्थानों के आयु-संगठन (age composition) (अर्थात् प्रत्येक आयु-समूह में कुल जनसंख्या का कौन सा भाग है) अलग-अलग हो सकते हैं। किसी भी तुलना के लिए यह आवश्यक है कि जिनके बीच तुलना की जा रही हो वे एक प्रकार के हों, अन्यथा भ्रांतिकारी परिणामों (falacious results) का मिलना अवश्यम्भावी है। प्रमापित अर्घों की गणना करने में इस बात का विचार किया जाता है। प्रमापित अर्घों की गणना करने में यह मान लिया जाता है कि एक स्थान का आयु-संगठन दूसरे के समान है। इस प्रकार विभिन्न स्थानों के आयु-संगठनों के अन्तर का निरसन कर दिया जाता है। जिस जनसंख्या के आयु-संगठन को प्रमामान्य (normal) माना जाता है, उसे **प्रमाप-जनसंख्या** (standard population) कहते हैं। अब इस प्रमाप-जनसंख्या के वंटन (distribution) में दिये हुए स्थान के मृत्यु या जन्म-अर्घों का उपयोग करके प्रमापित या जन्म-अर्घ की गणना कर ली जाती है। नीचे दिये गये उदाहरणों में ये बातें स्पष्ट की गई हैं:

उदाहरण २५

मान लीजिये हमें दो नगरों, क और ख, के लिए अशोधित और प्रमापित मृत्यु अर्घ की गणना करनी है। इनके लिए प्रत्येक आयु-समूह की जनसंख्या और उसमें होने वाली मृत्युओं की संख्या अग्रलिखित है :—

आयु-समूह	नगर क			नगर ख		
	जनसंख्या	मृत्यु-संख्या	मृत्यु-अर्घ (प्रति हजार)	जनसंख्या	मृत्यु-संख्या	मृत्यु-अर्घ (प्रति हजार)
५ वर्ष से कम	३,०००	१८०	६०	१,५००	७५	५०
५ वर्ष से २० वर्ष	५,०००	२००	४०	२,२००	५५	२५
२० वर्ष से ५० वर्ष	४,०००	१२०	३०	२,८००	५६	२०
५० वर्ष से अधिक	२,०००	१४०	७०	२,५००	१५०	६०
योग	१४,०००	६४०	२००	९,०००	३३६	१५५

भारित माध्य की रीति से क नगर का अशोधित मृत्यु-अर्घ

$$= \frac{(६० \times ३०००) + (४० \times ५०००) + (३० \times ४०००) + (७० \times २०००)}{३००० + ५००० + ४००० + २०००}$$

$$= \frac{६४०}{१४}$$

= ४५·७ प्रति हजार।

भारित माध्य की रीति से ख नगर का अशोधित मृत्यु-अर्घ

$$= \frac{(५० \times १५००) + (२५ \times २२००) + (२० \times २८००) + (६० \times २५००)}{१५०० + २२०० + २८०० + २५००}$$

$$= \frac{३३६}{९}$$

= ३७·३ प्रति हजार ।

इन दो अर्घों में, जैसा पहले बताया जा चुका है, तुलना नहीं की जा सकती । इसलिए प्रमापित-अर्घ निकालने की आवश्यकता पड़ती है । मान लीजिये प्रमाप जनसंख्या का आयु-संगठन निम्न प्रकार का है:—

आयु समूह	जनसंख्या
५ वर्ष से कम	२००
५—२० वर्ष	२५०
२०—५० वर्ष	४००
५० वर्ष से अधिक	१५०

अब इन दो नगरों के लिए प्रमापित मृत्यु-अर्घ की गणना निम्नलिखित रीति से की जायगी:—

आयु-समूह (१)	प्रमाप-जनसंख्या (२)	नगर क के लिए मृत्यु-संख्या (३)	काँ (२) × काँ (३) (४)	नगर ख के लिए मृत्यु-संख्या (५)	काँ (२) × काँ (४) (६)
५ वर्ष से कम	२००	६०	१२,०००	५०	१०,०००
५—२० वर्ष	२५०	४०	१०,०००	२५	६,२५०
२०—५० वर्ष	४००	३०	१२,०००	२०	८०००
५० वर्ष से अधिक	१५०	७०	१०,५००	६०	९०००
योग	१०००		४४,५००		३३,२५०

∴ नगर क के लिए प्रमापित मृत्यु-अर्घ

$$= \frac{४४,५००}{१०००} = ४४\cdot५ \text{ प्रति हजार}$$

∴ नगर ख के लिए प्रमापित मृत्यु-अर्घ

$$= \frac{३३,२५०}{१०००} = ३३\cdot२५ \text{ प्रति हजार}$$

जैसा इस उदाहरण की पहली सारणी को देख कर स्पष्ट होगा, क नगर में इन आयु-समूहों में कुल जनसंख्या के क्रमशः $\frac{३}{१४}$, $\frac{५}{१४}$, $\frac{२}{७}$ और $\frac{१}{७}$ लोग हैं, जबकि नगर ख के लिए ये अंक क्रमशः $\frac{१}{६}$, $\frac{११}{४७}$, $\frac{१५}{४६}$ और $\frac{५}{१८}$ हैं। इसलिए सीधे भारित माध्यों की तुलना नहीं की जा सकती।

व्यवहार में स्त्रियों और पुरुषों के लिए मृत्यु-अर्घ की गणना अलग-अलग करनी चाहिए क्योंकि प्रत्येक आयु-समूह के लिए इनके मृत्यु-अर्घ में पर्याप्त अन्तर होता है।

उपर्युक्त उदाहरण में एक प्रमाप जनसंख्या मान ली गई है। इस प्रमाप जनसंख्या के आधार पर दिये हुए नगरों के लिए प्रमापित मृत्यु-अर्घ की गणना की गई है। ये मृत्यु-अर्घ तुलना योग्य हैं क्योंकि इनकी गणना आयु-संगठन के परिवर्तनों का निरसन करके की गई है। अगर प्रमाप जनसंख्या ज्ञात न हो और इनकी तुलना करनी हो तो इन्हीं में से एक को प्रमाप जनसंख्या मान कर दूसरे के लिए मृत्यु-अर्घ की गणना पहले के आधार पर की जायगी।

जन्मार्घ की गणना करने में अन्य बातें समान रहती हैं। केवल इतना अन्तर हो जाता है कि सब आयु-समूहों पर विचार नहीं किया जाता। अगर अशोधित जन्मार्घ की गणना करनी हो तो दिये हुए स्थान की सब स्त्रियों की प्रति हजार संख्या के लिए जन्मों की संख्या निकाल ली जाती है, पर यह स्पष्टतः भ्रांतिकारी होगा। साधारणतः केवल १५ से ५० वर्ष की आयु वाली स्त्रियों की प्रति हजार संख्या के लिए, जन्मों की संख्या निकाल ली जाती है और इनके लिए ही प्रमापित जन्मार्घ निकाला जाता है।

उपर्युक्त अनुच्छेदों में जिसे अर्घ कहा गया है वह केवल एक प्रकार का माध्य है और यह बताता है कि प्रति हजार व्यक्तियों में औसत मृत्यु या जन्म-संख्या कितनी है। इस रीति का उपयोग अन्य प्रकार के अर्घों, जैसे विवाह-अर्घ, वृत्त-हीनता अर्घ, आदि की गणना करने के लिए भी किया जा सकता है।

प्रश्नावली

(१) समान्तर माध्य किसे कहते हैं ? समान्तर माध्य निकालने की रीतियों का विस्तारपूर्वक वर्णन करिये ।

(२) क्या समान्तर माध्य आदर्श माध्य है ? इसके गुणों व अवगुणों की व्याख्या कीजिये ।

(३) किस प्रकार के प्रश्नों में समान्तर माध्य का उपयोग लाभदायक है और किसमें नहीं ? समझा कर लिखिए ।

(४) गुणोत्तर व हरात्मक माध्य की परिभाषा लिखिए और उनके विशेष गुणों व अवगुणों को समझाकर बतलाइए। इनका उपयोग किन परिस्थितियों में किया जाता है ?

(५) निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये :—

(क) वर्ग करणी माध्य, (ख) प्रगामी माध्य;
(ग) चल माध्य, (घ) संग्रथित माध्य;

(६) "प्रत्येक माध्य की अपनी विशेषताएँ हैं। यह कहना कठिन है कि कौन-सा माध्य सबसे अच्छा है।" व्याख्या कीजिये।

(७) माध्यों की परिसीमाएँ तथा उनके पारस्परिक सम्बन्ध पर प्रकाश डालिये।

(८) भारित माध्य क्या हैं ? इनका उपयोग किन परिस्थितियों में करना चाहिये?

(९) अशोधित तथा प्रमापित मृत्यु अर्घों का अन्तर स्पष्ट रूप से उदाहरण दे कर समझाइये। प्रमापित मृत्यु-अर्घ, अशोधित-अर्घ से क्यों उत्तम माना जाता है ?

(१०) निम्नलिखित अंकों का भूयिष्ठक (mode) ज्ञात कीजिए :—

चल (size)	वारंवारता (frequency)	चल (size)	वारंवारता (frequency)
५	४८	१३	५२
६	५२	१४	४१
७	५६	१५	५७
८	६०	१६	६३
९	६३	१७	५२
१०	५७	१८	४८
११	५५	१९	४०
१२	५०	—	—

(११) सन् १९३७ ई० में पटना विश्वविद्यालय के हाई स्कूल तथा इंटर-

मिडियेट (कला) की परीक्षा में सम्मिलित होने वाले परीक्षार्थियों की उम्रों का वंटन निम्नलिखित है :

उम्र (वर्षों में)	१२–	१३–	१४–	१५–	१६–	१७–	१८–	१९–	२०–	२१–	२२–	योग
हाईस्कूल	५	४८	१८९	३०३	५२२	९८०	९८१	७९४	५१५	४७४	×	४८११
इंटरमिडियेट	×	×	×	५	४५	८७	१२७	१५०	१५५	१२७	१७५	८७१

हाई स्कूल की परीक्षा में सम्मिलित होने वाले परीक्षार्थियों की मध्यका (median) तथा भूयिष्ठ (modal) उम्रों की तुलना इंटरमिटियेट के परीक्षार्थियों से करिये ।

(१२) निम्न सारणी में वारंवारता, जिसके साथ लाभ कमाया जाता है, दी हुई है । भूयिष्ठक (mode) निकालिये :

	वारंवारता (frequency)
३००० रु० से अधिक लेकिन ४००० रु० से कम	८३
४००० ,, ,, ५००० ,, ,,	२७
५००० ,, ,, ६००० ,, ,,	२५
६००० ,, ,, ७००० ,, ,,	५०
७००० ,, ,, ८००० ,, ,,	७५
८००० ,, ,, ९००० ,, ,,	३८
९००० ,, ,, १०,००० ,, ,,	१८

(१३) निम्न सारिणी से मध्यका तथा भूयिष्ठ (median and mode) निकालिये : 27·53

अनुपस्थित दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या
५ से कम	२९
१० ,, ,,	२२४
१५ ,, ,,	४६५
२० ,, ,,	५८२
२५ ,, ,,	६३४
३० ,, ,,	६४४
३५ ,, ,,	६५०
४० ,, ,,	६५३
४५ ,, ,,	६५५

(मध्यका)

(१४) निम्न सारिणी में २५ विद्यार्थियों के अर्थशास्त्र तथा राजनीति की किसी परीक्षा में, प्राप्तांक दिये गये हैं:

विद्यार्थियों के क्रमांक	अर्थशास्त्र	राजनीति	विद्यार्थियों के क्रमांक	अर्थशास्त्र	राजनीति
१	२९	३६	१३	४६	८०
२	६५	३०	१४	४७	४४
३	३३	३८	१५	६०	८५
४	४५	३९	१६	३०	२०
५	५१	६४	१७	३२	३२
६	७२	५०	१८	५२	२५
७	४८	४६	१९	५४	५५
८	३३	१५	२०	५६	२८
९	४२	२१	२१	५८	५३
१०	२५	१०	२२	४९	३५
११	२८	७२	२३	३८	४०
१२	३५	३३	२४	४०	६२
			२५	४६	५८

उपर्युक्त अकों से मालूम कीजिये कि किस विषय में विद्यार्थियों के ज्ञान का स्तर ऊँचा है ? कारण भी दीजिए ।

(१५) निम्नलिखित अंकों से जूतों का मध्यका (median) नाप निकालिए :

जूतों का नाप (size of shoes)	वारंवारता (frequency)
४·५	१
५	२
५·५	४
६	५
६·५	१५
७	३०
७·५	६०
८	९५
८·५	८२
९	७२
९·५	४४
१०	२५
१०·५	१५
११	४

साथ ही प्रथम और तृतीय चतुर्थक, ७वां दशमक (decile) ४६ वां शततमक, (percentile) तीसरा पञ्चमक तथा ५ वां अष्टमक भी निकालिए ।

(१६) निम्न सारणी में सन् १९४१ ई० की निर्दशन संगणना के अनुसार, बड़ौदा राज्य में विवाहित स्त्रियों का आयु-वंटन दिया हुआ है :

आयु	विवाहित स्त्रियों की संख्या	आयु	विवाहित स्त्रियों की संख्या
०— ५	३	४०—४५	९६३
५—१०	३१	४५—५०	७६२
१०—१५	४१०	५०—५५	५३१
१५—२०	१८०९	५५—६०	३१७
२०—२५	२४४६	६०—६५	१५६
२५—३०	२२२३	६५—७०	५९
३०—३५	१७२३	७०—७५	३७
३५—४०	१२९२		

विवाहित स्त्रियों की मध्यका-आयु (median age) निकालिए तथा साथ ही दोनों चतुर्थक भी निकालिए।

(१७) निम्नलिखित वंटन से मध्यका, ८ वाँ दशमक तथा ५६ वाँ शततमक निकालिए:—

वर्गान्तर (class-interval)	वारंवारता (frequency)	वर्गान्तर (class-interval)	वारंवारता (frequency)
रुपये		रुपये	
१— ३	६		
३— ५	५३	११—१३	१६
५— ७	८५	१३—१५	४
७— ९	५६	१५—१७	४
९—११	२१		
		योग	२४५

(१८) निम्नलिखित वंटन से समान्तर मध्यक (arithmetic average) तथा मध्यका (median) निकालिए:

किसी वर्ग में विद्यार्थियों की तौल	संख्या	किसी वर्ग में विद्यार्थियों की तौल	संख्या	किसी वर्ग में विद्यार्थियों की तौल	संख्या
१००—१०४	४	१२५—१२९	२९८	१५०—१५४	२६०
१०५—१०९	१४	१३०—१३४	३८०	१५५—१५९	१२८
११०—११४	६०	१३५—१३९	४५०	१६०—१६४	६६
११५—११९	१३८	१४०—१४४	५००	१६५—१६९	२८
१२०—१२४	२०६	१४५—१४९	४३०	१७०—१७४	१२

(१९) निम्नलिखित सारणी से समान्तर मध्यक, मध्यका और अपर तथा अवर चतुर्थक आयु निकालिए :

आयु वर्ग	जनसंख्या हजारों में	
	१८८१	१९३१
०– ४	३५२०	३२८०
५– ९	३१६०	३५००
१०–१९	५३४०	७२००
२०–२९	४५६०	६६४०
३०–३९	३४२०	५९८०
४०–४९	२६६०	५२४०
५०–५९	१९००	३७८०
६०–६९	१३२०	२४४०
७०–७९	६००	१२२०
८० तथा अधिक	१२०	३२०

(२०) निम्नलिखित सामग्री में दस पैसों को १०२४ वार उछालने, तथा (heads) की संख्या के अनुसार (जो कि प्रत्येक उछाल में आती है) प्राप्त सामग्री दी गयी है। प्रति उछाल में (heads) की माध्य-संख्या बतलाइये :

heads की संख्या	वारंवारता	heads की संख्या	वारंवारता
०	१	५	२५३
१	१६	६	२०९
२	४२	७	११८
३	१२६	८	५३
४	१९९	९	४
		१०	३

(२१) निम्नलिखित सामग्री किसी दूकान में एक सप्ताह के दरमियान में वेचे गये जूतों के नापों से सम्बन्धित है। लघु-रीति के द्वारा समान्तर माध्य निकालिये :

Ladies

जूतों का नाप	जूतों के जोड़ी की संख्या	जूतों का नाप	जूतों के जोड़ों की संख्या
४.५	१	८	९५
५	२	८·५	८२
५.५	४	९	७५
६	५	९·५	४४
६.५	१५	१०	२५
७	३०	१०·५	१५
७.५	६०	११	४

(२२) निम्नलिखित वारंवारता वंटन से समान्तर मध्यक निकालिये :

मासिक मजदूरी	मजदूर	मासिक मजदूरी	मजदूर
रु० रु०		रु० रु०	
१२·५—१७·५	२	३७·५—४२·५	४
१७·५—२२·५	२२	४२·५—४७·५	६
२२·५—२७·५	१९	४७·५—५२·५	१
२७·५—३२·५	१४	५२·५—५७·५	१
३२·५—३७·५	३		

(२३) निम्नलिखित वारंवारता वंटन में विभिन्न खेतों में ईख का उत्पादन मूल्य दिया हुआ है। समान्तर माध्य निकालिये :

	वारंवारता		वारंवारता
२— ६	१	१८—२२	५२
६—१०	९	२२—२६	३६
१०—१४	२१	२६—३०	१९
१४—१८	४७	३०—३४	३

(२४) दो जिलों में विभिन्न खेतों के लिए, गुड़ के उत्पादन मूल्य (प्रति मन, रुपयों में) का बारंबारता बंटन नीचे दिया हुआ है। प्रत्येक जिले का समान्तर मध्यक मूल्य निकालिए, तथा इस बात की जाँच कीजिए कि क्या इनमें अर्थसूचक अन्तर है :

मूल्य रुपयों में (प्रति मन)	जिला (क)	जिला (ख)	मूल्य रुपयों में (प्रति मन)	जिला (क)	जिला (ख)
२–३	९	१	८–९	५	१०
३–४	३२	१०	९–१०	२	९
४–५	३७	३४	१०–११	१	५
५–६	२१	२३	११–१२	२	२
६–७	१३	२१	१२–१३	१	१
७–८	७	१४			

(२५) निम्न सारणी में सन् १९३१ की संगणना के समय भारतवर्ष तथा इंगलैंड की जनसंख्या विभिन्न आयु-वर्गों में दी गई है :

आयु-वर्ग	इंगलैंड की जनसंख्या (लाख में)	भारतवर्ष की जनसंख्या (लाख मे)	आयु-वर्ग	इंगलैंड की जनसंख्या (लाख में)	भारतवर्ष की जनसंख्या (लाख में)
०– ५	१८	२१८	२५–३०	१४	१६१
५–१०	१९	२५८	३०–४०	२७	२५७
१०–१५	२०	२२२	४०–५०	२५	१८४
१५–२०	१८	१५७	५०–६०	१९	१२०
२०–२५	१६	१४५	६०सेअधिक	१७	१००

इन दो देशों के पुरुषों की समान्तर मध्यक आयु की तुलना कीजिए। अगर कोई अन्तर हो तो उसका कारण बताइए।

(२६) निम्न सारणी से एक विद्यार्थी के समान्तर मध्यक प्राप्तांक निकालिए :

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या	
१० से कम	२५	
२० ,, ,,	४०	
३० ,, ,,	६०	
४० ,, ,,	७५	
५० ,, ,,	९५	
६० ,, ,,	१२५	
७० ,, ,,	१९०	
८० ,, ,,	२४०	

(२७) निम्नलिखित सारणी से एक मजदूर की समान्तर मध्यक मजदूरी निकालिए :

मजदूरी रुपयों में	मजदूरों की संख्या	(मजदूरी रुपयों में)	मजदूरों की संख्या
० से अधिक	६५०	५० से अधिक	२७५
१० ,, ,,	५००	६० ,, ,,	२५०
२० ,, ,,	४२५	७० ,, ,,	१००
३० ,, ,,	३७५		
४० ,, ,,	३००		

(२८) निम्नलिखित सारणी में सन् १९२९ ई० में अमेरिका में विभिन्न आय वाले व्यक्तियों की संख्या दी गई है :

आय (हजार डालरों में)	व्यक्तियों की संख्या (लाख में)
१ से कम	१३
१ से २	९०
२– ३	८१
३– ५	११७
५– १०	६६
१०– २५	२७
२५– ५०	६
५०– १००	२
१००–१०००	२

प्रति व्यक्ति की समान्तर मध्यक आय निकालिए ।

(२९) निम्नलिखित सारणी से एक पौंड चाय का समान्तर मध्यक मूल्य निकालिए तथा साथ ही भारित समान्तर मध्यक मूल्य भी निकालिए :

मूल्य प्रति पौंड			बेचे गये पौंड
रु०	आ०	पा०	
१	०	०	२००
१	६	०	२७५
१	१०	०	४००
१	१२	०	१५०
२	०	०	१००
२	४	०	७५
२	८	०	५०

(३०) एक मोटर बस २०० मील की यात्रा तय करती है, जिसमें से प्रथम १०० मील, ५० मील प्रति घंटे के हिसाब से तथा द्वितीय १०० मील, ४० मील प्रति घंटे के हिसाय से तय करती है। मोटर-बस की समान्तर मध्यक-गति क्या है ?

(३१) निम्नलिखित मालाओं (series) का गुणोत्तर मध्यक (geometric mean) निकालिए :

(अ)	(ब)
२५७४	·८९७४
४७५	·०५७०
७५	·००८१
५	·५६७७
·८	·०००२
·०८	·०९८४
·००५	·०८५४
·०००९	·५६७२

(३२) निम्नलिखित सारणी निर्वाह-व्यय में आने वाले विभिन्न पदों के देशनांक (index numbers) दिए हुए हैं। इन पदों का भारित समान्तर मध्यक निकाल

कर निर्वाह-व्यय देशनांक बनाइए। प्रयोग में लाने के लिए भार भी सारणी में दिये गये हैं :

पद	देशनांक	भार
१—कपड़ा	७७·३	१३
२—भोजन	७४·५	४३
३—कोयला (ईंधन) तथा रोशनी	८५·८	६
४—मकान	६४·६	१८
५—अन्य	९२·५	२०

(३३) एक आदमी अ से ब तक मोटर से जाता है। दूरी का एक बड़ा भाग पहाड़ी है और वह १० मील की यात्रा तय करने में १ गैलन पेट्रोल खर्च करता है। लौटती बार वह १५ मील के लिए १ गैलन पेट्रोल खर्च करता है। मीलों का हरात्मक मध्यक (harmonic mean) निकालिये। इस तथ्य को, यह कल्पना करते हुए कि अ से ब तक की दूरी ६० मील है, स्पष्ट करिये कि यह उचित माध्य है।

(३४) निम्नलिखित पदों का भारित हरात्मक मध्यक (weighted harmonic mean) निकालिए :

पद	भार
१	५
५	१०
१०·०	२०
४५·०	१०
१७५·०	१५
·०१	२
४·०	१५
११·२	८

(३५) मृत्यु-अर्घों के आधार पर, इस बात का निर्णय करने के लिए कि क्या एक नगर दूसरे से अधिक स्वस्थ है, आपको दो नगरों की कुल मृत्यु-संख्या तथा कुल जनसंख्या के अतिरिक्त किन बातों की जानकारी करनी होगी? आप इस जानकारी का प्रयोग यह निश्चय करने के लिए कि एक नगर दूसरे नगर से अधिक स्वस्थ है, किस प्रकार करेंगे?

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९३५)

(३६) एक अच्छे माध्य में क्या-क्या विशेषताएँ होनी चाहिये ? समान्तर मध्यक मध्यका तथा गुणोत्तर मध्यक की विशेषताएँ बतलाइये ।

वारंवारता वंटन में माध्य से लिये गये विचलनों को वर्गान्तर से विभाजित कर, समान्तर मध्यक निकालने की रीति को समझाइये, इससे सम्बन्धित सूत्र मालूम करिये तथा उसका उपयोग निम्न वंटन का समान्तर मध्यक निकालने में कीजिए :—

चल	५,	१०,	१५,	२०,	२५,	३०,	३५,	४०,	४५,	५०
वारंवारता	२०,	४३,	७५,	६७,	७२,	४५,	३९,	९,	८,	६

(पी० सी० एस० १९५४)

(३७) निम्नलिखित सारणी किसी स्थान के २४ परिवारों की मासिक आय बतलाती है :—

क्रम संख्या	मासिक आय रुपयों में	क्रम संख्या	मासिक आय रुपयों में
१	६०	१३	९६
२	४००	१४	९८
३	८६	१५	१०४
४	९५	१६	७५
५	१००	१७	८०
६	१	१८	९४
७	०	१९	१००
८	७४	२०	७५
९	९०	२१	६००
१०	९२	२२	८२
११	२८०	२३	२००
१२	१८०	२४	८४

उपरोक्त वंटन का समान्तर मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक निकालिये । कौन-सा माध्य इस श्रेणी का सबसे उपयुक्त प्रतिनिधित्व करता है कारण दीजिए ।

(पी० सी० एस० १९५५)

(३८) आपको निम्नलिखित सामग्री जनसंख्या तथा बेकारी के बारे में दी गई है, यह सामग्री—

(अ) आपके कुल देश के बारे में एक प्रमापित आयु वंटन के लिए तथा

(ब) स्थानीय क्षेत्र जहाँ आप रहते हैं वहाँ के बारे में है,, इससे आप (अ) समस्त देश के लिए प्रमापित बेकारी अर्घ, (ब) स्थानीय क्षेत्र के लिए प्रमापित बेकारी अर्घ तथा (स) स्थानीय क्षेत्र के लिए अशोधित बेकारी अर्घ निकालिए।

	१६–३०	३०–४५	४५–६०	६०...	योग
प्रमापित जनसंख्या					
आयु वंटन	२५०	३५०	३००	१००	१०००
बेकारी की प्रतिशत दर	५	८	१२	१५	...
स्थानीय जनसंख्या					
आयु वंटन	३००	३००	३५०	५०	१०००
बेकारी की प्रतिशत दर	४	९	१२	२०	...

(पी० सी० एस० १९५६)

———

अध्याय ८

अपकिरण और विषमता

(Dispersion & Skewness)

अपकिरण

माध्य किसी वंटन (distribution) का प्रतिनिधित्व करता है। पर किसी भी वंटन के सब पद उसके माध्य के बराबर नहीं होते। अगर केवल माध्य ज्ञात हो तो वंटन के बारे में पूरी-पूरी जानकारी नहीं मिलती। हम यह भी जानना चाहते हैं कि विभिन्न पदों के मूल्यों और उनके माध्य के बीच कितना अन्तर है; इन पदों के माध्य से विचरण (variations) कितने हैं? सांख्यिकी में इन विचरणों को अपकिरण (dispersion) कहा जाता है। **किसी समूह का अपकिरण (dispersion) उसके माध्य से उसके विभिन्न पदों का विचरण (variation) है।** अपकिरण का उद्देश्य यह बताना है कि माध्य को किस हद तक समूह का प्रतिनिधि माना जा सकता है। अगर किसी समूह का अपकिरण अधिक है तो माध्य को उसका अच्छा प्रतिनिधि नहीं माना जा सकता।

वास्तव में माध्यों और अपकिरणों की मापों का उपयोग इसलिए किया जाता है कि विभिन्न वारंवारता वंटनों (frequency distributions) में क्या भेद है, यह ज्ञात हो जाय। वारंवारता वंटन दो प्रकार से एक-दूसरे से भिन्न हो सकते हैं:

(१) उनके माध्य अलग-अलग हों पर माध्यों से उनके पदों के विचलन (deviation) एक से हों। इस प्रकार की भिन्नता उनके पदों के मूल्यों की भिन्नता बताती है। जैसे, दो वंटनों ३, ४, ५, ६, ७ और १५, १६, १७, १८, १९, में माध्यों के मूल्य विभिन्न (क्रमशः ५ और १७) हैं पर माध्यों से विभिन्न पदों के मूल्यों का विचलन (—२, —१, ०, १, २) एक समान हैं, इन दो वंटन की आकृति एक-सी है।

(२) या उनकी आकृति अलग-अलग हो पर माध्य एक हों। अर्थात् माध्य से उनके विभिन्न पदों के विचरण अलग-अलग हों। जैसे, दो वंटनों, २, ३, ५, ६, ९ और ३, ४, ५, ६, ७, में माध्य तो बराबर हैं—दोनों का माध्य ५ है—पर माध्य से विभिन्न पदों के विचलन (क्रमशः—३, –२, ०, १, ४ और –२, –१, ०, १, २) अलग-अलग हैं।

यदि वंटनों की आकृति में कोई अन्तर न हो तो माध्यों की तुलना से ही इनके अन्तर

स्पष्ट हो जायँगे । पर यदि इनकी आकृति भिन्न-भिन्न हुई तो केवल माध्य उनके वारे में पूरी जानकारी नहीं देते । ऐसी दशाओं में केवल माध्य वताना वंटन के वारे में गलत धारणा तक वना सकता है । इसलिए वंटन को निश्चित करने के लिए न केवल उसके माध्य को निश्चित करना पड़ता है वल्कि माध्य से उसके पदों के विचलनों (deviations) का भी माप देना पड़ता है । इस परिच्छेद में इन मापों की गणना करने की विधियाँ वतलाई जायँगी । इस प्रकार के विभिन्न माप जिनका सांख्यिकी में उपयोग किया जाता है, निम्नलिखित हैं :

(१) विस्तार (range)

(२) चतुर्थक विचलन (quartile deviation) या अर्ध-अन्तर्चतुर्थक विस्तार (semi-inter-quartile range) ।

(३) माध्य विचलन (mean deviation)

  (क) समान्तर मध्यक से ।

  (ख) मध्यका से ।

  (ग) भूयिष्ठक से ।

(४) प्रमाप विचलन (standard deviation)

(५) लौरेन्ज वर्क (Lorenz curve)

अपकिरण माप **द्विघातीय माध्य** (averages of the second order) भी कहे जाते हैं क्योंकि इनकी गणना करने में एक घातीय माध्यों (मध्यका, भूयिष्ठक, समान्तर मध्यक इत्यादि) का प्रयोग करना पड़ता है ।

निरपेक्ष तथा सापेक्ष अपकिरण (absolute and relative dispersion) अपकिरण या तो उन्हीं इकाइयों में वतलाया जा सकता है जिनमें सामग्री का संग्रह किया गया हो या फिर इसे प्रतिशतता अथवा अर्घ के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है । यदि हम एक ऐसी माला का अपकिरण निकालना चाहते हैं जिसके कुछ व्यक्तियों की आय के वारे में सामग्री एकत्रित की गई है तो इस माला का माध्य और अपकिरण दोनों ही रुपयों में वतलाये जा सकते हैं । हम यह कह सकते हैं कि इस माला का माध्य १२० रुपया है और अपकिरण २० रुपया । इस प्रकार का अपकिरण जो उन्हीं इकाइयों में व्यक्त किया गया हो जिनमें सामग्री एकत्रित की गई है **निरपेक्ष अपकिरण** (absolute dispersion) कहलाता है । अपकिरण को सापेक्षिक रूप में भी रखा जा सकता है, ऐसी हालत में अपकिरण किसी विशेष इकाई के रूप में नहीं होता वल्कि प्रतिशतता या अर्घ के रूप में होता है, उपरोक्त उदाहरण में यदि यह कहा जाय कि अपकिरण माध्य का $\frac{२०}{१२०}$ वाँ या ·१६७ वाँ हिस्सा या माध्य का १६·७ प्रतिशत है तो यह अपकिरण की सापेक्षिक

माप हुई। प्रतिशतता या अर्थ के रूप में प्रस्तुत अपकिरण सापेक्षिक अपकिरण (relative dispersion) कहलाता है। जब दो मालाओं के अपकिरण की तुलना करनी होती है तो यह आवश्यक होता है कि अपकिरण सापेक्षिक रूप से व्यक्त किया जाय अन्यथा तुलना भ्रमात्मक हो सकती है।

विस्तार
(Range)

अगर कोई वंटन (distribution) दिया हो तो उसके माध्य के दोनों ओर कुछ पद होंगे। इनके पदों में दोनों ओर एक ऐसा पद मिलेगा जिसका और मध्यक का अन्तर अधिकतम होगा। ऐसे दोनों ओर के पदों का अन्तर उस वंटन का विस्तार कहलाता है। अर्थात् किसी वंटन का विस्तार (range) उसके अधिकतम और न्यूनतम मूल्य वाले पदों के मूल्यों का अन्तर है। किसी समूह के पद क्रमशः १०, १२, १५, १९, २३, १२, १७ हैं। इनमें अधिकतम मूल्य वाला पद २३ है और न्यूनतम मूल्य वाला पद १० है। इसलिए इस समूह का विस्तार २३—१०=१३ हुआ।

यह विस्तार की निरपेक्ष (absolute) माप है, यदि हमें विस्तार की सापेक्ष माप निकालनी हो तो यह इस निरपेक्ष माप को वंटन के अधिकतम तथा न्यूनतम मूल्यों वाले पदों के योग से विभाजित करके मालूम की जा सकती है। इस उदाहरण में यदि हम १३ को (२३+१०)=३३ से भाग दे दें तो उत्तर ·४ आवेगा। यह विस्तार की सापेक्ष (relative) माप हुई। इसे विस्तार गुणक (coefficient of range) भी कहते हैं। किसी वंटन का विस्तार (range) उसके अपकिरण (dispersion) को नापने का सबसे सरल तरीका है। इसको समझना भी बहुत आसान है। इसलिए इसका उपयोग ऐसे स्थलों में प्रायः किया जाता है जहाँ गणना की सरलता और समझने की आसानी के लिए परिशुद्धता (accuracy) का त्याग किया जा सकता है। पर साधारणतया सुविधा के कारण परिशुद्धता का त्याग नहीं किया जा सकता। इसलिए जहाँ कहीं अपकिरण (dispersion) के लिए सन्तोषजनक माप की आवश्यकता होती है, इसका उपयोग नहीं किया जाता है। इसका उपयोग न करने के पक्ष में जो तर्क हैं वे निम्नलिखित हैं :—

(१) इसका मान वंटन के चरम पदों (extreme items) के मूल्य पर निर्भर रहता है। अन्य पदों के मूल्य यदि एक से रहें पर चरम पदों के मूल्यों में यदि परिवर्तन हो जाय तो वंटन का विस्तार प्रभावित हो जायगा। साथ ही साथ किसी वंटन के चरम पद असामान्य उच्चावचनों (fluctuations) के कारण होते हैं, और किसी भी अनुसंधान (inquiry) में इनको कम से कम महत्व देने का प्रयत्न किया जाता है। उदाहरण के

लिए एक वंटन ६, ७, ८, ९, १०, ११, १२ को लीजिए। इसका विस्तार ६ है और समान्तर माध्य ९। अब यदि आकस्मिकता के कारण दो अन्य पदों, जिनके मूल्य २ और १६ हैं, का इस वंटन में समावेश कर लिया जाय तो समान्तर माध्य वही, ९ रहेगा, पर इस वंटन का विस्तार (range) १४ हो जायगा। वस्तुतः किसी चल के चरम मूल्य (extreme values) कम मिलते हैं, पर यदि वे आकस्मिकता के कारण वंटन में हों तो उसका विस्तार (range) पर्याप्त रूप से प्रभावित हो जाता है।

(२) दूसरा कारण जिसकी वजह से इसका उपयोग नहीं करना चाहिए यह है कि यह चरम मूल्यों के अतिरिक्त अन्य किसी पद के विचलन (deviation) पर विचार नहीं करता। यदि किन्हीं दो वंटनों के चरम-पदों के मूल्य आपस में बराबर हों तो उनका विस्तार बराबर होगा पर उनके अन्य पदों के विचलन एक-दूसरे से भिन्न हो सकते हैं यहाँ तक कि उनकी आकृतियों में कोई भी समानता न हो। उदाहरण के लिए दो वंटनों के विस्तार, जिनमें एक **असंमितीय** (asymmetrical) हो और दूसरा **संमितीय** (symmetrical) बराबर हो सकते हैं। पर यदि इसके बल पर यह कहा जाय कि उनके पदों के अपकिरण (dispersions) एक से हैं, अर्थात् उनकी आकृति एक-सी है, तो गलती होगी।

चतुर्थक विचलन

(Quartile Deviation)

अपकिरण (dispersion) की दूसरी माप जिसका प्रयोग किया जाता है वह चतुर्थक विचलन है। किसी वंटन के प्रथम और तृतीय चतुर्थकों के बीच में उसके ५० प्रतिशत पद होते हैं। इन पदों के (जो मध्यका के आस-पास होते हैं) चरम मूल्यों का अन्तर यह बता देता है कि सामान्यतः प्राप्त होनेवाले चल के मूल्यों में कितना अन्तर है। यदि किसी वंटन के प्रथम और तृतीय चतुर्थक क्रमशः $चतु_1$ और $चतु_3$ हैं तो उस समूह के लिए चतुर्थक विचलन, च० वि० निम्न सूत्र के रूप में व्यक्त किया जायगा :

चतुर्थक विचलन	Quartile Deviation
$च० \; वि० = \frac{चतु_3 - चतु_1}{२}$	$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

क्योंकि इसकी गणना करने में तृतीय और प्रथम चतुर्थक के अन्तर को २ से विभाजित किया जाता है इसलिए इसे अर्ध-अन्तर-चतुर्थक-विस्तार (semi-inter-quartile range) भी कहते हैं।

उदाहरण १

एक स्कूल के विद्यार्थियों को उम्र के अनुसार वर्गित किया गया। इसके परिणाम निम्नलिखित सारणी में दिये गये हैं:

विद्यार्थियों की उम्र	६–७	७–८	८–९	९–१०	१०–११	११–१२	१२–१३
विद्यार्थियों की संख्या	१४	२०	४२	५४	४५	१८	६

इस सामग्री का चतुर्थक विचलन निकालिए।

हल

चतुर्थक विचलन निकालना

विद्यार्थियों की उम्र	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी बारंबारता
६– ७	१४	१४
७– ८	२०	३४
८– ९	४२	७६
९–१०	५४	१३०
१०–११	४५	१७५
११–१२	१८	१९३
१२–१३	६	१९९

$$\text{चतु}_1 = \left(\frac{१९९+१}{४}\right) \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$= ५० \text{वें पद का मूल्य}$$

$$= ८ + \left\{ \frac{(९-८)}{४२} (५० - ३४) \right\}$$

$$= ८\cdot३८$$

$$\text{चतु}_3 = ३\left(\frac{१९९+१}{४}\right) \text{वें पद का मूल्य}$$

$$= १५० \text{वें पद का मूल्य}$$

$$= १० + \left\{ \frac{(११ - १०)}{४५} (१५० - १३०) \right\}$$

$$= १०.४४$$

$$च॰ वि॰ = \frac{चतु_3 - चतु_1}{२}$$

$$= \frac{१०.४४ - ८.३८}{२}$$

$$= १.०३$$

$$Q_1 = \text{size of} \left(\frac{199+1}{4}\right)^{th} \text{item}$$

$$= \text{size of } 50^{th} \text{ item}$$

$$= 8 + \left\{ \frac{(9-8)}{42} (50 - 34) \right\}$$

$$= 8.38$$

$$Q_3 = \text{size of } 3 \left(\frac{119+1}{4}\right)^{th} \text{ item}$$

$$= \text{size of } 150^{th} \text{ item}$$

$$= 10 + \left\{ \frac{(11 - 10)}{45} (150 - 130) \right\}$$

$$= 10.44$$

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{10.44 - 8.38}{2}$$

$$= 1.03$$

चतुर्थक विचलन अपकिरण का निरपेक्ष माप (absolute measure) है। सापेक्ष (relative) चतुर्थक विचलन को चतुर्थक अपकिरण गुणक (quartile co-efficient of dispersion) या चतुर्थक विचलन गुणक (co-efficient of quartile deviation) कहा जाता है। इसका मूल्य चतुर्थक विचलन को चतुर्थकों के समान्तर माध्य से विभाजित करके ज्ञात होता है। उपरोक्त उदाहरण के लिए चतुर्थक अपकिरण गुणक निम्न प्रकार ज्ञात होगा :—

चतुर्थक अपकिरण गुणक :

$$= \frac{\frac{\text{चतु}_3 - \text{चतु}_1}{२}}{\frac{\text{चतु}_3 + \text{चतु}_1}{२}} = \frac{\text{चतु}_3 - \text{चतु}_1}{\text{चतु}_3 + \text{चतु}_1}$$

$$= \frac{१०\cdot४४ - ८\cdot३८}{१०\cdot४४ + ८\cdot३८}$$

$= \cdot०५५$

Coefficient of quartile dispersion

$$= \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{\frac{Q_3 + Q_1}{2}} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{10\cdot44 - 8\cdot38}{10\cdot44 + 8\cdot38}$$

$= \cdot055$

चतुर्थक विचलन के लाभ तथा कमियाँ

विस्तार (range) की भाँति इसके मूल्य पर चरम पदों के मूल्यों का प्रभाव नहीं पड़ता। इसकी गणना करना अपेक्षाकृत सरल है। इसका समझना भी आसान है। यह स्पष्ट रूप से बताता है कि समूह के मध्य में स्थित समूह के ५०% पदों के मूल्यों में कितना अन्तर है। यदि किसी समूह में पहला और अन्तिम पद अनिश्चित है तो इसका उपयोग किया जाता है। इसका उपयोग प्रायः उन स्थलों में किया जाता है जहाँ विस्तार का उपयोग होता है।

इसकी कमी यह है कि यह प्रत्येक पद के माध्य से विचलन पर विचार नहीं करता अर्थात् प्रथम और तृतीय चतुर्थक के बीच में पद किस आकृति में है इसका यह कोई ज्ञान नहीं देता। यदि वंटन असंमितीय (asymmetrical) हुआ तो इसका उपयोग करना वांछनीय नहीं है।

माध्य विचलन

(Mean Deviation)

विस्तार (range) और चतुर्थक विचलन की गणना करने में समूह के सब पदों के विचलनों पर विचार नहीं किया जाता है। अधिक परिशुद्धता (accuracy) के लिए समूह के सब पदों पर विचार करना आवश्यक है। अपकिरण के इन मापों (जिनमें समूह के सब पदों पर विचार किया जाता है) में मध्यक विचलन की गणना करना सबसे आसान है। इसकी गणना करने के लिए किसी माध्य (समान्तर मध्यक, मध्यका या भूयिष्ठक) से समूह के पदों के विचलनों की गणना कर ली जाती है। इन विचलनों के निरपेक्ष (absolute) मूल्यों का समान्तर माध्य निकाला जाता है, यही माध्य विचलन है। इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि श्रेणी के किसी माध्य (समान्तर मध्यक, मध्यका या भूयिष्ठक) से विचलनों के निरपेक्ष मूल्यों के समान्तर माध्य को उस श्रेणी का माध्य

विचलन कहते हैं। इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि विचलनों के निरपेक्ष मूल्य लिए जाँय, अर्थात् विचलनों के चिह्न (ऋण या धन) छोड़ कर केवल धन चिह्न मानना चाहिए क्योंकि समान्तर माध्य से लिए गये विचलनों का योग शून्य होता है और अन्य माध्यों (मध्यका और भूयिष्ठक) से लिए गये विचलनों का योग भी शून्य के आस-पास या बहुत कम होता है।

गणितीय रूप से माध्य विचलन मालूम करने के सूत्र निम्न प्रकार लिखे जा सकते हैं :

(१) $\text{चि}_{\text{म}} = \dfrac{\text{यो}_{\text{चम}}}{\text{स}}$

जब कि, चि = माध्य विचलन

$\text{यो}_{\text{चम}}$ = मध्यक से विचलनों का योग

$\text{चि}_{\text{म}}$ = मध्यक द्वारा माध्य विचलन

(२) $\text{चि}_{\text{मा}} = \dfrac{\text{यो}_{\text{चमा}}}{\text{स}}$

जब कि, $\text{यो}_{\text{चमा}}$ = मध्यका से विचलनों का योग

$\text{चि}_{\text{मा}}$ = मध्यका द्वारा माध्य विचलन

(३) $\text{चि}_{\text{भू}} = \dfrac{\text{यो}_{\text{चभू}}}{\text{स}}$

जबकि $\text{यो}_{\text{चभू}}$ = भूयिष्ठक से विचलनों का योग

$\text{चि}_{\text{भू}}$ = भूयिष्ठक द्वारा माध्य विचलन

(1) $\delta_a = \dfrac{\Sigma d_a}{n}$

where, δ = mean deviation

Σd_a = Summation of deviations from mean.

δ_a = mean deviation from mean

(2) $\delta_m = \dfrac{\Sigma d_m}{n}$

where, Σd_m = Summation of deviations from median.

δ_m = mean deviation from median

(3) $\delta_z = \dfrac{\Sigma d_z}{n}$

where, Σd_z = Summation of deviations from mode

δ_z = mean deviation from mode

ऊपर दिये हुए सूत्रों से हम निरपेक्ष माध्य विचलनों का अध्ययन कर सकते हैं परन्तु

विभिन्न समूहों के माध्य विचलनों की इस रूप में परस्पर तुलना करना सम्भव नहीं क्योंकि इन समूहों की इकाइयाँ अलग-अलग होंगी। तुलना करने के लिए यह आवश्यक है कि या तो समूह एक ही इकाइयों में व्यक्त किये जा सकें—जैसा कि साधारणतया सम्भव नहीं—या उनके माध्य विचलनों को बिना इकाई के होना चाहिये। ऐसा करने के लिए माध्य विचलन को उस माध्य से विभाजित किया जाता है जिससे विचलन लिए गए हों। यदि समान्तर माध्य से विचलन लिए गए हों तो विचलनों के योग को समान्तर माध्य ही से विभाजित किया जायगा। इसको **माध्य विचलन का गुणक** (coefficient of mean deviation) कहा जाता है। सूत्रों के रूप में ऊपर दिये हुए माध्य विचलनों का गुणक क्रमशः इस प्रकार होगा।

माध्य विचलन का गुणक	Coefficient of Mean Deviation
(१) समान्तर माध्य से $= \frac{\text{चि}_\text{म}}{\text{म}}$	(1) from arithmetic average $= \frac{\delta_a}{a}$
(२) मध्यका से $= \frac{\text{चि}_\text{मा}}{\text{मा}}$	(2) from median $= \frac{\delta_m}{m}$
(३) भूयिष्ठक से $= \frac{\text{चि}_\text{भू}}{\text{भू}}$	(3) from mode $= \frac{\delta_z}{z}$

निम्नलिखित उदाहरणों से यह सूत्र स्पष्ट हो जाएंगे।

साधारण श्रेणी का माध्य विचलन निकालना

उदाहरण २

निम्नलिखित संख्याओं का माध्य विचलन तथा माध्य विचलन गुणक निकालिए:—
४, ६, ९, ११, १३, १८, १९, २२, तथा २४।

हल

माध्य विचलन तथा उसका गुणाक निकालना

क्रम संख्या	मूल्य (values) य (x)	विना ± चिह्न के मध्यका (१३) से विचलन (deviations from median (13), ± signs ignored) $च_{मा}$ (d_m)	विना ± चिह्न के समान्तर मध्यक (१४) से विचलन (deviations from a. a. ± signs ignored) $च_म$ (d_a)
१	४	९	१०
२	६	७	८
३	९	४	५
४	११	२	३
५	१३	०	१
६	१८	५	४
७	१९	६	५
८	२२	९	८
९	२४	११	१०
स = ९ (n)	$यो_य$ = १२६ (Σx)	$यो_{चमा}$ = ५३ (Σd_m)	$यो_{चम}$ = ५४ (Σd_a)

(१) मध्यका

$$मा = \left(\frac{९+१}{२}\right) \text{ वें या ५वें पद}$$

का मूल्य = १३

माध्य विचलन (मध्यका से)

$$चि_{मा} = \frac{यो_{चमा}}{स} = \frac{५३}{९} = ५\cdot९$$

(1) Median

$$m = \text{size of } \left(\frac{9+1}{2}\right)^{th}$$

or 5^{th} item = 13

Mean dev. (from median)

$$\delta_m = \frac{\Sigma d_m}{n} = \frac{53}{9} = 5\cdot9$$

माध्य विचलन गुणक

$$= \frac{चि_{मा}}{मा} = \frac{५\cdot९}{१३} = \cdot४५$$

Coefficient of m. d

$$= \frac{\delta m}{m} = \frac{5\cdot9}{13} = \cdot45$$

(२) समान्तर मध्यक =

$$म = \frac{यो_{य}}{स} = \frac{१२६}{९} = १४$$

(2) Arithmetic average

$$a = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{126}{9} = 14$$

माध्य विचलन (समान्तर मध्यक से)

$$चि_{म} = \frac{यो_{चम}}{स}$$

$$= \frac{५४}{९} = ६$$

mean dev. (from a. a.)

$$\delta_a = \frac{\Sigma d_a}{n}$$

$$= \frac{54}{9} = 6$$

माध्य विचलन गुणक

$$= \frac{चि_{म}}{म} = \frac{६}{१४} = \cdot४३$$

Coefficient of mean dev.

$$= \frac{\delta_a}{a} = \frac{6}{14} = .43$$

खंडित श्रेणी का माध्य विचलन निकालना

उदाहरण ३

निम्न वारंवारता वंटन से माध्य विचलन (मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक से) निकालिए।

चल का मूल्य (size of item)	२	३	४	५	६	७	८	१४
वारंवारता (frequency)	३	६	६	१०	४	४	२	१

माध्य विचलन निकालना

हल

चल का मूल्य (size of item) य (x)	वारंवारता (frequency) व (f)	य×व (x×f)	संचयी वारंवारता (cumulative frequency)	मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक (५) से बिना ± के विचलन $च_म, च_{मा}, च_{भू}$ (d_a, d_m, d_z)	कुल विचलन वारंवारता × विचलन (frequency × deviation)
२	३	६	३	३	९
३	६	१८	९	२	१२
४	६	२४	१५	१	६
५	१०	५०	२५	०	०
६	४	२४	२९	१	४
७	४	२८	३३	२	८
८	२	१६	३५	३	६
१४	१	१४	३६	९	९
	स=३६ (n)	$यो_{चय}$=१८० (Σf_x)			योग=५४

समान्तर मध्यक $=\frac{१८०}{३६}=५$

मध्यका $=\left(\frac{३६+१}{२}\right)$वें या

१८·५वें पद का मूल्य

$=५$

भूयिष्ठक $=५$

माध्य विचलनः—

क्योंकि म = मा = भू

$\therefore$ चि$_{म}$ = चि$_{मा}$ = चि$_{भू}$

$=\frac{५४}{३६}=१·५$

माध्य विचलन गुणक

$=\frac{१·५}{५}=·३$

Arithmetic average

$=\frac{180}{36}=5$

Median = size of $\left(\frac{36+1}{2}\right)^{th}$

or 18·5th item = 5

Mode = 5

Mean deviation:—

since a = m = z

$\therefore \delta_a=\delta_m=\delta_z$

$=\frac{54}{36}=1·5$

Coefficient of mean deviation

$=\frac{1·5}{5}=·3$

नोट :—क्योंकि उपरोक्त उदाहरण में मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक का मूल्य बराबर है इसलिए इन माध्यों से लिए गये विचलनों तथा उनके गुणक में भी कोई अन्तर नहीं है।

संतत श्रेणी का माध्य विचलन निकालना

उदाहरण ३

निम्नलिखित वारंवारता बंटन से माध्य विचलन (मध्यक तथा मध्यका से) निकालिए। माध्य विचलन का गुणक भी मालूम करिये।

प्राप्तांक	०–१०	१०–२०	२०–३०	३०–४०	४०–५०
विद्यार्थियों की संख्या	५	७	२०	८	५

माध्य विचलन निकालना

हल

प्राप्तांक	वर्ग का मध्य-मूल्य (mid-value)	बारंबारता (frequency)	मध्यका (२५·५) से विचलन (dev. from median) च_{मा} (d_m)	मध्यका से कुल विचलन (total dev. from median)	मध्यक (२५·२) से विचलन (dev. from a. a.) च_म (d_a)	मध्यक से कुल विचलन (total dev. from a.a.)
०—१०	५	५	२०·५	१०२·५	२०·२	१०१·०
१०—२०	१५	७	१०·५	७३·५	१०·२	७१·४
२०—३०	२५	२०	·५	१०·०	·२	४·०
३०—४०	३५	८	९·५	७६·०	९·८	७८·४
४०—५०	४५	५	१९·५	९७·५	१९·८	९९·०
		स (n) = ४५		यो चमा (Σd_m) = ३५९·५		यो चम (Σd_a) = ३५३·८

(१) अन्तर्गणना के अनुसार मध्यका = २५·५

मध्यका से माध्य विचलन

$$चि_{मा} = \frac{यो_{चमा}}{स} = \frac{३५९·५}{४५}$$

$$= ७·९$$

माध्य विचलन गुणक (मध्यका से)

$$= \frac{चि_{मा}}{मा} = \frac{७·९}{२५·५} = ·३$$

(२) समान्तर मध्यक = २५·२

स० म० से माध्य विचलन

$$चि_{म} = \frac{यो_{चम}}{स} = \frac{३५३·८}{४५}$$

$$= ७·८$$

माध्य विचलन गुणक (स० म० से)

$$= \frac{चि_{म}}{म} = \frac{७·८}{२५·२}$$

$$= ·३$$

(1) By interpolation Median = 25·5

Mean deviation (from median)

$$\delta_m = \frac{\Sigma dm}{n} = \frac{359·5}{45}$$

$$= 7·9$$

Coefficient of mean dev. from median)

$$\frac{dm}{m} = \frac{7·9}{25·5} = ·3$$

(2) Arithmetic average = 25·2

Mean deviation (from a.a)

$$\delta_a = \frac{\Sigma d_a}{n} = \frac{353·8}{45}$$

$$= 7·8$$

Coefficient of mean dev. from a.a.)

$$\frac{d_a}{a} = \frac{7·8}{25·2}$$

$$= ·3$$

माध्य विचलनों के लाभ तथा कमियाँ

माध्य विचलनों और माध्य विचलन गुणकों की गणना करना अपेक्षाकृत सरल है। इनकी गणना करने में सब पदों पर विचार किया जाता है इसलिए यह किसी पद विशेष के अनुचित प्रभाव से मुक्त हैं। इनके अधिक प्रचलित न होने का कारण यह है कि इनका बीजगणितीय रीतियों में प्रयोग नहीं किया जा सकता।

प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

अब तक जिन अपकिरण के मापों का वर्णन किया गया है उनका प्रचलन गणना की सरलता और समझने में आसानी के कारण होता है। इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि माध्य या अपकिरण के माध्य केवल उपादान (tools) हैं, और किसी भी उपादान के लिए यह आवश्यकीय है कि उसका उपयोग सरलता के साथ किया जा सके। विस्तार या

मध्यक विचलनों में मुख्य दोष यह है कि इनका उपयोग बीजगणितीय रीतियों में नहीं किया जा सकता। इसलिए ये आगे के कार्य के लिए उपयुक्त नहीं है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए प्रमाप विचलन (standard deviation) का उपयोग किया जाता है। प्रमाप विचलन सांख्यिकी में काम आने वाले अपकिरणों के मापों में सबसे अधिक प्रचलित है।

ऋजु रीति (Direct Method)

किसी समूह का प्रमाप विचलन (standard deviation) **उस समूह के समान्तर माध्य से उसके विभिन्न पदों के विचलनों के वर्ग के समान्तर माध्य का वर्गमूल** (square root) है। यदि किसी समूह के विभिन्न पद $य_१, य_२ .....य_स$ ($x_1, x_2 ... x_n$) हैं, और समान्तर माध्य से लिए गये विचलन क्रमशः $च_१, च_२ ... च_स$ ($d_1, d_2 ... d_n$) हैं तो प्रमाप विचलन निम्न रूप से व्यक्त किया जायगा:—

प्रमाप विचलन या

$$चा = \sqrt{\frac{च_१^२ + च_२^२ ...... च_स^२}{स}}$$

$$= \sqrt{\frac{यो\, च^२}{स}}$$

Standard Deviation or

$$\sigma = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 ..... d_n^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$

ल रीति (Short-cut Method)

ऊपर दिये गये सूत्र में एक विशेष कठिनाई प्रस्तुत होती है और वह यह कि जब किसी श्रेणी का समान्तर मध्यक पूर्ण संख्या में न होकर भिन्नों या दशमलवों में होता है तब विचलन तथा विचलन का वर्ग दोनों ही को निकालने में कठिनाई होती है। इस समस्या को हल करने के लिए जिस प्रकार समान्तर माध्य की गणना करते समय कल्पित माध्य लिया जाता है उसी प्रकार प्रमाप विचलन की गणना करते समय भी विचलन कल्पित माध्य से लिए जाते हैं। कल्पित माध्य से लिए गये विचलनों और समान्तर माध्य से लिए गये विचलनों में सम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है, इसी सम्बन्ध के कारण प्रमाप विचलनों की गणना करने के लिए कल्पित माध्य का विचलन संभव हो सका है। जब कल्पित माध्य का प्रयोग होता है तब किसी समूह का प्रमाप विचलन किसी कल्पित माध्य से लिए गये विचलनों के वर्गों के समान्तर माध्य में से कल्पित माध्य और समान्तर

…माध्य के अन्तर के वर्ग को घटा कर प्राप्त होने वाली संख्या का वर्गमूल है। गणितीय रूप से कहा जाय तो

$$(१)\text{चा} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{चय}^2}}{\text{स}} - (\text{म} - \text{य})^2}$$

अथवा

$$(२)\text{चा} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{चय}^2} - \text{स}(\text{म} - \text{य})^2}{\text{स}}}$$

अथवा

$$(३)\text{चा} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{चय}^2}}{\text{स}} - \left(\frac{\text{यो}_{\text{चय}}}{\text{स}}\right)^2}$$

जबकि

चा = प्रमाप विचलन

$\text{यो}_{\text{चय}^2}$ = कल्पित माध्य से विचलनों का वर्ग योग

म = मध्यक

य = कल्पित माध्य

स = पद संख्या

$$(1)\ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - (a - x)^2}$$

or

$$(2)\ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2 - n(a - x)^2}{n}}$$

or

$$(3)\ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$

where

σ = Standard deviation

Σdx^2 = Summation of squares of deviations from assumed average.

a = Arithmetic average

x = assumed average

n = number of items.

यदि श्रेणी खंडित अथवा संतत है तो विचलनों के वर्ग को वारंवारताओं से गुणा कर तब जोड़ा जाता है। ऐसे म ऋजु रीति के अनुसार (जब विचलन समान्तर मध्यक से लिये गये)

$$\text{चा} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}^2}}{\text{स}}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}}$$

यदि विचलन कल्पित माध्य से लिये गये है तो लघु रीति के अनुसार

$$(१)\text{चा} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}^2}}{\text{स}} - (\text{म} - \text{य})^2}$$

अथवा

$$(२)\text{चा} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}^2} - \text{स}(\text{म} - \text{य})^2}{\text{स}}}$$

अथवा

$$(३)\text{चा} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}^2}}{\text{स}} - \left(\frac{\text{यो}_{\text{वच}}}{\text{स}}\right)^2}$$

$$(1)\ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - (a - x)^2}$$

or

$$(2)\ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2 - n(a - x)^2}{n}}$$

or

$$(3)\ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

अथवा

$$(४)\text{चा} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}}\overline{}^{२}}{\text{स}} - \left(\frac{\text{यो}_{\overline{\text{वच}}}}{\text{स}}\right)^{२}} \times \text{त}$$

जबकि

$\text{यो}_{\text{वच}^२}$ = कल्पित माध्य से विचलनों के वर्ग और वारंवारताओं के गुणनफलों का योग

$\text{यो}_{\overline{\text{वच}}^२}$ = कल्पित माध्य से विचलनों को वर्ग-विस्तार से विभाजित करने के पश्चात् उनके वर्गों तथा वारंवारताओं के गुणनफलों का योग

त = वर्ग-विस्तार

or

$$(4)\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f\bar{d}^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f\bar{d}}{n}\right)^2} \times i$$

where

Σfd^2 = Summation of products of frequencies and squares of deviations from assumed average

$\Sigma f\bar{d}^2$ = Summation of products of frequencies and squares of deviations (from assumed average) divided by the magnitude of class- intervals (Deviation are first divided by magnitude of classintervals and then squared.)

i = magnitude of class intervals

साधारण श्रेणी का प्रमाप विचलन निकालना

उदाहरण ४

निम्नलिखित संख्याओं का प्रमाप विचलन ऋजु रीति तथा लघु रीति दोनों से निकालिए :

४, ६, ९, १०, १५, २५

हल

प्रमाप विचलन निकालना

पदों का मूल्य (size of items) य (x)	स० म० (११·५) से विचलन (dev. from a.a. {11·5}) च (d)	विचलनों का वर्ग (square of deviations) च² = (d²)	कल्पित माध्य (११) से विचलन {deviation from as. av. (11)} चय (dx)	कल्पित माध्य से विचलनों का वर्ग (square of dev. from as. av.) चय² (dx²)
४	− ७·५	५६·२५	− ७	४९
६	− ५·५	३०·२५	− ५	२५
९	− २·५	६·२५	− २	४
१०	− १·५	२·२५	− १	१
१५	+ ३·५	१२·२५	+ ४	१६
२५	+ १३·५	१८२·२५	+ १४	१९६
$यो_{य}$ = ६९ (Σx)		$यो_{च^2}$ = २८९·५० (Σd²)	$यो_{चय}$ = + ३ (Σdx)	$यो_{चय^2}$ = २९१ (Σdx²)

ऋजु रीति

$$\text{समान्तर मध्यक} = \frac{\text{यो}_\text{य}}{\text{स}} = \frac{६९}{६} = ११.५$$

$$\text{प्रमाप विचलन} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{च}^2}}{\text{स}}} = \sqrt{\frac{२८९.५०}{६}} = \sqrt{४८.२५} = ६.९$$

लघु रीति

प्रमाप विचलन

$$= \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{चय}^2}}{\text{स}} - \left(\frac{\text{यो}_\text{चय}}{\text{स}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{२९१}{६} - \left(\frac{+३}{६}\right)^2}$$

$$= \sqrt{४८.५ - .२५}$$

$$= \sqrt{४८.२५}$$

$$= ६.९$$

Direct Method
Arithmetic Average

$$= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{69}{6} = 11.5$$

$$\text{Standard Dev.} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{289.50}{6}} = \sqrt{48.25} = 6.9$$

Short-cut Method
Standard Dev.

$$= \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - \left(\frac{\Sigma dx}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{291}{6} - \left(\frac{+3}{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{48.5 - .25}$$

$$= \sqrt{48.25}$$

$$= 6.9$$

उपर्युक्त उदाहरण में लघु रीति के तीसरे सूत्र का प्रयोग किया गया है। यदि लघु रीति के पहले और दूसरे सूत्र का प्रयोग किया जाय तो यही उत्तर आएगा।

खंडित श्रेणी प्र का माप विचलन निकालना :

उदाहरण ५

निम्न सामग्री से प्रमाप विचलन निकालिए।

चल का मूल्य	६	७	८	९	१०	११	१२
वारंवारता	३	६	९	१३	८	५	४

ऋजु रीति तथा लघु रीति दोनों का प्रयोग कीजिए।

हल

ऋजु रीति (direct method)

पदों का मूल्य (size of item) य (x)	बारंबारता (frequency) ब (f)	य×ब (x×f)	स० म० (९) से विचलन {dev. from a. a. (9)} च (d)	च² (d²)	ब×च² (f×d²)
६	३	१८	−३	९	२७
७	६	४२	−२	४	२४
८	९	७२	−१	१	९
९	१३	११७	०	०	०
१०	८	८०	+१	१	८
११	५	५५	+२	४	२०
१२	४	४८	+३	९	३६
	स (n) = ४८	योवय = (Σfx) ४३२			योवच² = (Σfd²) १२४

$$\text{स० म०} = \frac{\text{यो}_{\text{वय}}}{\text{स}} = \frac{४३२}{४८} = ९$$

$$\text{प्रमाप विचलन} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}^2}}{\text{स}}}$$

$$= \sqrt{\frac{१२४}{४८}} = १\cdot६$$

$$\text{Arithmetic Average} = \frac{\Sigma fx}{n} = \frac{432}{48} = 9.$$

$$\text{Standard Dev.} = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}} = 1\cdot6$$

इसी उदाहरण को लघु रीति से निम्न प्रकार किया जायगा :

चल का मूल्य (size of item) य (x)	वारंवारता (frequency) व (f)	कल्पित माध्य (८) से विचलन {dev. from as. av. (8)} च (d)	कुल विचलन (व × च) वच (fd)	विचलनों का वर्ग (deviations squared up) च² (d^2)	विचलनों का कुल वर्ग व × च² = वच² (fd^2)
६	३	−२	−६	४	१२
७	६	−१	−६	१	६
८	९	०	०	०	०
९	१३	+१	+१३	१	१३
१०	८	+२	+१६	४	३२
११	५	+३	+१५	९	४५
१२	४	+४	+१६	१६	६४
	स = ४८ (n)		यो$_{वच}$ = +४८ (Σfd)		यो$_{वच^2}$ = १७२ (Σfd^2)

लघु रीति सूत्र नं० १

$$\text{स० म०} = \text{य} + \left(\frac{\text{यो}_{\text{वच}}}{\text{स}}\right)$$

$$= ८ + \left(\frac{+४८}{४८}\right)$$

$$= ९$$

$$\text{चा} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}^२}}{\text{स}} - (\text{म} - \text{य})^२}$$

$$= \sqrt{\tfrac{१७२}{४८} - (९ - ८)^२}$$

$$= \sqrt{\tfrac{१२४}{४८}} = १\cdot६$$

Short-cut formula no. 1

$$a = x + \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right) = 8 + \left(\frac{+48}{48}\right)$$

$$= 9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - (a - x)^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{172}{48} - (9 - 8)^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{124}{48}} = 1.6$$

लघु रीति सूत्र नं० २

$$\text{च} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}^२} - \text{स}\ (\text{म} - \text{य})^२}{\text{स}}}$$

$$= \sqrt{\frac{१७२ - ४८(९ - ८)^२}{४८}}$$

$$= \sqrt{\frac{१२४}{४८}} = १\cdot६$$

Short-cut formula no. 2

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2 - n\ (a - x)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{172 - 48\ (9 - 8)^2}{48}}$$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}} = 1\cdot6$$

लघुरीति सूत्र नं० ३

$$\text{च} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}^२}}{\text{स}} \quad \left(\frac{\text{यो}_{\text{वच}}}{\text{स}}\right)^२}$$

$$= \sqrt{\frac{१७२}{४८} - \left(\frac{+४८}{४८}\right)^२}$$

$$= \sqrt{\frac{१२४}{४८}} = १\cdot६$$

Short-cut formula no. 3

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{172}{48} - \left(\frac{+48}{48}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}} = 1\cdot6$$

नोट:—लघु रीति सूत्र नं० ४ का प्रयोग संतत श्रेणी में ही हो सकता है ।

संतत श्रेणी का प्रमाप विचलन निकालना

उदाहरण ६

निम्नलिखित वारंवारता वंटन का प्रमाप विचलन ऋजु रीति तथा लघु रीति दोनों से निकालिए :

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या
०—१०	४
१०—२०	८
२०—३०	११
३०—४०	१५
४०—५०	१२
५०—६०	६
६०—७०	३

हल

ऋजु रीति (Direct Method) से प्रमाप विचलन निकालना

प्राप्तांक (marks)	मध्य-मूल्य (mid-values) य (x)	वारंवारता (frequency) व (f)	मध्य-मूल्य × वारंवारता (mid-value × frequency) वय (fx)	स० म० (३४·५) से विचलन {Dev. from a. a. (34·5)} च (d)	च² (d²)	विचलनों का कुल वर्ग वच² (fd²)
०—१०	५	४	२०	—२९·५	८७०·२५	३४८१·००
१०—२०	१५	८	१२०	—१९·५	३८०·२५	३०४२·००
२०—३०	२५	११	२७५	— ९·५	९०·२५	९९२·७५
३०—४०	३५	१५	५२५	+ ·५	·२५	३·७५
४०—५०	४५	१२	५४०	+१०·५	११०·२५	१३२३·००
५०—६०	५५	६	३३०	+२०·५	४२०·२५	२५२१·५०
६०—७०	६५	४	२६०	+३०·५	९३०·२५	३७२१·००
		स (n) = ६०	यो$_{वय}$ (Σfx) = २०७०			१५०८५·०० यो$_{वच^२}$ (Σfd²)

प्रमाप विचलन $= \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}^२}}{\text{स}}}$ | S.D. $= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}}$

$= \sqrt{\frac{१५०८५\cdot००}{६०}}$ | $= \sqrt{\frac{15085\cdot00}{60}}$

$= \sqrt{२५१\cdot४१} = १५\cdot८$ | $= \sqrt{251\cdot41} = 15\cdot8$ marks

इसी प्रश्न को यदि लघु रीति से किया जाय तो लघु रीति सूत्र नं० १, २, ३ अथवा ४ किसी भी सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है। सूत्र १, २ और ३ का प्रयोग उदाहरण नं०५ में दिखाया जा चुका है। अतः इस उदाहरण को लघु रीति सूत्र नं० ४ से हल किया जायगा।

हैलो

लघु रीति से प्रमाप विचलन निकालना

प्राप्तांक (marks)	मध्य मूल्य (mid-values) य (x)	बारंबारता (frequency) व (f)	कल्पित माध्य (३५) से विचलन {dev. from as. av. (35)} च (d)	च ÷ वर्ग विस्तार (d ÷ i) $\bar{च}$ ($\bar{d}$)	कुल विचलन (Total dev.) व × $\bar{च}$ ($f\bar{d}$)	$\bar{च}^2$ ($\bar{d}^2$)	विचलनों का कुल वर्ग व × $\bar{च}^2$ ($f\bar{d}^2$)
०–१०	५	४	−३०	−३	−१२	९	३६
१०–२०	१५	८	−२०	−२	−१६	४	३२
२०–३०	२५	११	−१०	−१	−११	१	११
३०–४०	३५	१५	०	०	०	०	०
४०–५०	४५	१२	+१०	+१	+१२	१	१२
५०–६०	५५	६	+२०	+२	+१२	४	२४
६०–७०	६५	४	+३०	+३	+१२	९	३६
		ग = ६० (n)			यो $_{व\bar{च}}$ = −३ ($\Sigma f\bar{d}$)		यो $_{व\bar{च}^2}$ = १५१ ($\Sigma f\bar{d}^2$)

प्रमाप विचलन

$$= \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{वच}}\overline{^{२}}}{\text{स}} - \left(\frac{\text{यो}_{\text{वच}}\overline{}}{\text{स}}\right)^{२}} \times \text{त}$$

$$= \sqrt{\frac{१५१}{६०} - \left(\frac{-३}{६०}\right)^{२}} \times १०$$

$$= \sqrt{२\cdot५१} \times १०$$

$$= १\cdot५८ \times १०$$

$$= १५\cdot८$$

S. D. =

$$= \sqrt{\frac{\Sigma f\bar{d}^2}{n} - \left(\frac{\Sigma f\bar{d}}{n}\right)^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{151}{60} - \left(\frac{-3}{60}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{2\cdot51} = 10$$

$$= 1\cdot58 \times 10$$

$$= 15\cdot8 \text{ marks}$$

चार्लियर की जाँच (Charliers Check)

समान्तर मध्यक की गणना के सम्वन्ध में पिछले अध्याय में चार्लियर की जाँच का नियम वतलाया जा चुका है। प्रमाप विचलन गणना की शुद्धता मालूम करने के लिये भी चार्लियर ने एक नियम निकाला है जिसके आधार पर यह मालूम किया जा सकता है कि गणना में कोई अशुद्धि तो नहीं है। इसके लिए माध्य से लिये गये विचलनों में १ जोड़ दिया जाता है। यह (चय+१) (dx+1) हुआ। इसके पश्चात् इन संख्याओं का वर्ग निकाल कर उन्हें वारंवारता से गुणा किया जाता है और फिर उनका योग मालूम कर लिया जाता है यह $\text{यो}_{\text{व}}(\text{चय}+१)^{२}$ $\Sigma f\,(dx \times 1)^2$ हुआ। इसके वाद निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करना पड़ता है :—

$$\text{यो}_{\text{व}}\ (\text{चय}+१)^{२} - \text{यो}_{\text{वचय}^{२}} - २\ \text{यो}_{\text{वचय}} = \text{स}$$

$$\Sigma f\,(dx+1)^2 - \Sigma fdx^2 - 2\ \Sigma fdx = N$$

यदि गणना में कोई गलती नहीं है तो समीकरण के दोनों भाग वरावर होने चाहिये। उदाहरण नं० ६ में दिये गए प्रश्न से यह रीति नीचे समझाई गई है।

प्राप्तांक (marks)	वारंवारता (frequency) व (f)	३५ से विचलन Dev. from 35 चय(dx)	कुल विचलन व × चय (fdx)	चय² dx^2	व × चय² (fdx^2)	(चय + १) (dx + 1)	व (चय + १)² $f(dx+1)^2$
० – १०	४	– ३	– १२	९	३६	– २	१६
१० – २०	८	– २	– १६	४	३२	– १	८
२० – ३०	११	– १	– ११	१	११	०	०
३० – ४०	१५	०	०	०	०	+ १	१५
४० – ५०	१२	+ १	+ १२	१	१२	+ २	४८
५० – ६०	६	+ २	+ १२	४	२४	+ ३	५४
६० – ७०	४	+ ३	+ १२	९	३६	+ ४	६४
	न = ६० (N)		यो$_{वचय}$ = – ३ (Σfdx)		यो$_{वचय^2}$ = १५१ (Σfdx^2)		यो$_{व(चय+१)^2}$ = २०५ $\Sigma f(dx+1)^2$

अब यदि गणना सही है तो चार्लियर की जाँच के अनुसार

योग (चय+१)² − $^{यो}$वचय² − २ $^{यो}$वचय = स

= २०५−१५१−(२×−३) = ६०

= २०५−१५१+६ = ६०

= ६० = ६०

$$\Sigma f(dx+1)^2 - \Sigma fdx^2 - 2\Sigma fdx = N$$

$$= 205 - 151 - 2(-3) = 60$$

$$= 60 = 60$$

इस प्रकार इस जाँच से सिद्ध हो गया कि यहाँ तक की गणना में कोई अशुद्धि नहीं है।

प्रमाप विचलन का गुणक (Coefficient of standard deviation)

समूह के लिए इकाई-निरपेक्ष अपकिरण की माप निकालने के लिए जिस प्रकार मध्यक विचलनों को माध्यों से विभाजित किया गया था, उसी प्रकार प्रमाप विचलन को समूह के समान्तर मध्यक से विभाजित करके इकाई-निरपेक्ष प्रमाप विचलन प्राप्त किया जाता है। इन इकाई-निरपेक्ष प्रमाप विचलनों के द्वारा वंटनों की परस्पर तुलना की जा सकती है। इस प्रकार प्राप्त भजनफल को प्रमाप विचलन का गुणक (coefficient of standard deviation) कहते हैं। सूत्र रूप में प्रमाप विचलन का गुणक $= \frac{\text{चा}}{\text{स० म०}} \left(\frac{\sigma}{a}\right)$

उदाहरण नं० ६ में प्रमाप विचलन १५·८ है और वंटन का समान्तर मध्यक ३४·५ है इसलिए इस वंटन के प्रमाप विचलन का गुणक $= \frac{१५·८}{३४·५} =$ ·४६ हुआ।

प्रमाप विचलन के लाभ तथा कमियाँ

प्रमाप विचलन सबसे अधिक प्रचलित अपकिरण का माप है। इसकी गणना करने में सब पदों के विचलनों पर विचार किया जाता है। इसके साथ-साथ इसका व्यवहार बीजगणितीय रीतियों में किया जा सकता है। इसके मूल्य पर उच्चावचनों (fluctuations) का प्रभाव भी कम पड़ता है। इसकी गणना करना अपेक्षाकृत कठिन है, इसलिए ऐसे स्थलों में जहाँ सरलता की अधिक आवश्यकता होती है, इसका उपयोग प्रायः कम होता है। विचलनों को चिह्नरहित करने के लिए इसमें उनका वर्ग लिया जाता है, अतएव चरम-पदों के विचलनों को अधिक महत्व मिलता है। इन दोषों के बावजूद भी जहाँ परिशुद्धता पर ध्यान रखना पड़ता है, वहाँ इसका उपयोग होता है।

अपकिरण के अन्य माप

विस्तार चतुर्थक विचलन, मध्यक विचलन तथा प्रमाप विचलन के अतिरिक्त अपकिरण के कुछ अन्य माप भी हैं, इनका प्रयोग प्रायः कम होता है अतएव इनका महत्व भी कम है। ऐसे कुछ मापों का वर्णन नीचे किया जा रहा है।

विचरण-गुणक (Coefficient of Variation)

प्रमाप विचलन के गुणक को १०० से गुणा करके प्राप्त गुणनफल को विचरण-गुणक कहते हैं। विचलन-गुणक माध्य से कुल विचलन दिखाता है और विचरण-गुणक माध्य से प्रतिशतता विचलन (percentage deviation)। सूत्र के रूप में

$$\text{विचरण-गुणक} = १०० \times \frac{\text{चा}}{\text{म}} \left(100 \times \frac{\sigma}{a} \right)$$

उदाहरण ६ के लिए विचरण-गुणक = प्रमाप विचलन का गुणक × १००

= ·८६ × १००

= ८६

घनक (Modulus) : यदि समान्तर मध्यक से लिये गये विचलनों के वर्ग को बारंबारताओं से गुणा करने के पश्चात् जोड़ा जाय और फिर इस योग के दूने को पदों की संख्या से विभाजित कर वर्गमूल निकाला जाय तो वह घनक का मूल्य होता है, गणितीय रूप से :

$$\text{घ} = \sqrt{\frac{२ \text{ यो}_{\text{बच}}{}^{२}}{\text{स}}} \qquad C = \sqrt{\frac{2 \Sigma fd^2}{n}}$$

यदि प्रमाप विचलन को २ के वर्गमूल से गुणा कर दिया जाय तब भी श्रेणी का घनक मालूम हो जाता है, अतः

$$\text{घ} = \text{चा} \times \sqrt{२} \qquad C = \sigma \times \sqrt{2}$$

विचरण मापांक (Variance)—यदि प्रमाप विचलन का वर्ग निकाला जाय तो वह विचरण मापांक कहलाता है, इसको **द्वितीय अपकिरण घात** (Second Moment of Dispersion) भी कहते हैं।

सुतथ्यता (Precision) : यह घनक (Modulus) का व्युत्क्रम (reciprocal) होता है। अर्थात् सुतथ्यता = $\frac{१}{\text{घ}} \left(\frac{1}{c} \right)$ जब कि घ (c) = घनक।

संभावी विभ्रम (Probable Error)—यदि प्रमाप विचलन को ·६७४४९ से गुणा किया जाय तो संभावी विभ्रम ज्ञात हो जाता है।

अपकिरण के मापों का परस्पर सम्बन्ध

अपकिरण के मापों के बीच कोई पूर्ण रूप से निश्चित सम्बन्ध नहीं है। पर संमित और परिमित विषम (moderately skew) बंटनों के लिए निम्नलिखित सम्बन्ध लगभग ठीक निकलते हैं।

(१) चतुर्थक विचलन $= \frac{2}{3} \times$ प्रमाप विचलन।

(२) मध्यक विचलन $= \frac{4}{5}$ प्रमाप विचलन।

अपकिरण के मापों की परस्पर तुलना

विस्तार के बारे में यह बताया जा चुका है कि सिवाय गणना की सरलता के, इसका उपयोग करने में लाभ नहीं है। चतुर्थक-विचलन के उपयोग के पक्ष में दो तर्क हैं। (१) इसकी गणना करना सरल है और (२) इसका अर्थ स्पष्ट है और समझना आसान। पर इनका व्यवहार बीजगणितीय रीतियों में नहीं किया जा सकता और इसके मूल्य में उच्चावचनों (fluctuations) का प्रभाव निश्चित नहीं है। इसका उपयोग केवल उन दशाओं में किया जा सकता है जहाँ परिशुद्धता पर विशेष ध्यान न दिया जाता हो। मध्यक-विचलनों की गणना करना अपेक्षाकृत सरल होता है, साथ ही साथ इसका मूल्य प्रत्येक पद के विचलन पर निर्भर रहता है। पर इसका बीजगणितीय रीतियों में उपयोग नहीं किया जा सकता। उन दशाओं में जहाँ मध्यका आसानी से निर्धारित किया जा सकता है, इसका उपयोग अन्य अपकिरण के मापों से अच्छा है। प्रमाप विचलन इन दोषों से बहुत कुछ मुक्त है। साधारणतया समूह के लिए समान्तर माध्य निकाला जाता है, इसलिए यह उचित ही है कि विचलन समान्तर माध्य से लिए जांय पर उन दशाओं में जिनमें प्रमाप-विचलन की गणना कठिन और असुविधाजनक है जैसे यदि अनियमी (irregular) वर्गान्तर हों या प्रथम या अन्तिम पद अनिश्चित हों, अन्य अपकिरण के मापों का उपयोग किया जा सकता है।

लौरेन्ज वक्र (Lorenz Curve)

अपकिरण का अध्ययन बिन्दुरेखीय रीति द्वारा भी किया जा सकता है। डा० लौरेंज ने सर्व प्रथम इस विधि का प्रयोग किया था इसीलिए वह वक्र जिसके द्वारा अपकिरण का अध्ययन होता है लौरेंज वक्र कहलाता है। इस वक्र को खींचने के लिए पदों के मूल्य तथा बारंबारता दोनों ही को संचयी रूप में रखा जाता है और फिर इन श्रेणियों के योग को १०० मानकर अन्य संचयी मूल्यों की प्रतिशतताएँ निकाल ली जाती हैं। इन प्रतिशतताओं को बिन्दुरेखीय कागज पर अंकित कर लौरेंज वक्र बनाया जाता है। यदि चल विभिन्न

मूल्यों में बारंबारता का वितरण सापेक्षिक रूप से समान है तो यह वक्र एक सीधी रेखा के रूप में होता है; इसे **समान वितरण रेखा** (Line of equal distribution) कहा जाता है। यदि खींचा हुआ वक्र इस रेखा से दूर है तो यह इस बात का द्योतक है कि श्रेणी में अपकिरण है, खींचा हुआ वक्र इस रेखा से जितना दूर होगा अपकिरण की मात्रा उतनी ही अधिक होगी। यदि श्रेणी में अपकिरण बिल्कुल नहीं है तो खींचे हुए वक्र और समान वितरण रेखा में कोई अन्तर न होगा। निम्नलिखित उदाहरण से यह विधि स्पष्ट हो जायगी :

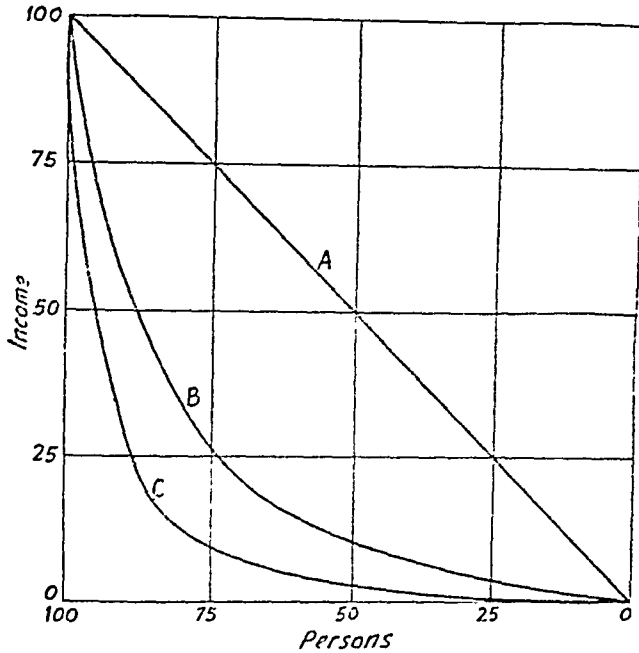
उदाहरण ७

निम्नलिखित सामग्री से एक लॉरेंज वक्र खींचिये :—

आय (हजार रुपयों में)	मनुष्यों की संख्या (हजारों में)		
	वर्ग A	वर्ग B	वर्ग C
१०	५	८	१५
२०	१०	७	६
४०	२०	५	२
५०	२५	३	१
८०	४०	२	१

लौरेंज वक्र खींचने के लिए आय और मनुष्यों की संख्या, दोनों ही को संचयी रूप में रखा जायगा और फिर इनके योग को १०० मान कर प्रतिशततताऐं मालूम की जायेंगी। यह निम्न सारणी में किया गया है :

आय			वर्ग A			वर्ग B			वर्ग C		
आय (००० रु०)	संचयी आय	संचयी प्रतिशततायें	मनुष्य (०००)	संचयी संख्या	संचयी प्रतिशततायें	मनुष्य (०००)	संचयी संख्या	संचयी प्रतिशततायें	मनुष्य (०००)	संचयी संख्या	संचयी प्रतिशततायें
१०	१०	५	५	५	५	८	८	३२	१५	१५	६०
२०	३०	१५	१०	१५	१५	७	१५	६०	६	२१	८४
४०	७०	३५	२०	३५	३५	५	२०	८०	२	२३	९२
५०	१२०	६०	२५	६०	६०	३	२३	९२	१	२४	९६
८०	२००	१००	४०	१००	१००	२	२५	१००	१	२५	१००

अब इन प्रतिशतताओं को बिन्दुरेखीय कागज पर अंकित किया जा सकता है। मनुष्यों की संख्या सम्बन्धी प्रतिशतताएँ य–अक्ष पर बायें से दायें १०० से आरम्भ होकर ० तक जायगी, आय सम्बन्धी प्रतिशतताएँ र–अक्ष पर नीचे से ऊपर ० से १०० तक ली जाएगी। इस प्रकार अंकित करने से नीचे दिया हुआ वक्र बनेगा :

चित्र १

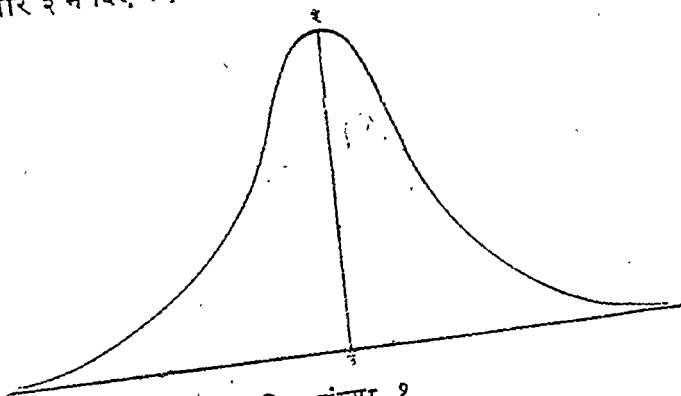
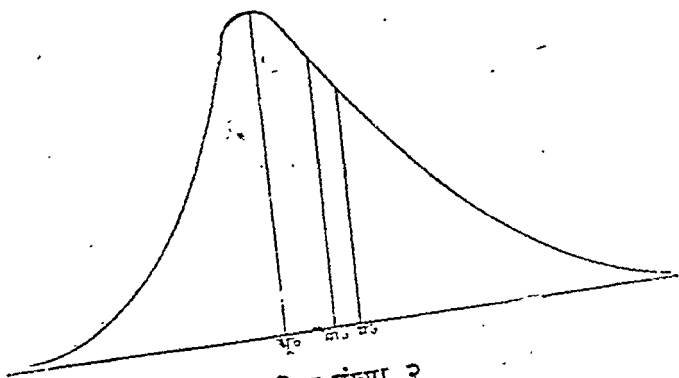
उपरोक्त विन्दु रेखा से यह स्पष्ट है कि वर्ग A में वितरण समान है यानी ५% मनुष्यों में ५%, आय, १५% मनुष्यों में १५% आय तथा ६०% मनुष्यों में ६०% आय विभाजित हुई। वर्ग B में वितरण समान नहीं है, यहाँ ३२% मनुष्यों में ५% आय, ६०% मनुष्यों में १५% आय तथा ९२% मनुष्यों में ६०% आय विभाजित हुई, वर्ग C में अपकिरण की मात्रा और अधिक है यहाँ पर ६०% मनुष्यों में ५% आय, ८४% मनुष्यों में १५% आय तथा ९६% मनुष्यों में ६०% आय विभाजित हुई।

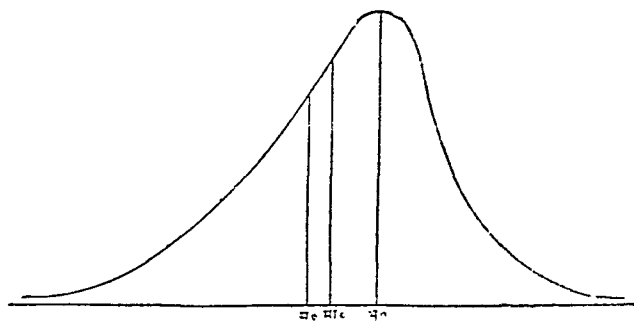
लौरेंज वक्र में एक कमी है और वह यह कि इसमे अपकिरण की मात्रा संख्याओं में व्यक्त नहीं की जा सकती। हम चित्र देखकर केवल यह कह सकते हैं कि किस श्रेणी में अपकिरण अधिक है या एक श्रेणी का वक्र समान वितरण रेखा से कितना दूर है। अतः लौरेंज वक्र के साथ-साथ अपकिरण माप की किसी गणितीय रीति का भी उपयोग करना चाहिये।

विषमता

(Skewness)

वारंवारता वंटनों को दो मुख्य भागों में बाँटा जा सकता है। एक तो वे जो संमित (symmetrical) हैं और दूसरे वे जो असंमित (asymmetrical) हैं। चित्र सं० १ में दिखाया गया वारंवारता वक्र एक संतत संमित वक्र (continuous symmetrical curve) है। चित्र सं० २ और ३ में दिखाए गए वक्र संतत असंमित वक्र (continuous asymmetrical curves) हैं। पहला वक्र उ र रेखा पर संमित है। दूसरे और तीसरे वक्र किसी भी रेखा पर संमित नहीं हैं।

किसी वक्र की विषमता (skewness) **उसमें संमितता का अभाव है।** इस परिभाषा के अनुसार चित्र सं० १ में दिया गया वक्र विषम (skew) नहीं है और चित्र सं० २ और ३ में दिए गए वक्र विषम हैं। विषम वंटनों (skew distributions)

चित्र संख्या १

चित्र संख्या २

को दो भागों में बाँटा जा सकता है। एक तो वे जिनमें वक्र का लम्बा सिरा चल के अधिक मूल्य वाले स्थानों को जाता है। ऐसे वंटनों को धनात्मक रीति से विषम कहा जाता है (positively skew)। इसके विपरीत यदि वक्र का लम्बा सिरा चल के कम मूल्य वाले स्थानों को जाता है तो वक्र को ऋणात्मक रीति से विषम कहा जाता है (negatively skew)। चि० सं० २ में दिया गया वक्र धनात्मक रीति से विषम (positively skew) है और चित्र सं० ३ में दिया गया वक्र ऋणात्मक रीति से विषम है। चि० सं० २

चित्र संख्या ३

और ३ की विषमताओं को क्रमश: अनुलोम विषमता (positive skewness) और विलोम विषमता (negative skewness) भी कहा जा सकता है।

विषमता के लक्षण (Tests of skewness)

किसी वक्र की असंमितता या विषमता को कई प्रकार से जाना जा सकता है। पहली परीक्षा भूयिष्ठ, मध्यका और समान्तर माध्य के मूल्यों पर निर्भर रहती है। किसी संमित वक्र के लिए भूयिष्ठ, मध्यका और समान्तर मध्य के मूल्य एक सम (identical) होते हैं। यदि वंटन असंमित या विषम है तो ऐसा नहीं होता। इसलिए यदि किसी वंटन के भूयिष्ठ, मध्यका और समांतर माध्य बराबर नहीं है तो वह विषम या असंमित होगा। असंमित वक्रों में ये माध्य, भूयिष्ठ, मध्यका और मध्यक के क्रम में रहते हैं। यदि अनुलोम विषमता (positive skewness) है तो भूयिष्ठक चल का कम मूल्य वाला पद होगा। इसके बाद क्रमश: मध्यका और मध्यक आएँगे। यदि विलोम विषमता (negative skewness) है तो सबसे कम मूल्य वाला पद मध्यक होगा, फिर क्रमश: मध्यका और भूयिष्ठक आएँगे। दूसरी परीक्षा मध्यका से अन्य पदों के विचलनों पर निर्भर रहती है। संमित वक्रों में मध्यका और समान्तर माध्य के मूल्य बराबर होते हैं। अब समान्तर माध्य से लिए गए पदों के विचलनों का योग हमेशा शून्य होता है। इसलिए संमित वक्रों में मध्यका से लिए गए विचलनों का योग

भी ऐकात्म्येन (identically) शून्य होगा। विषम या असंमित वक्रों में ऐसा नहीं होता। यदि भूयिष्ठक से बराबर दूरी में स्थित चल के मूल्यों की बारंबारता बराबर नहीं है तो यह वंटन विषम होगा।

विषमता का माप (Measurement of skewness)

कभी-कभी विषमता के माप की आवश्यकता पड़ जाती है। इसके लिए कुछ मापों का उपयोग किया जाता है। ऐसे मापों के लिए यह आवश्यक है कि किसी संमित वक्र के लिए उनका मूल्य शून्य हो और वे इकाई-निरपेक्ष हों। इस प्रकार की इकाई निरपेक्ष मापों को हम उन मापों का गुणक कह आए हैं। अतएव ये माप विषमता का गुणक (coefficient of skewness) कहलाएँगे। नीचे विषमता गुणक दिए गए हैं :

विषम वंटनों में भूयिष्ठक और मध्यक के मूल्य अलग-अलग होते हैं। जैसे-जैसे विषमता बढ़ती जाती है वैसे-वैसे भूयिष्ठक और मध्यक के बीच का अन्तर बढ़ता जाता है। अतएव भूयिष्ठक और मध्यक के अन्तर को विषमता का माप माना जा सकता है। संकेत रूप में विषमता का माप म—भू (a—z) हुआ। यदि वंटन संमित हुआ तो भूयिष्ठक और मध्यक बराबर होंगे। और इसलिए भू—म (z—a) का मूल्य शून्य होगा। इसे इकाई निरपेक्ष बनाने के लिए अपकिरण के मापों से विभाजित किया जाता है, क्योंकि विषमता के माप यह बताते हैं कि चल के मूल्य किसी ओर अधिक मात्रा में एकत्रित तो नहीं हैं। इसलिए भूयिष्ठक और समान्तर के मूल्य पर आधारित विषमता गुणक (coefficient of skewness) या प, भू—म (z—a) को प्रमाप विचलन (चा) या माध्य विचलन (चि) से विभाजित करके प्राप्त होगा। सूत्र रूप में :

$$\text{प} = \frac{\text{म} - \text{भू}}{\text{चा}} \quad \text{या}$$

$$= \frac{\text{म} - \text{भू}}{\text{चि}}$$

जबकि, प = विषमता गुणक
भू = भूयिष्ठक
म = समान्तर मध्यक
चा = प्रमाप विचलन
चि = माध्य विचलन

$$j = \frac{a - z}{\sigma} \quad \text{or}$$

$$= \frac{a - z}{\delta}$$

where j = Coefficient of Skewness
z = mode
a = arithmetic average
σ = standard deviation
δ = mean deviation

इस सूत्र में यदि भूयिष्ठक ठीक से निश्चित न हो तो भूयिष्ठक, मध्यका और मध्यक के सम्बन्ध {भूयिष्ठ=मध्यक− ३ (मध्यक−मध्यका)} का उपयोग करके भूयिष्ठ को हटाया जा सकता है। अर्थात्

$$प = \frac{३ (मध्यक − मध्यका)}{चा}$$

$$= \frac{३ (म − मा)}{चा}$$

या $$प = \frac{३ (मध्यक − मध्यका)}{चि}$$

$$= \frac{३ (म − मा)}{चि}$$

$$j = \frac{3 (\text{arithmetic av.—median}}{\sigma}$$

$$= \frac{3(a - m)}{\sigma}$$

$$\text{or } j = \frac{3(\text{arithmetic av.–median})}{\delta}$$

$$= \frac{3(a - m)}{\delta}$$

(२) दूसरा विषमता गुणक जिसका उपयोग किया जाता है, चतुर्थकों और मध्यका के मूल्य पर आधारित है। किसी विषम वंटन में मध्यका, प्रथम और तृतीय चतुर्थक के बीच में स्थित नहीं रहता। अब यदि तृतीय चतुर्थक और मध्यका के अन्तर में से मध्यका और प्रथम चतुर्थक का अन्तर घटा दिया जाय तो इस संख्या का उपयोग विषमता के माप के रूप में किया जा सकता है। यदि वंटन संमित हो तो इस राशि का मान शून्य होगा। संकेत रूप में विषमता का यह माप $\{(चतु_3 − मा) − (मा − चतु_१)\}$ होगा। इसे इकाई निरपेक्ष करने के लिए तृतीय चतुर्थक और प्रथम चतुर्थक के अन्तर (अर्थात् अन्तर चतुर्थक विस्तार (inter-quartile-range) से विभाजित करते हैं। सूत्र रूप में।

$$प = \left\{ \frac{(चतु_3 − मा) − (मा − चतु_१)}{(चतु_3 − चतु_१)} \right\}$$

$$= \frac{चतु_3 + चतु_१ − २ मा}{(चतु_3 − चतु_१)}$$

$$j = \left\{ \frac{(Q_3 - m) - (m - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} \right\}$$

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2m}{(Q_3 - Q_1)}$$

इस माप का एक लाभ यह है कि इसका मूल्य +१ और −१ के बीच रहता है।

विषमता सम्बन्धी समस्याओं को हल करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि कभी-कभी वंटनों के भूयिष्ठकों का निश्चित मूल्य नहीं निकाला जा सकता। अतएव ऐसे सूत्रों द्वारा इसकी गणना की जानी चाहिए जिनमें भूयिष्ठक-निर्धारण की आवश्यकता न पड़े।

पहले सूत्र के दो रूप $\left(\text{ष} = \frac{\text{म} - \text{भू}}{\text{चा}} \right)$ $\left(j = \frac{a - z}{\sigma} \right)$ और $\left\{ \text{ष} = {}^{3}\left(\frac{\text{म} - \text{मा}}{\text{चा}}\right) \right\}$ $\left\{ j = {}^{3}\left(\frac{a - m}{\sigma}\right) \right\}$ कार्ल पियरसन विषमता गुणक (Karl Pearson's Coefficient of Skewness) कहलाते हैं क्योंकि इनको कार्ल पियरसन ने ही निकाला था।

उदाहरण ८

निम्नलिखित वारंवारता वंटन का विपमता गुणक निकालिए।

वेतन (रुपयों में)	मजदूरों की संख्या
०—१०	१८५
१०—२०	७७
२०—३०	३४
३०—४०	१८०
४०—५०	१३६
५०—६०	२३
६०—७०	५०

हल

उपरोक्त सारिणी का

स० म० = २९ रुपया

भू० = ३७·७ रुपया

मध्यका = ३२·६ रुपया

चतु_1 = ९·३ रुपया

चतु_3 = ४२·८ रुपया

माध्य विचलन = १६·५ रुपया

(स० म० से)

प्रमाप विचलन = १८·९

विषमता गुणक

$$(१)\ \text{ष} = \frac{\text{म} - \text{भू}}{\text{चा}} = \frac{२९ - ३७·७}{१८·९} = -·४६$$

$$(२) प = \frac{म - भू}{चि} = \frac{२९ - ३७\cdot७}{१६\cdot५} = -\cdot५३$$

$$(३) प = ३ \left(\frac{म - मा}{चा}\right) = ३ \left(\frac{२९ - ३२\cdot६}{१८\cdot९}\right) = -\cdot१९$$

$$(४) प = ३ \left(\frac{म - मा}{चि}\right) = ३ \left(\frac{२९ - ३२\cdot६}{१६\cdot५}\right) = -\cdot२२$$

$$(५) प = \frac{चतु_3 + चतु_1 - २\ मा}{चतु_3 - चतु_1}$$

$$= \frac{४२\cdot८ + ९\cdot३ - २(३२\cdot६)}{४२\cdot८ - ९\cdot३}$$

$$= \frac{-१३\cdot१}{३३\cdot५} = -\cdot३९$$

a =

In the above table

a.a. = 29 rupees
z. = 37.7 rupees
m = 32.6 rupees
Q_1 = 9.3 rupees
Q_3 = 42.8 rupees
M. D. (from a.a.) = 16.5 rupees
S. D. = 18.9 rupees

Coefficient of Skewness

$$(1)\ j = \frac{a - z}{\sigma} = \frac{29 - 37\cdot7}{18\cdot9} = -\cdot46$$

$$(2)\ j = \frac{a - z}{\delta} = \frac{29 - 37\cdot7}{16\cdot5} = -\cdot53$$

$$(3)\ j = 3 \left(\frac{a - m}{\sigma}\right) = 3 \left(\frac{29 - 32\cdot6}{18\cdot9}\right) = -\cdot19$$

$$(4)\ j = 3 \left(\frac{a - m}{\delta}\right) = 3 \left(\frac{29 - 32\cdot6}{16\cdot5}\right) = -\cdot22$$

$$(5)\ j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\ m}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{42\cdot8 + 9\cdot3 - 2\ (32\cdot6)}{42\cdot8 - 9\cdot3}$$

$$= \frac{-13\cdot1}{33\cdot5} = -\cdot39$$

उपरोक्त उदाहरण में विषमता गुणक निकालने के सभी सूत्रों को समझाया गया है। यह स्पष्ट है कि इस उदाहरण में विषमता ऋणात्मक (negative) है क्योंकि समान्तर मध्यक का मूल्य भूयिष्ठक और मध्यका दोनों से ही कम है। यदि समान्तर मध्यक का मूल्य भूयिष्ठक या मध्यका से अधिक होता है तब विषमता घनात्मक (positive) होती है।

विषमता के उपयोग

यह बताया जा चुका है कि विषमता से हमें यह मालूम होता है कि कोई वारंवारता वंटन प्रसामान्य (normal) है या नहीं। यदि वंटन प्रसामान्य या संमित है तो उसके मध्यक, मध्यका और भूयिष्ठक का मूल्य बराबर होगा और मध्यका से दोनों चतुर्थक बराबर की दूरी पर होंगे। यदि यह सब बातें किसी श्रेणी में नहीं पाई जातीं तो वह प्रसामान्य नहीं है।

विषमता के माप हमें यह बताते हैं कि किसी वारंवारता वंटन में विषमता है अथवा नहीं और यदि है तो वह ऋणात्मक है या घनात्मक और इसके अतिरिक्त विषमता गुणक यह भी बतलाते हैं कि किसी वंटन में ऋणात्मक या घनात्मक विषमता की मात्रा कितनी है।

विषमता उन विज्ञानों में अधिक उपयोगी होती है जहाँ प्रयोगशाला में अनुसंधान सम्भव हों। सामाजिक शास्त्रों में इसकी उपयोगिता इतनी अधिक नहीं क्योंकि इनमें सामान्य या संमित वंटन (normal distribution) का पाया जाना लगभग असम्भव ही है। आर्थिक तथा सामाजिक अनुसन्धानों में विषमता का पाया जाना लगभग अनिवार्य ही है।

प्रश्न (अपकिरण)

(१) अपकिरण किसे कहते हैं ? अपकिरण मापने की भिन्न-भिन्न प्रणालियों को बतलाइए और इससे क्या लाभ हैं यह भी समझाकर लिखिए।

(बी० कॉम०, १९४५)

(२) अपकिरण की परिभाषा दीजिए और बतलाइए कि निरपेक्ष और सापेक्ष अपकिरण में क्या अन्तर होता है। (बी० कॉम०, १९४६)

(३) किसी वारंवारता वंटन के लक्षण ज्ञात करने की प्रणालियों का वर्णन कीजिए और उनमें भेद समझाइए। (बी० कॉम०, लखनऊ, १९३७)

(४) मध्यक विचलन, चतुर्थक विचलन व प्रमाप विचलन की परिभाषाएँ दीजिए

और उनके विशेष लक्षणों का भेदीकरण कीजिए। किस प्रकार की समस्याओं में किस प्रकार के विचलन को काम में लाना चाहिए, विस्तारपूर्वक लिखिए।

(५) "कोई दो वारंवारता वंटन या तो माध्य के अनुसार भिन्न हो सकते हैं या अपकिरण के अनुसार या माध्य तथा अपकिरण दोनों के अनुसार।"

समझाकर लिखिए कि किस प्रकार किसी वारंवारता वंटन के लक्षणों को जानने के लिए अपकिरण, माध्य का अनुपूरक है।

(६) प्रमाप विचलन के गुणों व अवगुणों की व्याख्या कीजिए।

(७) विषमता (skewness) की परिभाषा दीजिए। विषमता व अपकिरण में क्या अन्तर है? विषमता माप से क्या व्यावहारिक लाभ होता है?

(८) विषमता मापने के भिन्न-भिन्न सूत्रों को लिखिए तथा यह भी लिखिए कि किस प्रकार के प्रश्नों में किस सूत्र को काम में लाना चाहिए।

(९) अनुलोम विषमता व विलोम विषमता से क्या मतलब समझते हैं? दोनों में भेद समझा कर लिखिए।

(१०) अ की एक वर्ष की मासिक आय का चतुर्थक विचलन (quartile deviation) तथा गुणक निकालिए।

माह	मासिक आमदनी
१	१३९
२	१५०
३	१५१
४	१५१
५	१५७
६	१५८
७	१६०
८	१६१
९	१६२
१०	१६२
११	१७३
१२	१७५

(११) निम्नलिखित सारणी से, जिसमें विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ दी हुई हैं, अर्ध-अन्तर चतुर्थक विस्तार (Semi-inter quartile range) तथा चतुर्थक विचलन का गुणक ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (इंचों में)	विद्यार्थियों की संख्या
५३	२५
५५	२१
५७	२८
५९	२०
६१	१८
६३	२४
६५	२२
६७	१८
६९	२३

(१२) निम्नलिखित सारणी में ५९ विद्यार्थियों के अर्थशास्त्र में प्राप्तांक दिये हुए हैं। इससे अर्ध-अन्तर चतुर्थक विस्तार तथा गुणक निकालिए।

प्राप्तांक-वर्ग	विद्यार्थियों की संख्या
०—१०	४
१०—२०	८
२०—३०	११
३०—४०	१५
४०—५०	१२
५०—६०	६
६०—७०	३

(१३) किसी मुहल्ले में १८ मकानों का किराया निम्न सारणी में दिया हुआ है :

रु०	आ०	रु०	आ०
६	८	६	४
५	०	३	०
५	४	९	०
५	८	४	८
५	४	४	०
४	१२	३	०
४	०	३	१२
५	०	५	०
४	८	३	०

इस वर्ग का मध्यक विचलन (mean deviation) निकालिए।

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९३०)

(१४) एक सरकारी ऋण-पत्र के निम्नलिखित मूल्यों से मध्यक विचलन (समान्तर मध्यक से) तथा उसका गुणक निकालिए।

रुपये $१००\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{५}{८}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{१}{८}$, $\frac{५}{१६}$, $\frac{१५}{१६}$, $\frac{९}{१६}$, $\frac{१}{८}$

(१५) निम्नलिखित वंटन से मध्यक विचलन निकालिए :

दुर्घटनाओं की संख्या	व्यक्ति जिनकी दुर्घटना घटी
०	१५
१	१६
२	२१
३	१०
४	१७
५	८
६	४
७	२
८	१
९	२
१०	२
११	—
१२	२
योग	१००

(१६) निम्नलिखित अंकों से मध्यक विचलन निकालिए। यह इस वर्ग की सामाजिक स्थिति पर क्या प्रकाश डालता है ?

एक वर्ग विशेष में पति तथा पत्नी की उम्रों का अन्तर :

वर्षों में अन्तर	वारंवारता
०– ५	४४९
५–१०	७०५
१०–१५	५०७
१५–२०	२८१
२०–२५	१०९
२५–३०	५२
३०–३५	१६
३५–४०	४

(बी० कॉम०, बम्बई, १९३६)

(१७) निम्नलिखित वंटन से मध्यक विचलन (mean deviation) तथा गुणक निकालिए :

सेंटीमीटरों में ऊँचाई	कालेज के विद्यार्थियों की संख्या
१००–१०४	४
१०५–१०९	१४
११०–११४	६०
११५–११९	१३८
१२०–१२४	२०६
१२५–१२९	२९८
१३०–१३४	३८०
१३५–१३९	४५०
१४०–१४४	५००
१४५–१४९	४३०
१५०–१५४	२६०
१५५–१५९	१२८
१६०–१६४	६६
१६५–१६९	२८
१७०–१७४	१२
योग	२९७४

(१८) निम्नलिखित दो मालाओं का प्रमाप विचलन निकालिए। इनमें से कौन सी अधिक विचरण दिखाती है ?

माला अ	माला ब
१९२	८३
२८८	८७
२३६	९३
२२९	१०९
१८४	१२४
२६०	१२६
३४८	१२६
२९१	१०१
३३०	१०२
२४३	१०८

(पी० सी० एस०, १९३८)

(१९) निम्नलिखित सारणी से, यह बताने के लिए कि क्षेत्रफल या उत्पत्ति में से किस में अधिक विचरण है, प्रमाप विचलनों (Standard deviations) को निकालिए।

वर्ष	क्षेत्रफल (एकड़ लाखों में)	उत्पत्ति (४००पौं० प्रति गांठ के हिसाब से लाख गांठों में)
१९१४–१५	१५२	४९
–१६	११४	५१
–१७	१३८	५०
–१८	१५४	४५
–१९	१४४	४०
–२०	१५३	५३
–२१	१४४	५९
–२२	११७	६०
–२३	१३६	६३
१९२३–२४	१५४	६०

(२०) निम्नलिखित सारणी में एक फैक्टरी के विभिन्न मजदूरों द्वारा प्रतिदिन उत्पादित वस्तुओं की संख्या दी गई है। वस्तुओं के उत्पादन का मध्यक मूल्य तथा प्रमाप विचलन (Standard deviation) मालूम कीजिए तथा प्रमाप विचलन की अर्थ सूचकता भी स्पष्ट कीजिए।

वस्तुओं की संख्या	मजदूरों की संख्या	वस्तुओं की संख्या	मजदूरों की संख्या
१८	३	२३	१७
१९	७	२४	१३
२०	११	२५	८
२१	१४	२६	५
२२	१८	२७	४

(बी० कॉम०, कलकत्ता, १९३७)

(२१) निम्नलिखित सारणी से प्रमाप विचलन निकालिये।

परिवार में व्यक्तियों की संख्या	परिवारों की संख्या
१	१६६
२	५५२
३	५८०
४	४३३
५	२६८
६	१४८
७	७७
८	४१
९	२०
१०	८
११	५
१२	१
योग	२,२९९

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९४२)

(२२) निम्नलिखित सारणी से, जिसमें हाउस आफ कामन्स के ५४२ सदस्यों का आयु-बंटन दिया हुआ है, प्रमाप विचलन निकालिए।

आयु	सदस्यों की संख्या
२०—	३
३०—	६१
४०—	१३२
५०—	१५३
६०—	१४०
७०—	५१
८०—	२
योग	५४२

(२३) निम्नलिखित सारणी में दो फैक्ट्रियों के मजदूरों, (जिनकी आमदनी कालम नं० १ में दी हुए है) की संख्या दी गई है। दोनों फैक्ट्रियों की साप्ताहिक आमदनी का समान्तर मध्यक तथा प्रमाप विचलन निकालिए।

साप्ताहिक आमदनी का विस्तार (रुपयों में)	मजदूरों की संख्या	
	फैक्ट्री अ	फैक्ट्री ब
४— ६	७४	७१
६— ८	२७६	२७९
८—१०	३०४	३०३
१०—१२	११०	११२
१२—१४	१८	१८
१४—१६	०	१
१६—१८	९	३
१८—२०	९	९
२०—२२	०	४

(एम० ए०, कलकत्ता, १९३६)

(२४) निम्नलिखित सारणी में दो स्थानों के मजदूर परिवारों में प्रति परिवार का प्रति माह के भोजन -व्यय का वारंवारता वंटन दिया हुआ है । दोनों स्थानों पर व्यय का समान्तर मध्यक तथा प्रमाप विचलन निकालिए ।

व्यय का विस्तार (प्रतिमाह रुपयों में)	परिवारों की संख्या	
	स्थान अ	स्थान ब
रु० ३— ६	२८	३९
" ६— ९	२९२	२८४
" ९—१२	३८९	४०१
" १२—१५	२१२	२०२
" १५—१८	५९	४८
" १८—२१	१८	२१
" २१—२४	२	५

(पी० सी० एस०, १९४१)

(२५) निम्न सारणी में ३०६१ धान-कटाई के प्रयोगों का परिणाम दिया हुआ है। समान्तर मध्यक तथा प्रमाप विचलन निकालिए ।

प्रति एकड़ धान की पैदावार (पौंडों में)	प्रयोगों की संख्या
०— ४००	२३६
४०१— ८००	४८१
८०१—१२००	६०४
१२०१—१६००	५७६
१६०१—२०००	४१९
२००१—२४००	३३३
२४०१—२८००	२१७
२८०१—३२००	८७
३२०१—३६००	६४
३६०१—४०००	२३
४००१—४४००	१४
४४०१—४८००	६
४८०१—५२००	१
योग	३०६१

(२६) निम्नलिखित अंकों से मध्यक तथा विचरण (variance) निकालिए।

मजदूरी	फैक्ट्री अ	फैक्ट्री ब
	मजदूरों की संख्या	मजदूरों की संख्या
४० रु० से अधिक नहीं	३०	४५
४० रु० से अधिक लेकिन ८० रु० से कम	२५	३५
८० ,, १२० ,,	३०	२५
१२० ,, १६० ,,	४५	४०
१६० ,, २०० ,,	२५	२५
२०० ,, २४० ,,	१३	२०
२४० ,, २८० ,,	२४	५
२८० ,, ३२० ,,	८	५
योग	२००	२००

(२७) एक कॉलर (collar) का व्यापारी नवयुवकों को लुभाने के लिए नये तरह के कॉलर बनाने की सोच रहा है। विद्यार्थियों के एक वर्ग के गले की परिधि निम्न-लिखित हैं :

मध्य-मूल्य (इंचों में)	विद्यार्थियों की संख्या
१२·५	४
१३	१९
१३·५	३०
१४	६३
१४·५	६६
१५	२९
१५·५	१८
१६	१
१६·५	१

प्रमाप विचलन निकालिए तथा (सूत्र स० म० ± ३ प्रमाप विचलन से) यह मालूम करिये कि वह सबसे बड़ा तथा सबसे छोटा कॉलर किस माप का बनाये ताकि उसके सब ग्राहकों को आवश्यकता पूरी हो सके। इस बात का ध्यान रहे कि कॉलर गले की परिधि से $\frac{3}{4}$ इञ्च बड़ा पहना जाता है। (बी० कॉम०, राजपूताना, १९४९)

✓(२८) निम्नलिखित बारंबारता वंटन का प्रमाप विचलन निकालिए

		बारंबारता
५·५ से अधिक लेकिन	६·५ से कम	४
६·५ ,,	७·५ ,,	२
७·५ ,,	८·५ ,,	५
८·५ ,,	९·५ ,,	७
९·५ ,,	१०·५ ,,	९
१०·५ ,,	११·५ ,,	४
११·५ ,,	१२·५ ,,	२

(एम० ए०, आगरा, १९३४)

(२९) किसी व्यवसाय के दो फर्मों के मजदूरों की मासिक मजदूरी का विवरण निम्नलिखित है :

	फर्म अ	फर्म ब
मजदूरों की संख्या	५८६	६४८
औसत मासिक मजदूरी	५२·५ रुपये	४७·५ रुपये
मजदूरी-वंटन का विचरण	१००	१२१

(अ) अ या ब में से कौन सी फर्म अधिक मासिक मजदूरी देती है ?

(ब) अ या ब फर्म में से किस फर्म की मजदूरियों में अधिक विचरण है ?

(स) दोनों फर्म अ और ब के कुल मजदूरों की (१) माध्य मासिक आय, तथा (२) मजदूरी का विचरण निकालिये।

(आई० ए० एस०, १९५१)

(३०) निम्नलिखित अंकों से द्वितीय अपकिरण-घात (second moment of dispersion) तथा विषमतागुणक (coefficient of skewness) निकालिये।

पद-मूल्य	वारंवारता
३·५	३
४·५	७
५·५	२२
६·५	६०
७·५	८५
८·५	३२
९·५	८

(३१) निम्नलिखित की माध्य मजदूरी तथा विषमता गुणक निकालिए।

३५ व्यक्तियों की मजदूरी			४ रु० ८ आ० प्रति व्यक्ति के हिसाब से			
४०	"	"	५—८	"	"	"
४८	"	"	६—८	"	"	"
१००	"	"	७—८	"	"	"
१२५	"	"	८—८	"	"	"
८७	"	"	९—८	"	"	"
४३	"	"	१०—८	"	"	"
२२	"	"	११—८	"	"	"

(३२) निम्नलिखित सारणी से, जिसमें २३० व्यक्तियों की मजदूरी दी हुई है, अपकिरण गुणक तथा विषमता गुणक निकालिए तथा उनकी अर्थ-सूचकता भी स्पष्ट कीजिए।

मजदूरी	व्यक्तियों की संख्या	मजदूरी	व्यक्तियों की संख्या
रु० ७०— ८०	१२	रु० ११०—१२०	५०
८०— ९०	१८	१२०—१३०	४५
९०—१००	३५	१३०—१४०	२०
१००—११०	४२	१४०—१५०	८

(३३) निम्नलिखित सारणी में, नगर अ तथा ब का आयु-वर्गों में, जनसंख्या वंटन दिया हुआ है। उनकी बारंबारताओं के विचलन तथा विषमता की तुलना कीजिए।

आयु वर्ग	जनसंख्या (हजार में)	
	अ	ब
०—१०	१८	१०
१०—२०	१६	१२
२०—३०	१५	२४
३०—४०	१२	३२
४०—५०	१०	२९
५०—६०	५	११
६०—७०	२	३
७० से अधिक	१	१

(३४) निम्नलिखित सारणी से यह बताइए कि किस कक्ष में विषमता गुणक अधिक है।

प्राप्तांक	कक्ष अ के विद्यार्थी	कक्ष ब के विद्यार्थी
०—१०	१	०
१०—२०	४	५
२०—३०	१०	१०
३०—४०	२२	१३
४०—५०	३०	४२
५०—६०	३५	३०
६०—७०	१०	१०
७०—८०	७	८
८०—९०	१	२

(३५) निम्न सारणी में अ और ब दो फैक्ट्रियों के मजदूरों की साप्ताहिक मजदूरी दी हुई है। पियरसन के सूत्र के द्वारा विषमता गुणक निकालिए।

साप्ताहिक मजदूरी (रुपयों में)	मजदूरों की संख्या	मजदूरों की संख्या
	फैक्ट्री अ	फैक्ट्री ब
८—१२	५	३०
१२—१६	६	३५
१६—२०	८	४०
२०—२४	१०	५०
२४—२८	२५	७०
२८—३२	३०	३५
३२—३६	४६	१५
३६—४०	५०	१३
४०—४४	६०	१२
४४—४८	७०	१०
योग	३१०	३१०

(३६) निम्नलिखित सारणी से चतुर्थक विचलन तथा विषमता गुणक निकालिए।

चल	बारंबारता	चल	बारंबारता
४—८	३	२४—२८	१२
८—१२	१०	२८—३२	१०
१२—१६	१८	३२—३६	६
१६—२०	३०	३६—४०	२
२०—२४	१५		

(३७) निम्नलिखित सारणी, (जिसमें ५०० परीक्षार्थियों के प्राप्तांक दिए हुए हैं) से प्रमाप विचलन निकालिए, तथा साथ ही विषमता गुणक भी ज्ञात करिये।

प्राप्तांक	परीक्षार्थियों की संख्या
१० से कम	३०
२० " "	७०
३० " "	१२०
४० " "	१६८
५० " "	१९२
६० " "	३५४
७० " "	४८६
८० " "	५००

(३८) निम्नलिखित का प्रमाप विचलन, चतुर्थक विचलन तथा विषमता गुणक निकालिए ।

वर्ग	वारंवारता
०— ३	४
३— ६	८
६—१०	१०
१०—१२	१४
१२—१५	१६
१५—१८	२२
१८—२०	२४
२०—२४	२८
२४—२५	२०
२५—३०	१४
३०—३२	१२
३२—३६	७

(३९) निम्नलिखित सारणी से माध्य विचलन, प्रमाप विचलन तथा चतुर्थक विचलन निकालिए। साथ ही विषमता गुणक भी निकालिए ।

मजदूरी (रुपयों में)	मजदूरों की संख्या
० से अधिक	६८५
१० " "	५००
२० " "	४२३
३० " "	३८९
४० " "	२०९
५० " "	७३
६० " "	५०
७० " "	०

(४०) निम्नलिखित सामग्री से कार्ल पियरसन का विषमता गुणक (Co-efficient of Skewness) ज्ञात करिये।

प्राप्तांक	परीक्षार्थियों की संख्या
० से ऊपर	१५०
१० " "	१४०
२० " "	१००
३० " "	८०
४० " "	८०
५० " "	७०
६० " "	३०
७० " "	१४
८० " "	०

(बी० काम०, इलाहाबाद, १९५३)

(४१) लौरेन्ज वक्र किस प्रकार खींचा जाता है ? इसकी क्या विशेषतायें हैं ?

(४२) निम्नलिखित सामग्री से लौरेन्ज वक्र बनाइये :

मासिक मजदूरी (रु०)	मजदूरों की संख्या	
	अ-फैक्ट्री	ब-फैक्ट्री
१००	२५०	१८०
१५०	२००	१५०
२००	१८०	१३०
२५०	७०	८०
३००	५०	४५
३५०	४०	४०
४००	५	२०

(४३) प्रमाप विचलन गणना की शुद्धता मालूम करने के लिये चारलियर चेक का प्रयोग किस प्रकार किया जाता है। निम्नलिखित सामग्री से समझाइये:—

वेतन प्रति दिन	मजदूरों की संख्या
रु०	
१	५००
२	४५०
३	३४०
४	२५०
५	१८०
६	८०

(४४) निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिये:–

(अ) घनक (ब) विचरण गुणक (स) सुतथ्यता (द) विचरण मापांक

(४५) किसी वंटन के क्या-क्या अपकिरण माप हो सकते हैं ? प्रमाप विचलन, अपकिरण मापों में क्यों अधिक लोकप्रिय है ?

एक सीज़न में फुटबाल की दो टीमों (अ और ब) द्वारा किये गये गोल इस प्रकार हैं :—

एक मैच में किये गये गोल	मैचों की संख्या अ	मैचों की संख्या ब
०	२७	१७
१	९	९
२	८	६
३	५	५
४	४	३

विचरण गुणक निकाल कर मालूम कीजिये कि किस टीम में अधिक स्थिरता है।

(आई० ए० स० १९५४)

(४६) निम्नलिखित से समान्तर मध्यक, भूयिष्ठक प्रमाप विचलन तथा एक विषमता गुणक निकालिए :—

वर्ष से कम	१०	२०	३०	४०	५०	६०
मनुष्यों की संख्या	१५	३२	५१	७८	९७	१०९

(पी० सी० एस० १९५२)

(४७) प्रमाप विचलन की कल्पित माध्य से गणना करने की रीति समझाइये। निम्नलिखित सामग्री के ५०-६० वर्ग को कल्पित माध्य वर्ग मान कर प्रमाप विचलन निकालिये :—

वर्गान्तर	वारंवारता
०— ९	२
१०—१९	४
२०—२९	२३
३०—३९	३०
४०—४९	४०
५०—५९	४५

वर्गान्तर	वारंवारता
६०— ६९	३५
७०— ७९	२५
८०— ८९	१२
९०— ९९	९
१००—१०९	६
११०—११९	१०
१२०—१२९	३
१३०—१३९	१
१४०—१४९	१
१५०—१५९	३
	२४९

(आई० ए० एस० १९५६)

(४८) निम्नलिखित सारणी में मेरठ जिले के २८२ गांवों में सन् १९३६–३७ में गेहूँ का क्षेत्रफल दिया गया है।

(अ) प्रमाप विचलन तथा (ब) अर्ध-अन्तर चतुर्थक विस्तार निकालिये:—

गेहूँ का क्षेत्रफल (बीघा)	वारंवारता	गेहूं का क्षेत्रफल (बीघा)	वारंवारता
०	३	११००—	१४
१००—	७	१२००—	१४
२००—	१०	१३००—	१६
३००—	१७	१४००—	८
४००—	३३	१५००—	८
५००—	२९	१६००—	६
६००—	२७	१७००—	५
७००—	२१	१८००—	२
८००—	२३	१९००—२०००	१
९००—	२०		
१०००—	१८		

(आई० ए० एस० १९४९)

(४९) निम्नलिखित सारणी में धान की प्रति एकड़ पैदावार (मनों में) दी गई है। यह एक विशेष क्षेत्र में १९४०–४१ में दिये गये फसल काटने के प्रयोगों पर आधारित हैं।

पैदावार प्रति एकड़ (मनमें)	बारंबाता
०	४
३	४
६	३२
९	८१
१२	१३५
१५	१९८
१८	२१०
२१	१४४
२४	१२८
२७	७३
३०	५०
३३	१३
३६	१२
३९	५
४२	७
	१०९०

उपरोक्त वंटन का समान्तर मध्यक, मध्यका तथा प्रमाप विचलन निकालिये।

(आई० ए० एस० II १९४९)

अध्याय ९

देशनांक

(Index Numbers)

देशनांक एक विशेष प्रकार के माध्य होते हैं जिनसे काल श्रेणी (time series) और स्थान-श्रेणी (spatial series) की केन्द्रीय प्रवृत्ति (central tendency) की माप की जाती है : दो समग्रों या सामग्रियों की तुलना करने के लिए माध्यों का उपयोग किया जाता है क्योंकि वे उनकी केन्द्रीय प्रवृत्ति का प्रतिनिधित्व करते हैं। पर इस उपयोग में एक बहुत बड़ी कमी है । वह यह कि केवल उन्हीं सामग्रियों की परस्पर तुलना करना सम्भव है जिनकी इकाइयाँ एक हों। अगर इकाइयाँ अलग-अलग हों या समग्र विभिन्न प्रकार के समूहों से बने हों तो ऐसी तुलना सम्भव नहीं है। इसके साथ-साथ यह सामग्री कारण-बाहुल्य से प्रभावित होती है और बहुधा इन कारणों को जानना सम्भव नहीं हो पाता। इसलिए उनमें होने वाले वास्तविक परिवर्तनों को भी प्रत्यक्ष रूप से नहीं नापा जा सकता। ऐसे स्थानों में जहाँ वास्तविक परिवर्तनों को नापना कठिन हो या जहाँ वे नापे ही न जा सकें, सापेक्ष परिवर्तनों को नाप कर परिवर्तन के परिणाम का अनुमान लगाया जाता है।

इन परिवर्तनों के परिणाम का अनुमान लगाने की आवश्यकता पड़ने का कारण यह है कि प्रायः घटनाएँ एक समान न होने पर भी कुछ समरूपता (similarity) रखती है। इस समरूपता के कारण हम घटनाओं को 'सामान्य' (general) रूप में जानने का प्रयत्न करते हैं, जैसे विभिन्न वस्तुओं के मूल्य में होनेवाले परिवर्तनों की समरूपता के कारण हमें सामान्य-मूल्य-स्तर (general price-level) में होने वाले परिवर्तन का बोध होता है। हम यह मानने लगते हैं कि सामान्य-मूल्य-स्तर जैसी कोई चीज है । पर सामान्य-मूल्य-स्तर में होने वाले परिवर्तन प्रत्यक्ष रूप से नहीं नापे जा सकते क्योंकि ये परिवर्तन कारण बाहुल्य के प्रभाव मात्र हैं और इसलिए उनको नापना असुविधाजनक और कभी-कभी असम्भव होता है । ऐसी दशाओं में सापेक्ष परिवर्तन (relative change) नापे जाते हैं। केवल सामान्य-मूल्य-स्तर के साथ ही यह बात हो, ऐसा नहीं है, अन्य स्थानों में जैसे निर्वाह-व्यय (cost of

living), औद्योगिक उत्पादन (industrial production) आदि में भी वास्तविक परिवर्तन नापना सम्भव नहीं हो पाता। इसलिए सापेक्ष-परिवर्तन को नापने की आवश्यकता पड़ती है।

ये परिवर्तन या अन्तर समय या स्थान, दोनों, के साथ हो सकते हैं, अर्थात् किसी एक वर्ष में सामान्य-मूल्य-स्तर दूसरे वर्ष से भिन्न हो या किसी एक स्थान का निर्वाह व्यय दूसरे स्थान से अलग हो। यहाँ जो तुलना विभिन्न वर्षों या विभिन्न स्थानों के सामान्य मूल्य या निर्वाह-व्यय के बीच की जायगी, वह सापेक्ष होगी।

प्रश्न उठता है कि ये सापेक्ष्य परिवर्तन किस प्रकार जाने जाते हैं? इसकी रीति यह है कि एक साधारण हर (common denominator) का उपयोग किया जाता है। इस साधारण हर का उपयोग करके वे राशियाँ एक प्रकार की इकाइयों के रूप में आ जाती हैं और इसलिए इनकी परस्पर-तुलना करना सम्भव हो जाता है। जैसे अगर सामान्य-मूल्य-स्तर में होने वाले परिवर्तन को जानना हो तो पहले किसी निश्चित वर्ष में विभिन्न वस्तुओं के मूल्य जान लिये जाते हैं और जिस वर्ष के लिए परिवर्तन की गणना करनी होती है उस वर्ष के मूल्यों को पहले के प्रतिशत के रूप में रखा जाता है। प्रतिशत के रूप में रखने के कारण सब मूल्य एक ही इकाइयों के रूप में आ जाते हैं और इसलिए उनकी परस्पर तुलना सम्भव हो जाती है। मान लीजिए किसी वस्तु का मूल्य १९५० में ४ रु० सेर था और १९५१ में उसका मूल्य ५ रु० सेर हो गया। अब अगर १९५० में उसका मूल्य १०० माना जाय तो १९५१ में उसका मूल्य $\frac{५}{४} \times १०० = १२५$ हो गया। इस संख्या को देशनांक (index number) कहते हैं और यह बताया है कि १९५१ में इस वस्तु का मूल्य उसके १९५० के मूल्य से २५ प्रतिशत अधिक था। इस उदाहरण से यह न समझना चाहिए कि देशनांकों का उपयोग एक ही वस्तु के मूल्य में होने वाले परिवर्तनों की सापेक्ष नाप है। वास्तव में यह एक समूह में होने वाले परिवर्तनों की सापेक्ष नाप है। जैसे अगर वस्तुओं का एक समूह क, ख, और ग है और अगर क का मूल्य रुपये प्रति सेर, ख का मूल्य रुपये प्रति गैलन और ग का मूल्य रुपये प्रति दर्जन के अनुसार हो और इस समूह के मूल्य में होने वाले परिवर्तन की गणना करनी हो तो देशनांकों का उपयोग होगा। पहले इनके मूल्यों में होने वाले प्रतिशत परिवर्तन की गणना कर ली जायगी और इनका माध्य, सामान्य-मूल्य बताएगा, जिसे देशनांक कहा जायगा।

देशनांक की संक्षेप में सर्वमान्य परिभाषा देना कठिन है, क्योंकि व्यवहार में देशनांकों की गणना अनेक रीतियों से की जाती है और उन सब को एक परिभाषा के द्वारा सीमित क्षेत्र में नहीं रखा जा सकता। पर **'प्रारम्भिक दृष्टिकोण से देशनांकों को पदों के समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप'** कहा जा सकता है। इतना ध्यान रखना चाहिए कि 'देशनांक' एक सांख्यिकीय विधि है जिसके द्वारा ऐसे स्थलों में, जहाँ सामग्री

के वास्तविक परिवर्तन नापना कठिन होता है या जहाँ ये नापने योग्य नहीं होते, वहाँ इसके द्वारा सामग्री के सापेक्ष परिवर्तन सूचित किये जा सकते हैं।

मूल्य-देशनांक रचना
(Construction of Price Index Numbers)

देशनांक-रचना से पहले कुछ प्रारम्भिक बातों पर विचार करना पड़ता है। ये बातें निम्नलिखित हैं :

(१) **देशनांक-रचना का उद्देश्य,** अर्थात् किस समूह से सम्बन्धित परिवर्तनों की जानकारी प्राप्त करनी है।

(२) **किन पदों** (items) **का समावेश करना है और उनकी संख्या।** अगर उन सब पदों का समावेश कर लिया जाय जो समस्या से किसी रूप में संबंधित हैं तो कार्य अत्यधिक कठिन हो जायगा, इसलिए उनकी संख्या निश्चित करनी पड़ती है और सीमित संख्या में उपयोग किये जाने के कारण विभिन्न पदों से चुनाव करना पड़ता है।

(३) समस्या के साथ विभिन्न पद अलग-अलग महत्ता में सम्बन्धित होते हैं। इसके लिए उन्हें भार (weight) देना पड़ता है। अतएव इस बात पर विचार करना पड़ता है कि **प्रत्येक पद को कितना भार दिया जाय।**

(४) जैसा बताया जा चुका है, ये परिवर्तन किसी निश्चित वर्ष के मूल्यों के सापेक्ष नापे जाते हैं, इस वर्ष को आधार-वर्ष (base-year) कहते हैं। आधार-वर्ष चुनने में भी सावधानी बरतनी पड़ती है और **यह निश्चय करना पड़ता है कि आधार-वर्ष कैसे चुना जाय।**

(५) देशनांक-रचना में **किस प्रकार के माध्य का उपयोग** किया जायगा, अर्थात् सापेक्ष राशियों के लिए कौन सा माध्य अधिक उपयुक्त होगा ?

इन पर आगामी अनुच्छेदों में एक-एक करके विचार किया गया है।

पदों का चुनाव (Selection of items)

पदों का चुनाव करने की आवश्यकता इसलिये पड़ती है क्योंकि सब पदों का समावेशन संभव नहीं हैं। इसका कारण यह है कि प्रत्येक बाजार में प्रत्येक वस्तु के मूल्य जानना दुष्कर है। इस चुनाव में इस बात का ध्यान रखना पड़ता है कि वह वस्तु अपनी प्रकार की वस्तुओं की माँग का प्रतिनिधित्व करे। अर्थात् वह प्रतिनिधि वस्तु (representative commodity) हो ऐसी वस्तु में निम्नलिखित विशेषताएँ होनी चाहिए :—

(१) वह समाज की रुचि, आदत, रीति-रिवाज और आवश्यकताओं का प्रतिनिधित्व करे ।

(२) वह वस्तु श्रेणी-कृत (graded) और प्रमापित (standardized) हो, ताकि जब मूल्यों के बारे में सूचना दी जा रही हों तो वह वस्तु एक ही हो, अलग-अलग प्रकार न हों, अन्यथा ऐसे मूल्य प्राप्त होंगे जो जोड़े नहीं जा सकते या जिनके बीच तुलना नहीं की जा सकती ।

पदों की संख्या (number of items)—जहाँ तक वस्तुओं की संख्या का प्रश्न है, इसके लिए कोई निश्चित नियम नहीं है । अगर पदों की संख्या अधिक हों तो परिशुद्धता अधिक रहती है पर गणना आदि की कठिनाइयाँ भी बढ़ जाती हैं । इसलिए जितने पद चाहें उतनों का समावेश नहीं किया जा सकता । अगर **सूक्ष्मग्राही** (sensitive) **देशनांकों** की रचना करनी हो तो ऐसी वस्तुओं का चुनाव किया जाता है जिनके मूल्य सूक्ष्म-ग्राही हों । इन देशनांकों की रचना में कम संख्या में वस्तुओं को लिया जाता है । भारत में Economic Adviser का सूक्ष्मग्राही देशनांक केवल २३ वस्तुओं को लेकर बनता था । अन्य देशों में १५ से २० तक पदों को लेकर सूक्ष्मग्राही देशनांक बनाये जाते हैं । सामान्य-उद्देश्य से बनाए गए देशनांकों में वस्तुओं की संख्या अधिक होती है । भारत में Economic Adviser के सामान्य-उद्देश्यीय देशनांक ७८ वस्तुओं का समावेशन करके बनाए गए थे पर अब पदों की संख्या ११२ हैं । ब्रिटेन में Board of Trade Wholesale Price Index की रचना में २०० वस्तुओं का समावेशन किया जाता है । अमेरिका में The U. S. Bureau of Labour Statistics' Index of Wholesale Prices ४५० वस्तुओं पर आधारित हैं ।

वस्तुओं के गुण (quality of commodities)—वस्तुओं के चुनाव में उनके गुणों का भी ध्यान रखना चाहिए । सामान्यतः ऐसे प्रकारों (varieties) को समावेशित करना चाहिए जो सबसे अधिक प्रचलित हों । अगर ऐसे प्रकार (varieties) एक से अधिक हों तो उन सब का समावेशन कर लेना चाहिए । एक से अधिक प्रकार लेने से वस्तु को विशेष महत्व मिल जाता है । भारत में Economic Adviser के देशनांक में २२५ उद्धरण (quotations) लिए जाते थे जब कि वस्तुओं की संख्या केवल ७८ थी, नये देशनांक में ५५५ उद्धरण लिये जाते हैं जब कि पदों की संख्या केवल ११२ है । गुणों का स्थिरीकरण भी आवश्यक है । अन्यथा एक ही वस्तु के विभिन्न प्रकारों के मूल्य उद्धृत किए जा सकते हैं और मूल्य में परिवर्तन न होने पर भी देशनांक परिवर्तन सूचित करेंगे ।

वस्तुओं का वर्गीकरण (classification of commodities)—किसी समूह की वस्तुओं के बारे में अलग सूचना देने के लिए चुनी हुई वस्तुओं को

वर्गीकृत कर लिया जाता है और प्रत्येक वर्ग के लिए अलग देशनांक बनाए जाते हैं। इससे किसी विशेष वर्ग की वस्तुओं में होने वाले मूल्य-परिवर्तनों का अलग से अनुमान लगाया जा सकता है। इस प्रकार वर्गीकृत करने से सजातिता (homogeneity) बढ़ जाती है। अगर एक वर्ग को उपवर्गों में बटा जाय तो यह सजातिता और अधिक बढ़ जाएगी और इन उपवर्ग के विषय में विशेष जानकारी प्राप्त हो सकेगी। (Economic Adviser) के पुराने देशनांकों में चुनी हुई ७८ वस्तुओं को पांच वर्गों में बाँटा गया था। ये वर्ग निम्नलिखित थे : (१) भोज्य पदार्थ, (२) औद्योगिक कच्चा माल, (३) अर्ध निर्मित पदार्थ, (४) निर्मित पदार्थ, और (५) विविध। भोज्य पदार्थों को फिर उपवर्गों के रूप में विभाजित किया गया था जो (१) अन्न (२) दाल और (३) अन्य थे।

प्रतिनिधि स्थानों का चुनाव (selection of representative places)—जिस प्रकार देशनांक रचना में प्रत्येक वस्तु का समावेश करना सम्भव नहीं है उसी प्रकार यह भी सम्भव नहीं है कि एक वस्तु के मूल्य प्रत्येक स्थान से प्राप्त किए जा सकें। इसलिए कुछ निश्चित स्थानों से वस्तुओं के मूल्य उपलब्ध करने की व्यवस्था की जाती है। प्रायः ऐसे स्थानों का चुनाव किया जाता है जहाँ वस्तु बहुत बड़ी मात्रा में बेची या खरीदी जाती हो और जहाँ के मूल्य अन्य स्थानों के मूल्यों को प्रभावित करते हों।

मूल्यों का उद्धरण (quotation of prices)—प्रतिनिधि वस्तुओं और प्रतिनिधि स्थानों के चुनाव के पश्चात् ऐसे व्यक्तियों की नियुक्ति की समस्या आती है जो समय-समय पर प्रचलित मूल्यों की सूचना दे सकें। यह काम या तो अपने आदमी नियुक्त करके किया जा सकता है या उस स्थान के किसी व्यक्ति या संस्थाओं को दिया जा सकता है। इनमें एक लक्षण का होना अत्यन्त आवश्यक है। वह यह कि इनमें अभिनति (bias) या पक्षपात न हो। इनके द्वारा दी गई सूचना प्रामाणिक और विश्वसनीय मानी जा सके। इस बात की जाँच करने के लिए कि नियुक्त व्यक्ति या संस्था की सूचना प्रामाणिक और विश्वसनीय है, एक से अधिक व्यक्तियों या संस्थाओं की नियुक्ति की जा सकती है।

इनके पश्चात् इस बात का निश्चय करना पड़ता है कि मूल्य किस प्रकार दिये जायेंगे और मूल्य की क्या परिभाषा दी जायगी। मूल्य दो प्रकार से बताये जा सकते हैं। एक विधि यह है कि वस्तु का परिमाण प्रति द्रव्य की इकाई (quantity of commodity per unit of money) को उद्धृत किया जाय और दूसरा यह कि द्रव्य का परिमाण प्रति वस्तु की इकाई (quantity of money per unit of commodity) के रूप में बताये जायें। इनमें दूसरे को मूल्य कहा जाता है और पहले को विलोम-मूल्य (inverse price)। इनके विषय में किसी प्रकार का

भ्रम नहीं रहना चाहिए। ये एक ही चीजें नहीं हैं। इन दोनों में विलोमानुपात (inverse ratio) होता है। अर्थात् अगर एक बढ़े तो दूसरा घटेगा। जैसे अगर किसी वस्तु का मूल्य ५ रु० प्रति मन माना जाय तो इसे ८ सेर प्रति रुपया भी कहा जा सकता है। अगर पहला मूल्य बढ़कर ८ रु० प्रति मन हो जाय तो दूसरी दशा में वह ५ सेर प्रति रु० हो जायगा। देशनांकों में 'द्रव्य का परिमाण प्रति वस्तु की इकाई के रूप में' मूल्य का उपयोग करना चाहिए।

जहाँ तक मूल्य शब्द की परिभाषा का प्रश्न है वह सामान्य-मूल्य-देशनांक की गणना में थोक-मूल्य (wholesale price) माना जाता है। इसका कारण यह है कि थोक-मूल्य एक स्थान पर प्रायः समान रहते हैं, पर फुटकर मूल्य (retail prices) एक ही स्थान में एक दूसरे के बराबर नहीं होते। इसके साथ थोक-मूल्य वस्तु की माँग और पूर्ति द्वारा अधिक शीघ्रता से प्रभावित होते हैं। अर्थात् वे वस्तु के परिमाण के लिये अधिक सूक्ष्मग्राही होते हैं। फुटकर मूल्य थोक-मूल्यों पर निर्भर रहते हैं, इसलिए उनमें होने वाले परिवर्तनों में समय-विलम्बना (time-lag) रहती है जिस कारण वे वास्तविक आर्थिक स्थिति की ठीक-ठीक सूचना नहीं दे पाते। अन्य समस्याएँ जो मूल्य की परिभाषा निश्चित करने में आती हैं वे इससे सम्बन्धित रहती हैं कि थोक-मूल्य किसे माना जाय। केवल वस्तु के मूल्य को, या उसके साथ के अन्य प्रासंगिक (incidental) व्ययों को जोड़कर प्राप्त होने वाले मूल्यों को? फिर थोक मूल्य किस समय लिए जायँ—बाजार खुलने पर या बन्द होने पर या कभी बीच में? ऐसी अन्य समस्याओं का हल इस बात पर निर्भर रहेगा कि देशनांक का उद्देश्य क्या है।

अन्य बात जो मूल्य-उद्धरण से सम्बन्धित है, वह है उद्धरणों की संख्या (number of quotations)। अगर साप्ताहिक-मूल्यों के देशनांकों की रचना करनी हो तो कितने दिन के मूल्यों को देखा जाय। इसी प्रकार पाक्षिक और मासिक मूल्यों के देशनांकों के बारे में भी यह निश्चित करना पड़ता है कि एक पक्ष में या एक महीने में कितने दिनों, मूल्य लिया जायगा। जितने अधिक दिनों के मूल्य मिलेंगे, देशनांकों में उतनी ही अधिक परिशुद्धता आएगी। (Economic Adviser) के पुराने देशनांकों में शुक्रवार के दिन के मूल्य दिए जाते थे। केवल दिन निश्चित करना ही आवश्यक नहीं है बल्कि यह भी आवश्यक है कि मूल्य सम्बन्धी सूचना नियमित रूप से मिलती रहे, नहीं तो मूल्यों का अनुमान लगाना पड़ेगा और देशनांक उस अंश तक त्रुटिपूर्ण होंगे।

अन्त में जब मूल्य प्राप्त होने लगते हैं तो उनका माध्य निकालना पड़ता है। जैसे अगर मासिक-मूल्यों के देशनांक की रचना करनी हो और मूल्य-उद्धरण साप्ताहिक

हो तो प्रत्येक मास में ४ या ५ मूल्य-उद्धरण मिलेंगे। इन उद्धरणों का माध्य निकाल लिया जाता है। अगर केवल एक उद्धरण (जैसे, साप्ताहिक देशनांकों में) हो तो माध्य निकालने का प्रश्न नहीं उठता। इस प्रकार विभिन्न स्थानों से विभिन्न संख्या में प्राप्त, किसी वस्तु के मूल्यों का माध्य उस वस्तु का पूरे देश या प्रदेश के लिए दी हुई अवधि में मूल्य को बताता है।

आधार का चुनाव (Selection of Base)

देशनांकों में दिये गये अंक किसी अवधि के, एक निश्चित अवधि के अनुपात को बताते हैं। इस निश्चित अवधि को आधार कहा जाता है। देशनांक-रचना में आधार का चुनाव करना बहुत महत्वपूर्ण है। आधार चुनने की दो रीतियों का उपयोग किया जाता है। पहली को स्थिर आधार-रीति (fixed base method) कहते हैं और दूसरी को श्रृंखला आधार-रीति (chain base method) कहा जाता है।

स्थिर-आधार रीति में एक स्वेच्छापूर्वक चुने गये वर्ष को आधार-वर्ष मान लिया जाता है या कई वर्षों को चुन लिया जाता है जिनके माध्यों को आधार मान लिया जाता है। इस आधार को अनिश्चित समय तक अपनाया जाता है। आधार के लिए चुना गया वर्ष यथोचित रूप से सामान्य वर्ष होना चाहिए। अगर असामान्य वर्ष चुना गया तो देशनांक ठीक-ठीक रूप में आर्थिक स्थिति की ओर संकेत नहीं करेंगे। इस असमानता को दूर करने के लिए ही कई वर्षों के मूल्यों के माध्य को आधार माना जाता है। इस प्रकार माध्य लेने से बहुत ऊँचे मूल्य बहुत नीचे मूल्यों के साथ जुड़कर सामान्य मूल्य दे देंगे।

श्रृंखला-आधार-रीति में जिस वर्ष के लिए सापेक्ष मूल्य निकालने हों उससे पहले वर्ष को आधार मान लिया जाता है और उससे सापेक्ष मूल्यों की गणना की जाती है। इस प्रकार आधार कोई निश्चित अवधि या वर्ष नहीं रहता बल्कि बदलता रहता है। इस रीति का लाभ यह है कि इसके द्वारा एक वर्ष और उसके आगामी वर्ष की प्रत्यक्ष तुलना की जा सकती है, इसलिए यह स्थिर-आधार रीति की अपेक्षा अधिक सूचना प्रदान करता है। एक अन्य लाभ यह है कि नए पदों का समावेशन (inclusion) और पुराने पदों का अपनयन (removal) किया जा सकता है। पर इनके द्वारा लम्बे अन्तर में तुलना करना सम्भव नहीं है।

मूल्यानुपात की गणना (Calculation of Price-Relatives)

मूल्यानुपात की गणना करने में आधार वर्ष या आधार-अवधि के मूल्य को

१०० मान लिया जाता है और अन्य वर्षों को अनुपातानुसार रख लिया जाता है। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होते हैं वे मूल्यानुपात कहलाते हैं।

(क) स्थिर आधार रीति में मूल्यानुपात की गणना—मान लीजिए किसी वस्तु क के विभिन्न वर्षों के मूल्य प्रति मन निम्नलिखित हों—

सारणी संख्या १—क वस्तु के मूल्य।

वर्ष	मूल्य	
	रु०	आ०
१९४०	७	५
१९४१	८	९
१९४२	९	१
१९४३	९	१०
१९४४	९	१५
१९४५	१०	६
१९४६	११	०
१९४७	१०	८
१९४८	९	६
१९४९	१०	२
१९५०	१०	१०
१९५१	१०	०

अगर वर्ष १९४० को आधार चुना जाय तो इस वर्ष के मूल्य १०० द्वारा व्यक्त किये जायँगे। अन्य वर्षों के मूल्य इसके सापेक्ष रखने के लिए एक सरल सूत्र का उपयोग किया जाता है। इस सूत्र के द्वारा मूल्यानुपात ज्ञात हो जाता है। सूत्र इस प्रकार है।

प्रचलित वर्ष के मूल्यापातः

$$= \frac{\text{चलित वर्ष का मूल्य}}{\text{आधार वर्ष का मूल्य}} \times १००$$

Price relative for the current year

$$= \frac{\text{current year's price}}{\text{base year's price}} \times 100$$

इस सूत्र से प्राप्त अंक ही मुल्यानुपात हैं। इस प्रकार गणना करने से सारणी संख्या १ के लिए प्राप्त मुल्यानुपात सारणी संख्या २ में दिये गये हैं। कालम ३ में १९४० को आधार मान कर मूल्यानुपात दिये गये है और कालम ४ में १९५१ को आधार मानकर मुल्यानुपातों की गणना की गई है।

सारणी संख्या २—सारणी १ में दिये गये मूल्यों के मूल्यानुपात।

वर्ष (१)	मूल्य (२)		मूल्यानुपात (१९४०=१००) (३)	मूल्यानुपात (१९५१=१००) (४)
	रु०	आ०		
१९४०	७	६	१००	७४
१९४१	८	९	११६	८६
१९४२	९	१	१२३	९१
१९४३	९	१०	१३१	९६
१९४४	९	१५	१३५	९९
१९४५	१०	६	१४१	१०४
१९४६	११	०	१४९	११०
१९४७	१०	८	१४२	१०५
१९४८	९	६	१२७	९४
१९४९	१०	२	१३७	१०१
१९५०	१०	१०	१४४	१०६
१९५१	१०	०	१३६	१००

कालम ३ और ४ में दिये गये अंकों को देखकर यह स्पष्ट हो गया होगा कि इनको देखकर मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों को, कालम २ में दिये गये मूल्यों को देखने की अपेक्षा अधिक अच्छी तरह समझा जा सकता है। कालम ३ और ४ में दिए गये अंक सरल प्रकार के देशनांक माने जा सकते हैं।

(ख) श्रृंखला-आधार रीति में मूल्यानुपात की गणना— इसमें मूल्यानुपात की गणना करने के लिए दिये हुए वर्ष से पहले के वर्ष को आधार माना जाता है। यदि पिछले उदाहरण में श्रृंखला-आधार रीति का उपयोग किया जाय तो १९४१ का मूल्यापात निकालने के लिए १९४० को आधार माना जायगा और १९४२ का मूल्यानुपात निकालने के लिए १८४१ को आधार माना जायगा। इन अनुपातों को श्रृंखला मूल्यानुपात (link relatives) कहते हैं। इनकी गणना करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है।

$$\text{श्रृंखला मूल्यानुपात} = \frac{\text{प्रचलित वर्ष का मूल्य}}{\text{पिछले वर्ष का मूल्य}} \times १०० \quad \Big| \quad \text{Link Relative} = \frac{\text{current year's price}}{\text{previous year's price}} \times 100$$

सारणी संख्या १ में दिए गये सामग्री के लिए श्रृंखला मूल्यानुपात नीचे सारणी संख्या ३ में दिये गये हैं।

सारणी संख्या ३—शृंखला मूल्यानुपात निकालना।

वर्ष	मूल्य रु०	आ०	शृंखला मूल्यानुपात	
१९४०	७	६		१००
१९४१	८	९	$\frac{८ \text{ रु० } ९ \text{ आ०}}{७ \text{ रु० } ६ \text{ आ०}} \times १००$	११६
१९४२	९	१	$\frac{९ \text{ रु० } १ \text{ आ०}}{८ \text{ रु० } ९ \text{ आ०}} \times १००$	१०६
१९४३	९	१०	$\frac{९ \text{ रु० } १० \text{ आ०}}{९ \text{ रु० } १ \text{ आ०}} \times १००$	१०६
१९४४	९	१५	$\frac{९ \text{ रु० } १५ \text{ आ०}}{९ \text{ रु० } १० \text{ आ०}} \times १००$	१०३
१९४५	१०	६	$\frac{१० \text{ रु० } ६ \text{ आ०}}{९ \text{ रु० } १५ \text{ आ०}} \times १००$	१०४
१९४६	११	०	$\frac{११ \text{ रु० } ० \text{ आ०}}{१० \text{ रु० } ६ \text{ आ०}} \times १००$	१०६
१९४७	१०	८	$\frac{१० \text{ रु० } ८ \text{ आ०}}{११ \text{ रु० } ० \text{ आ०}} \times १००$	९५
१९४८	९	६	$\frac{९ \text{ रु० } ६ \text{ आ०}}{१० \text{ रु० } ८ \text{ आ०}} \times १००$	८९
१९४९	१०	२	$\frac{१० \text{ रु० } २ \text{ आ०}}{९ \text{ रु० } ६ \text{ आ०}} \times १००$	१०८
१९५०	१०	१०	$\frac{१० \text{ रु० } १० \text{ आ०}}{१० \text{ रु० } २ \text{ आ०}} \times १००$	१०५
१९५१	१०	०	$\frac{१० \text{ रु० } ० \text{ आ०}}{१० \text{ रु० } १० \text{ आ०}} \times १००$	९४

माध्य का चुनाव (Choice of Average)

अगर केवल एक वस्तु के मूल्य में ही परिवर्तन देखना हो तो देशनांकों की कोई आवश्यकता न पड़े। इनकी आवश्यकता सामान्य-मूल्य की धारणा से सम्बन्धित है, अर्थात् हमें एक से अधिक वस्तुओं के मूल्यों में होने वाले परिवर्तन को सामान्य रूप से समझना है। इसके लिए एक से अधिक वस्तुएँ लेनी पड़ती हैं। जब इन वस्तुओं के लिए मूल्यानुपात निकाललिए जाते हैं तो समस्या इन मूल्यानुपातों का

माध्य निकालने की होती है। सिद्धान्तः किसी भी माध्य का उपयोग किया जा सकता है। पर व्यवहार में समान्तर मध्यक, गुणोत्तर मध्यक और मध्यका के बीच चुनाव करना पड़ता है। इनमें किस माध्य को चुनना चाहिए इस पर बाद में विचार किया जायगा। अभी केवल माध्य निकालने की रीति का उदाहरण दिया जा रहा है।

मान लीजिए ६ वस्तुएँ अ, ब, स, य, र, और ल हैं जिनके मूल्य १९४०, १९४१ और १९४२ में निम्नलिखित सारणी (सं० ४) में दिए गये हैं और हमें उनसे देशनांक बनाने हैं। पहले मूल्यों के लिए मूल्यानुपातों की गणना करनी पड़ेगी और उसके पश्चात इन मूल्यानुपातों का माध्य निकालना पड़ेगा। यह रीति सारणी संख्या ५ और ६ में स्पष्ट की गई है।

सारणी संख्या ४—वस्तुओं का मूल्य।

वस्तु	मूल्य (१९४०)	मूल्य (१९४१)	मूल्य (१९४२)
अ	७·३	७·७	५·८
ब	७·७	५·५	३·६
स	७·०	८·१	६·५
य	६·५	७·३	६·२
र	३८·१	३१·८	१७·३
ल	१७·३	१७·१	१४·५

स्थिर आधार में मूल्यानुपातों का माध्य निकालना

सारणी संख्या ५

वस्तु	१९४०=१००	मूल्यानुपात (१९४१)	मूल्यानुपात (१९४२)
अ	१००	१०५	७९
ब	१००	७१	४७
स	१००	११६	९३
य	१००	११२	९५
र	१००	८३	५१
ल	१००	१००	८४
योग (total)	६००	५८७	४४८
समान्तर मध्यक (a. a.)	१००	९८	७५
मध्यका (median)	१००	१०२	८२
गुणोत्तर मध्यक (geometric mean)	१००	९३	७२

सारणी संख्या ६—श्रृंखला आधार में मूल्यानुपातों का माध्य निकालना।

वस्तु	श्रृंखला मूल्यानुपात (chain relatives) १९४०	१८४१	१९४२
अ	१००	१०५	७५
ब	१००	७१	६५
स	१००	११४	८१
य	१००	११२	८५
र	१००	८७	५८
ल	१००	१००	८५
योग (total)	६००	५८९	४४९
समान्तर माध्यक (a. a.)	१००	९८	७५
मध्यका (median)	१००	१०२	७८
गुणोत्तर मध्यक (geometrie mean)	१००	९७	७२

उपरोक्त उदाहरण में मध्यका, समान्तर मध्यक तथा गुणोत्तर मध्यक तीनों का ही प्रयोग किया गया है। यह एक संयोग ही की बात है कि इस उदाहरण में स्थिर आधार के मूल्यानुपातों का समान्तर मध्यक तथा गुणोत्तर मध्यक सन् १९४२ के लिए श्रृंखला आधार के मूल्यानुपातों के समान्तर मध्यक तथा गुणोत्तर मध्यक के बराबर हैं। साधारणतः स्थिर आधार तथा श्रृंखला आधार के मूल्यानुपातों का माध्य बराबर होना आवश्यक नहीं है। सन् १९४० और सन् १९४१ अर्थात् प्रथम और द्वितीय वर्षों के लिए स्थिर आधार और श्रृंखला आधार के मूल्यानुपातों का माध्य सदैव बराबर होगा क्योंकि दोनों रीतियों के अनुसार मूल्यानुपात एक ही आयेंगे।

मूल्यानुपातों का माध्य निकालते समय मध्यका, समान्तर मध्यक और गुणोत्तर मध्यक में से किसका उपयोग किया जाय अब इस बात पर प्रकाश डाला जायगा।

मध्यका का उपयोग करने के लाभ यह हैं कि इसकी गणना करना अपेक्षाकृत सरल होता है। इसके साथ-साथ यह चरमपदों (extreme items) के मूल्यों से कम प्रभावित होता है। पर साधारणतः इसका उपयोग नहीं करना चाहिए क्योंकि कम संख्या में पदों के होने पर यह उचित प्रतिनिधित्व नहीं करता। कई स्थलों में इसकी निश्चित रूप से गणना करना भी सम्भव नहीं होता ऐसी दशाओं में अन्तर्गणन का उपयोग करना पड़ता है जिससे गणना की सहजता भी इसके पक्ष में नहीं होती। एक अन्य दोष है कि यह उत्क्राम्य (reversible) नहीं है। उत्क्राम्यता (reversibility) की चर्चा आगे की जायगी।

समानांतर मध्यक का उपयोग करने के कारण वे ही हैं जिनके कारण इनका उपयोग साधारणतः सांख्यिकी में किया जाता है। यह नवोध है और इनकी गणना करना भी अपेक्षाकृत सरल है। पर जैसा बताया जा चुका है, यह चरम पदों के मूल्यों से अधिक प्रभावित होता है और उन्हें अधिक भार देता है। अतः अगर मूल्य बढ़ रहे हों तो समान्तर माध्य का उपयोग करने पर वे कम होंगे और मूल्यों की अपेक्षा अधिक भारित हो जायेंगे। इसके साथ-साथ यह भी उत्क्राम्य नहीं है।

माध्य लेने में गुणोत्तर मध्यक अधिक उपयोगी होता है। जैसा कहा जा चुका है कि गुणोत्तर मध्यक सापेक्ष परिवर्तनों के लिए अधिक उचित माध्य है और चूंकि देशनांकों में भी मूल्यों के सापेक्ष परिवर्तन की गणना की जाती है, इसका उपयोग अधिक सही होगा। इसका दूसरा लाभ यह है कि इसको माध्य मानकर बने देशनांक उत्क्राम्य होते हैं। Reversible.

भारित करने की विधि (Methods of Weighting)

पिछले अनुच्छेदों में दिए गये देशनांकों के विषय में यह ज्ञातव्य है कि प्रत्येक वस्तु के मूल्यों को बराबर महत्व दिया गया है। इसको इस प्रकार भी कहा जा सकता है कि प्रत्येक मूल्य के लिए भार १ है। इस प्रकार के देशनांक संतोषजनक नहीं माने जा सकते क्योंकि अपेक्षाकृत अधिक परिमाण में बिकने वाली वस्तु और बहुत कम परिमाण में बिकने वाली वस्तु को बराबर महत्व नहीं दिया जा सकता। इसलिए यह आवश्यक हो जाता है कि इन वस्तुओं को उचित रूप से भारित करने की कोई विधि निकाली जाय।

भारित करने की दो रीतियाँ साधारणतः प्रयोग में लाई जाती हैं। पहली रीति के अनुसार जिस वस्तु को अधिक महत्व देना होता है उसके एक से अधिक प्रकारों (varieties) के मूल्यों का समावेशन अलग-अलग कर लिया जाता है। उदाहरणार्थ यदि किसी देशनांक में गेहूँ की ३ प्रकारों (varieties) का मूल्य अलग-अलग लिया गया हो और केवल एक प्रकार ही के चावल का मूल्य लिया गया हो तो इस देशनांक में गेहूँ का भार चावल के भार से तिगुना हो गया। इस रीति में भार प्रत्यक्ष रूप से नहीं दिये जाते। वस्तुएँ अप्रत्यक्ष रूप से भारित की जाती हैं। इस प्रकार के भार अप्रत्यक्ष भार (implicit weights) कहलाते हैं। कलकत्ता मूल्य देशनांक (Calcutta Wholesale Price Index Number) इसी प्रकार भारित किया जाता था।

दूसरी रीति के अनुसार भार प्रत्यक्ष रूप से दिये जाते हैं। किसी विशेष बात के आधार पर वस्तुओं की सापेक्ष महत्ता मालूम की जाती है और उसी अनुपात में वस्तुएँ भारित की जाती हैं। उदाहरणार्थ, यदि गेहूँ और चावल का सापेक्ष महत्व उनके उत्पादन की राशि के आधार पर मालूम करना है और इसी आधार पर उन्हें भारित करना है और यदि इनकी उत्पादन राशि का अनुपात क्रमशः ५ और २ है तो इस रीति के अनुसार गेहूँ का भार ५ और चावल का भार २ होगा। गेहूँ और चावल का एक ही एक मूल्य देशनांक में आएगा पर इनके सम्मुख क्रमशः ५ और २ भार रूप में लिखे जायेंगे। इस प्रकार के भार प्रत्यक्ष भार (explicit weights)

कहलाते हैं। प्रत्यक्ष रूप से भारित करने के लिए निम्नलिखित रीतियों का उपयोग किया जाता है :–

(१) मूल्यानुपातों का भारित माध्य (weighted average of relatives)

इस रीति में सरल माध्य वाले देशनांक को भारित करके एक दूसरे देशनांक के रूप में रख दिया है जिन अंकों से सरल-माध्य देशनांक को भारित किया जाता है उन्हें मान (value) कहते हैं। इन मानों की गणना करने की रीति यह है कि किसी वस्तु पर आधार वर्ष में होने वाले कुल व्यय के बराबर या उसकी अनुपाती संख्या मालूम कर ली जाय। यही संख्या मान (value) है। किसी वस्तु पर होने वाला कुल व्यय, उसकी राशि (quantity) और उसके मूल्य के गुणनफल के बराबर होता है। इसलिए यह गुणनफल या इसकी अनुपाती संख्या ही वह मान है जिससे सरल माध्य देशनांक को भारित किया जाता है।

उदाहरण

निम्न सारणी में कुछ वस्तुओं के दो वर्षों के मूल्य और आधार वर्ष में बिकने वाली राशि दी गई है। इस सामग्री से भारित माध्य देशनांक की रचना कीजिए।

वस्तुएँ	इकाई	आधार वर्ष की राशि	आधार वर्ष के मूल्य	चालू वर्ष के मूल्य
क	मन	७	१६	१९·६
ख	सेर	६	२	३·२
ग	दर्जन	१६	५·६	७·०
घ	गज	२१	१·५	१·४

हल

इस सामग्री से सर्वप्रथम प्रचलित या चालू मूल्यानुपात निकाले जायँगे। इसका सूत्र है:–

$$\frac{\text{प्रचलित वर्ष के मूल्य}}{\text{आधार वर्ष के मूल्य}} \times १००$$

इसके अनुसार प्रचलित वर्ष के मूल्यानुपात क, ख, ग और घ के लिए क्रमशः १२३, १६०, १२५, और ९३ हुए।

मान (value) निकालने के लिए आधार वर्ष की राशि और आधार वर्ष के मूल्यों को गुणा करना होगा। क, ख, ग, घ, के लिए क्रमशः यह मान ११२, १२, ८९.६ तथा ३१.५ होंगे। इन तथ्यों को निम्न सारणी में प्रस्तुत कर भारित देशनांक की गणना की गई है।

वस्तु (comodity)	प्रचलित वर्ष का मूल्यानुपात (price relative of the current year)	मान अथवा भार (values or weight)	भार × मूल्यानुपात (weight × price relative)
	प(I)	अ(V)	अ प(IV)
क	१२३	११२	१३७७६
ख	१६०	१२	१९२०
ग	१२५	८९.६	११२००
घ	९३	३१.५	२९२९.५
		यो$_{अ}$ (ΣV) = २४५.१	यो$_{अप}$ (ΣIV) = २९८२५.५

भारित मूल्य देशनांक (weighted index number of prices) $= \frac{२९८२५.५}{२४५.१} = १२२$

गणितीय सूत्र रूप में :—

भारित देशनांक $= \frac{यो_{अप}}{यो_{अ}}$

जबकि, अ = मान
प = मूल्यानुपात
यो = योग

weighted index number $= \frac{\Sigma IV}{\Sigma V}$

where, I = price relative
V = value

उपरोक्त उदाहरण में $\frac{यो_{अप}}{यो_{अ}} \left(\frac{\Sigma IV}{\Sigma V} \right) = \frac{२९८२५.५}{२४५.१}$ इस प्रकार से भारित देशनांक १२२ हुआ।

(२) भारित समूही रीति (weighted aggregative method)

इस रीति में आधार वर्ष में बिकी हुई राशि को भार माना जाता है। आधार वर्ष में बिकी हुई राशियों और प्रचलित वर्ष के मूल्यों के गुणनफल के योग को आधार वर्ष की राशियों और आधार वर्ष के मूल्यों के गुणनफलों के योग से विभाजित करके प्राप्त होने वाली संख्या को १०० से गुणा किया जाता है। यह गुणनफल ही देशनांक है।

उदाहरण २

उदाहरण १ में दी गई सामग्री का भारित समूही रीति से देशनांक बनाइए।

वस्तु (commodity)	इकाई (unit)	आधार वर्ष की राशियाँ (quantities of base year) र० (q_0)	आधार वर्ष के मूल्य (prices of base year) मू० (p_0)	प्रचलित वर्ष के मूल्य (prices of current year) मू१ (p_1)	र० × मू० ($q_0 \times p_0$)	र० × मू१ ($q_0 \times p_1$)
क	मन	७	१६	१९६	११२	१३७·२
ख	सेर	६	२	३·२	१२	१९·२
ग	दर्जन	१६	५.६	७·०	८९.६	११२·०
घ	गज	२१	१.५	१·४	३१·५	२९·४
					यो$_{\text{र०मू०}}$ = २४५·१ ($\Sigma p_0 q_0$)	यो$_{\text{र०मू१}}$ = २९७·८ ($\Sigma p_1 q_0$)

$$\text{देशनांक} = \frac{२९७\cdot८}{२४५\cdot१} \times १०० = १२२.$$

गणितीय रूप से

$$\text{देशनांक} = \frac{\text{यो}_{\text{र}_० \text{मू}_०}}{\text{यो}_{\text{र}_० \text{मू}_१}} \times १००$$

जबकि, र० = आधार वर्ष की राशि

मू० = आधार वर्ष का मूल्य

मू०१ = प्रचलित वर्ष का मूल्य

यो = योग

$$\text{Index number} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

where, p_1 = price of the current year.

p_0 = price of the base year.

q_0 = quantity of the base year.

$$\text{उपरोक्त उदाहरण में} \frac{\text{यो}_{\text{र}_० \text{मू}_१}}{\text{यो}_{\text{र}_० \text{मू}_०}} \times १०० \left(\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100\right)$$

$$= \frac{२९७\cdot८}{२४५\cdot१} \times १००$$

$$= १२२$$

इस प्रकार इस रीति से भी देशनांक १२२ हुआ। यह दोनों रीतियां सदैव एक ही उत्तर देती हैं। पहली रीति से प्रश्न हल करते समय जहां प्रचलित वर्ष के मूल्यानुपात निकाले गये हैं वहां पर दशमलवों को छोड़ दिया गया है और पूरी संख्याएं ही ली गई हैं। यदि वहां दशमलव भी लिए गये होते तो दोनों रीतियों का उत्तर बिल्कुल बराबर होता। इस परिस्थिति में भी जबकि दशमलवों को छोड़ दिया गया है देशनांक पूर्ण संख्याओं में (in whole numbers) बराबर है।

इन दो रीतियों का उपयोग गुणोत्तर माध्य वाले देशनांकों में भी किया जा सकता है। यहां भारित समान्तर मध्यक के स्थान पर भारित गुणोत्तर मध्यक निकाला जायगा।

मूल्यानुपातों और शृङ्खलानुपातों का सम्बन्ध

(Relation between Price Relatives and Link Relatives)

कभी-कभी मूल्यानुपातों के शृंखला मूल्य अनुपातों में बदलने की आवश्यकता पड़ जाती है। कभी-कभी इसके विपरीत शृंखला मूल्यानुपातों को मूल्यानुपातों में बदलना आवश्यकीय होता है। यह कोई विशेष कठिनाई का कार्य नहीं। स्थिर आधार के देशनांक शृंखला आधार के देशनांकों में और शृंखला आधार देशनांक स्थिर आधार

देशनांकों में सुगमता से बदले जा सकते हैं। निम्नलिखित दो उदाहरणों से ये रीतियाँ स्पष्ट हो जायँगी।

उदाहरण ३

निम्नलिखित स्थिर आधार देशनांकों से श्रृंखला आधार देशनांक बनाइए:—

१९४५	१९४६	१९४७	१९४८	१९४९	१९५०
३७६	३९२	४०८	३८०	३९२	४००

स्थिर आधार देशनांकों के श्रृंखला आधार देशनांक बनाना।

हल

वर्ष (year) (१)	स्थिर आधार देशनांक (fixed base index numbers) (२)	स्थिर आधार देशनांकों से श्रृंखला आधार देशनांकों में परिवर्तन (fixed base index numbers changed to chain base index numbers) (३)	श्रृंखला आधार देशनांक (chain base index numbers) (४)
१९४५	३७६		१००
१९४६	३९२	$\frac{३९२}{३७६} \times १००$	१०४·३
१९४७	४०८	$\frac{४०८}{३९२} \times १००$	१०४·१
१९४८	३८०	$\frac{३८०}{४०८} \times १००$	९३·१
१९४९	३९२	$\frac{३९२}{३८०} \times १००$	१०३·२
१९५०	४००	$\frac{४००}{३९२} \times १००$	१०२

उदाहरण ४

निम्नलिखित श्रृंखला आधार देशनांकों से स्थिर आधार देशनांक बनाइए:—

१९४५	१९४६	१९४७	१९४८	१९४९	१९५०
९२	१०२	१०४	९८	१०३	१०१

हल

श्रृंखला आधार देशनांकों से स्थिर आधार देशनांक बनाना।

वर्ष (year) (१)	श्रृंखला आधार देशनांक (chain base index numbers) (२)	श्रृंखला आधार देशनांकों को १९४५ से श्रृंखलित करना (chain base index numbers chained to 1945 as base) (३)	स्थिर आधार देशनांक (fixed base index numbers) (४)
१९४५	९२		९२
१९४६	१०२	९२/१०० × १०२	९३.८
१९४७	१०४	९२/१०० × १०२/१०० × १०४	९७.६
१९४८	९८	९२/१०० × १०२/१०० × १०४/१०० × ९८	९५.६
१९४९	१०३	९२/१०० × १०२/१०० × १०४/१०० × ९८/१०० × १०३	९८.५
१९५०	१०१	९२/१०० × १०२/१०० × १०४/१०० × ९८/१०० × १०३/१०० × १०१	९८.५

उत्क्राम्यता परीक्षा (Reversibility Tests)

उत्क्रामकता दो प्रकार की होती है। पहली समय उत्क्राम्यता (time reversibility) तथा दूसरी खण्ड उत्क्राम्यता (factor reversibility)।

समय उत्क्राम्यता (Time Reversibility)

समय उत्क्राम्यता का अर्थ यह होता है कि किसी वर्ष का किसी अन्य वर्ष को आधार मान कर बनाया देशनांक, पिछले वर्ष का पहले वर्ष को आधार मानकर बनाये गए देशनांक का व्युत्क्रम (reciprocal) हो। अर्थात् अगर किसी वर्ष, १, का किसी दूसरे वर्ष, ०, को आधार मानकर बनाया मुल्यानुपात $प_{०१}$ (p_{01}) हो और वर्ष १, को आधार मानकर वर्ष ० का बनाया मूल्यानुपात $प_{१०}$ (p_{10}) हो तो

$$प_{०१} = \frac{१}{प_{१०}}$$

या

$$प_{०१} \times प_{१०} = १$$

$$p_{01} = \frac{1}{p_{10}}$$

or

$$p_{01} \times p_{10} = 1$$

अगर ऐसा हो तो यह कहा जायगा कि मूल्यानुपात समय उत्क्राम्यता परीक्षा के अनुसार चलता है। सूत्र $प_{०१} \times प_{१०}$ = ($p_{01} \times p_{10} = 1$) में प्रतिशतता मूल्यानुपातों की गणना नहीं की गई है। अर्थात् इन्हें १०० से गुणा नहीं किया गया है। इस बात का ध्यान रखना चाहिये।

समान्तर माध्य देशनांक, भारित समान्तर माध्य देशनांक, साधारण गुणोत्तर माध्य देशनांक और भारित गुणोत्तर माध्य देशनांकों में केवल साधारण गुणोत्तर माध्य द्वारा रचित देशनांक ही समय-व्युत्क्रम्यता-परीक्षा को पूरा करता है। केवल इस प्रकार के देशनांकों के लिए $प_{०१} \times प_{१०}$ ($p_{01} \times p_{10}$) = १ होता है। निम्नलिखित उदाहरण से यह स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण ५

मान लीजिए सामग्री निम्न प्रकार की है :—

वस्तु (commodity)	वर्ष ०, में मूल्य (prices in o year) मू० (p_0)	वर्ष १, में मूल्य (prices in year 1) मू० (p_1)	मूल्यानुपात वर्ष ० आधार (price relative) base o $\frac{मू_1}{मू_0}$ $\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$	मूल्यानुपात वर्ष १ आधार (price relative) base 1 $\frac{मू_0}{मू_1}$ $\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$
क	८	१०	१·२५	०·८
ख	१६	१२	०·७५	१·३३
ग	४०	६०	१·५०	०·६७
समान्तर मध्यक (arithmetic average)			$प_{01}$ = १·१७ (p_{01})	$प_{10}$ = ·९३ (p_{10})
गुणोत्तर मध्यक (geometric mean			$प_{01}$ = १·१२ (p_{01})	$प_{10}$ = ·८९ (p_{10})

समान्तर मध्यक समय उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी नहीं कर पाता क्योंकि .९३ का व्युत्क्रम (reciprocal) १.१७ नहीं बल्कि १.०८ होता है। इसलिए १·१७×०·९३, १ से अधिक होगा। यदि गुणोत्तर मध्यक का उपयोग किया जाय तो समय उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी हो जाती है क्योंकि .८९ का व्युत्क्रम १.१२ है, इसलिए .८९×१.१२=१ (इन गणनाओं में निकटतम का सहारा लिया गया है।)

पर भारित गुणोत्तर मध्यक लेने पर समय उत्क्राम्यता परीक्षा गलत परिणाम देती है।

प्रोफेसर फिशर (Professor Fisher) ने देशनांक बनाने के १३४ सूत्रों की विवेचना करने के पश्चात एक नया सूत्र निकाला है जिसे फिशर का आदर्श सूत्र (Fisher's Ideal Formula) कहते हैं। यह सूत्र प्रत्येक दशा में समय उत्क्राम्यता परीक्षा को पूरा करता है। यह सूत्र इस प्रकार है:
फिशर का आदर्श देशनांक

फिशर का आदर्श देशनांक

$$= \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{मू}_1 \text{र}_0}}{\text{यो}_{\text{मू}_0 \text{र}_0}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_1 \text{र}_1}}{\text{यो}_{\text{मू}_0 \text{र}_1}}} \times १००$$

जबकि,

$\text{मू}_1\ \text{र}_0$ = प्रचलित वर्ष का मूल्य × आधार वर्ष की राशि

$\text{मू}_1\ \text{र}_1$ = प्रचलित वर्ष का मूल्य × प्रचलित वर्ष की राशि

$\text{मू}_0\ \text{र}_0$ = आधार वर्ष का मूल्य × आधार वर्ष की राशि

$\text{मू}_0\ \text{र}_1$ = आधार वर्ष का मूल्य × प्रचलित वर्ष की राशि

यो = योग

Fisher's Ideal Formula

$$= \sqrt{\frac{\Sigma P_1 Q_0}{\Sigma P_0 Q_0} \times \frac{\Sigma P_1 Q_1}{\Sigma P_0 Q_1}} \times 100$$

where

P_1Q_0 = Current year's price × base year's quantity

P_1Q_1 = Current year's price × current year's quantity

P_0Q_0 = Base year's price × base year's quantity

P_0Q_1 = Base year's price × current year's quantity

Σ = Summation

खण्ड-उत्क्राम्यता परीक्षा (Factor Reversal Test)

यह बताने के पूर्व कि यह देशनांक किस प्रकार समय उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी करता है, खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा को भी समझ लेना आवश्यक है।

यह बताया जा चुका है कि समय उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी करने के लिए यह आवश्यक है कि समयों के अन्तर परिवर्तन (inter-change) करने से परस्पर-

विरोधी (inconsistent) परिणाम न मिले। खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी करने के लिए यह आवश्यक है कि अगर मूल्य और राशि में परस्पर परिवर्तन करें तो परस्पर विरोधी परिणाम नहीं मिलने चाहिए। अर्थात् इस प्रकार का परिवर्तन करने से प्राप्त देशनांक को यदि पहले प्रकार के देशनांक से गुणा किया जाय तो गुणफल को कुल मान (total value) में होने वाले परिवर्तनों को नापना चाहिए संकेत रूप में इसे निम्नलिखित प्रकार समझाया जा सकता है:

अगर आधार वर्ष ०, माना जाय और प्रचलित वर्ष १, माना जाय तो प०१, (p_{01}) मूल्य में होने वाले सापेक्षित परिवर्तन (relative change) को नापेगा। इसका मूल्य जैसा कि हम देख चुके हैं

$$=\frac{\text{यो}_{\text{मू}_1 \text{ रा}_0}}{\text{यो}_{\text{मू}_0 \text{ रा}_0}}\left(\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}\right)$$ अगर मूल्य और राशि में परिवर्तन किया जाय तो नया देशनांक रा०१ (q_{01})

$$=\frac{\text{यो}_{\text{रा}_1 \text{ मू}_0}}{\text{यो}_{\text{रा}_0 \text{ मू}_0}}\left(\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}\right)$$ इस परीक्षा के अनुसार प०१ और रा०१ का गुणनफल कुल मान (total value) में होने वाले परिवर्तन के बराबर होना चाहिए। कुल मान में होने वाला परिवर्तन $=\frac{\text{यो}_{\text{मू}_1 \text{ रा}_1}}{\text{यो}_{\text{मू}_0 \text{ रा}_0}}\left(\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}\right)$

अब तक दिए गये विभिन्न प्रकार के देशनांकों में फिशर का आदर्श देशनांक ही खंड उत्क्राम्यता परीक्षा को पूरा करता है। निम्नलिखित उदाहरण से यह स्पष्ट हो जायगा कि यह सूत्र किस प्रकार उत्क्राम्यता की दोनों परीक्षाओं को पूरा करता है।

उदाहरण ६

निम्नलिखित सामग्री से यह स्पष्ट कीजिये कि फिशर का आदर्श देशनांक किस प्रकार समय तथा खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षाओं को पूरा करता है।

वस्तु	वर्ष १९५० के मूल्य	वर्ष १९५० की राशि	वर्ष १९५१ के मूल्य	वर्ष १९५१ की राशि
क	८	४०	१०	३०
ख	१	६०	२	५०
ग	३	७५	३	८०

फिशर का आदर्श देशनांक बनाना

वस्तु	आधार वर्ष (१९५०) (base year 1950)		प्रचलित वर्ष (१९५१) (current year 1951)		मू॰ र॰ ($p_0 q_0$)	मू१ र॰ ($p_1 q_0$)	मू॰ र१ ($p_0 q_1$)	मू१ र१ ($p_1 q_1$)
	मूल्य मू॰ (p_0)	राशि र॰ (q_0)	मूल्य मू१ (p_1)	राशि र१ (q_1)				
क	८	४०	१०	३०	३२०	४००	२४०	३००
ख	१	६०	२	५०	६०	१२०	५०	१००
ग	३	७५	३	८०	२२५	२२५	२४०	२४०
					६०५	७४५	५३०	६४०

समय उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी करने के लिए

$\text{प}_{०१} \times \text{प}_{१०} = १$ होना चाहिए

$$\text{प}_{१०} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_०}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_१}}}$$

$$= \sqrt{\frac{७८५}{६०५} \times \frac{६४०}{५३०}}$$

$$\text{प}_{०१} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}}{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_०}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}}$$

$$= \sqrt{\frac{६०५}{७८५} \times \frac{५३०}{६४०}}$$

$\text{प}_{०१} \times \text{प}_{१०}$

$$= \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_०}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_१}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}}{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{प}_०}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}}$$

$$= \frac{७८५}{६०५} \times \frac{६४०}{५३०} \times \frac{६०५}{७८५} \times \frac{५३०}{६४०}$$

$= १.$

खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी करने के लिए

$$\text{प}_{०१} \times \text{र}_{०१} = \frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}}$$

$\text{प}_{०१}$ ऊपर निकाला जा चुका है।

$$\text{र}_{०१} = \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{म}_१ \text{र}_०}}}$$

$$= \sqrt{\frac{५३०}{६०५} \times \frac{६४०}{७८५}}$$

$\text{प}_{०१} \times \text{र}_{०१}$

$$= \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_०}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_१}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_०}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}} \times \frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}}}$$

$$= \frac{\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१}}{\text{यो}_{\text{मू}_० \text{र}_०}}$$

उपरोक्त उदाहरण में प०१×र०१

$$= \sqrt{\frac{७४५}{६०५} \times \frac{६४०}{५३०} \times \frac{५३०}{६०५} \times \frac{६४०}{७४५}}$$

$$= \sqrt{\frac{६४०}{६०५} \times \frac{६४०}{६०५}}$$

$$= \frac{६४०}{६०५}$$

$$\text{यो}_{\text{मू}_१ \text{र}_१} = \frac{६४०}{६०५}$$

इस प्रकार खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी हो गई

To satisfy the time reversal test

$$p_{01} \times p_{10} = 1$$

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{745}{605} \times \frac{640}{530}}$$

$$p_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{605}{745} \times \frac{530}{640}}$$

$$p_{01} \times p_{10}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_0}} = 1$$

$$= \sqrt{\frac{745}{605} \times \frac{640}{530} \times \frac{605}{745} \times \frac{530}{640}}$$

$$= 1.$$

To satisfy the factor reversal test

$$P_{01} \times Q_{01} \frac{\Sigma p_1 \ q_1}{\Sigma p_0 \ q_0}$$

P_{01} has been calculated above.

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 \ q_1}{\Sigma p_0 \ q_0} \times \frac{\Sigma p_1 \ q_1}{\Sigma p_1 \ q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{530}{605} \times \frac{640}{745}}$$

$P_{01} \times Q_{01}$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1 \ q_0}{\Sigma p_0 \ q_0} \times \frac{\Sigma p_1 \ q_1}{\Sigma p_0 \ q_1} \times \frac{\Sigma p_0 \ q_1}{\Sigma p_0 \ q_0} \times \frac{\Sigma p_1 \ q_1}{\Sigma p_1 \ q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1 \ q_1}{\Sigma p_0 \ q_0} \times \frac{\Sigma p_1 \ q_1}{\Sigma p_0 \ q_0}}$$

$$= \frac{\Sigma p_1 \ q_1}{\Sigma p_0 \ q_0}$$

in the above example $P_{01} \times Q_0$

$$= \sqrt{\frac{745}{605} \times \frac{640}{530} \times \frac{530}{605} \times \frac{640}{745}}$$

$$= \sqrt{\frac{640}{605} \times \frac{640}{605}}$$

$$= \frac{640}{605}$$

$$\Sigma p_1 \ q_1 = \frac{640}{605}$$

Thus the factor reversal test has been satisfied

इस प्रकार हम देखते हैं कि फिशर का आदर्श देशनांक दोनों उत्क्राम्यता परीक्षाओं को पूरा करता है। इसी कारण फिशर ने इसे "आदर्श" देशनांक कहा है। पर इसकी गणना करने के लिए प्रचलित वर्ष के लिए भी राशि सम्बन्धी सामग्री की आवश्यकता होती है और प्रायः इसको प्राप्त करना कठिन होता है। अतएव, इस सूत्र से देशनांक गणना साधारणतः नहीं की जाती।

निर्वाह व्यय-देशनांक-रचना

(Construction of Cost of Living Index Numbers)

निर्वाह-व्यय-देशनांकों की आवश्यकता पड़ने का कारण यह है कि मूल्य-देशनांक केवल सामान्य-मूल्य-स्तर में होने वाले परिवर्तनों को बताते हैं। इन परिवर्तनों

से समाज के विभिन्न वर्गों के व्यक्तियों के निर्वाह-व्यय में क्या परिवर्तन हुए, यह नहीं जाना जा सकता क्योंकि विभिन्न वर्ग के व्यक्ति वस्तुओं की अलग-अलग परिमाण का उपभोग करते हैं और इसलिए इनका उनके लिए अलग-अलग महत्व होता है। मूल्य-स्तर में परिवर्तन होने के कारण वर्ग-विशेष किस प्रकार प्रभावित होता है, इसके लिए कुछ बदलाव के साथ देशनांकों की रचना की जाती है।

कठिनाइयाँ

निर्वाह व्यय-देशनांकों की रचना की मुख्य कठिनाइयों का कारण यह है कि इनमें परिवर्तनों का अध्ययन उपभोक्ता के दृष्टिकोण से करना पड़ता है। इसलिए कई ऐसी समस्याएँ और कठिनाइयाँ उपस्थित हो जाती हैं जो मूल्य-देशनांकों की रचना में नहीं होतीं। चूँकि लोगों द्वारा वस्तुएँ फुटकर मूल्यों (retail prices) के रूप में खरीदी जाती हैं, इसलिए थोक-मूल्यों का संग्रहण सार्थक नहीं होगा। पर फुटकर मूल्य एक स्थान से दूसरे स्थान में या एक ही स्थान में एक जगह से दूसरी जगह अलग होते हैं, इसलिए इनका संग्रहण कठिन होता है और इनके आधार पर बनाए गए देशनांक सब स्थानों के लिए काम में नहीं लाए जा सकते। इसी प्रकार जिन वस्तुओं को खरीदा जा रहा हो उनकी राशियाँ और उनके गुणों में बहुत शीघ्रता से परिवर्तन होता रहता है। इसलिए यह निश्चयपूर्वक नहीं कहा जा सकता कि जिन मूल्यों का उद्धरण समय-समय पर दिया जा रहा है, वे एक ही प्रकार की वस्तु के हैं। अन्य कठिनाइयाँ जो निर्वाह व्यय देशनांकों से सम्बन्धित हैं वे ये हैं कि किसी वर्ग के सदस्य वस्तुओं पर एक ही अनुपात में व्यय नहीं करते और न ही कोई सदस्य विभिन्न समयों में एक अनुपात में व्यय करता है। इसलिए इन देशनांकों की रचना के लिए **'औसत परिवार'** के बारे में जानना पड़ता है। इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि निर्वाह-व्यय देशनांक एक ही प्रदेश में रहने वाले किसी एक वर्ग के बारे में बताते हैं। प्रदेश का तात्पर्य यह है कि वहाँ मूल्य लगभग समान रहते हैं। और वर्ग-विभाजन आय के अनुसार किया जाता है।

रचना

अब अगर किसी प्रदेश में रहने वाले किसी वर्ग के लिए निर्वाह-व्यय देशनांक की रचना करनी है तो पहले यह निश्चित करना होगा कि इस वर्ग के अन्तर्गत कौन लोग आते हैं। इसको निश्चित रूप से परिभाषित करना अत्यन्त आवश्यक है। इसके बाद इस वर्ग के सदस्यों के परिवार-बजट के बारे में अनुसंधान किया जाता है। यह अनुसंधान, निदर्शन (sampling) द्वारा किया जाता है। निदर्शन में

पर्याप्त संख्या में परिवारों को लेना चाहिए। इस प्रकार प्राप्त परिवार-बजटों से यह ज्ञात हो जाता है कि वर्ग-विशेष के व्यक्ति किस प्रकार की वस्तुओं और सेवाओं में कितना व्यय करते हैं। इन वस्तुओं और सेवाओं का वर्गीकरण किया जाता है। ये वर्ग बहुधा भोज्य-पदार्थ, कपड़ा, किराया, ईंधन और विविध होते हैं। इनको फिर उप-वर्गों में विभाजित किया जा सकता है जैसे भोज्य पदार्थों को अन्न, दालों और अन्य भोज्य पदार्थों में। इस अनुसंधान में विभिन्न वस्तुओं और सेवाओं के प्रदेश में प्रचलित फुटकर मूल्य भी जान लिये जाते हैं। इस सामग्री से प्रत्येक वस्तु या सेवा पर किये जाने वाले व्यय के और कुल व्यय के अनुपात की गणना की जा सकती है। साथ ही साथ यह भी जाना जा सकता है कि किन वस्तुओं या सेवाओं का समावेश इन देशनांकों में किया जाय। केवल ऐसी वस्तुओं और सेवाओं का चुनाव करना चाहिए जिनका वर्ग-विशेष के सदस्यों द्वारा सामान्यतः उपभोग किया जाता है। देशनांकों को अधिक विश्वसनीय बनाने के लिए वे वस्तुएँ या सेवाएँ रखनी चाहिए जिनके गुणों या राशियों में असामान्य परिवर्तन हों। ये वस्तुएँ और सेवाएँ ऐसी होनी चाहिए जिनके लिए नियमित रूप से मूल्यों के उद्धरण हो सकें। चूँकि प्रत्येक वर्ग के लिए ये विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों का महत्व अलग-अलग होता है, इसलिए फुटकर मूल्यों या उनके अनुपातों को यथोचित रूप से भारित करना पड़ता है। किसी वस्तु के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों का निर्वाह-व्यय पर क्या प्रभाव पड़ेगा यह इस बात पर निर्भर करेगा कि वर्ग के सदस्य उस वस्तु को अपने परिवार-बजट में कितना महत्व देते हैं। भारित देशनांकों की रचना के लिए दो प्रकार की रीतियों का उपयोग किया जाता है। एक को सामूहिक व्यय रीति (aggregate expenditure method) या समूही रीति (aggregative method) कहते हैं और दूसरी को परिवार बजट रीति (family budget method) या भारित मूल्यानुपात रीति (weighted relatives method) कहा जाता है।

सामूहिक-व्यय-रीति—इस रीति में आधार वर्ष में वर्ग के सदस्यों द्वारा वस्तुओं की राशियों के उपयोग को जान लिया जाता है और इनको या इनकी अनुपाती संख्याओं का भार के रूप में उपयोग किया जाता है। फिर प्रत्येक वर्ग के लिए प्रत्येक वस्तु पर किये जाने वाले कुल व्यय की गणना कर ली जाती है। जिस वर्ष के लिए देशनांक निकालना हो उस वर्ष में प्रत्येक वस्तु पर किये गए कुल व्यय को उस वर्ष वस्तु की आधार वर्ष में खरीदी गई राशि या उसकी अनुपाती संख्या से गुणा किया जाता है। सब वस्तुओं के लिए प्राप्त इन गुणनफलों के योग को आधार वर्ष

में इन वस्तुओं पर किये गए व्ययों और आधार वर्ष में खरीदी गई संगत राशियों के गुणनफलों के योग से विभाजित करके प्राप्त हुई संख्या देशनांक बताती है।

परिवार-बजट रीति—इस रीति में कुछ प्रतिनिधि परिवारों के बजट का सतर्कतापूर्वक अध्ययन कर लिया जाता है। इन बजटों से 'औसत' परिवार द्वारा आधार वर्ष में वस्तुओं पर किये गए व्यय को जान लिया जाता है। इन व्ययों के आधार पर प्रत्येक वस्तु को भार दिए जाते हैं। प्रतिशतता मूल्यानुपातों और संगत भारों के गुणनफलों के योग को भारों के योग से विभाजित कर दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त भागफल निर्वाह-व्यय-देशनांक होता है।

नीचे दिये गए दो उदाहरण इन रीतियों को स्पष्ट कर देंगे।

उदाहरण ७

निम्नलिखित सारणी में सामूहिक व्यय रीति (aggregate expenditure method) या समूही रीति (aggregative method) द्वारा निर्वाह व्यय देशनांक की रचना दी गई है।

वस्तुएँ	आधार वर्ष में उपयुक्त राशियाँ (इकाइयों के साथ) र० (q_0)	आधार वर्ष में मूल्य (रुपयों में) मू० (p_0)	प्रचलित वर्ष में मूल्य (रुपयों में) मू१ (p_1)	आधार वर्ष में कुल व्यय (रुपयों में) मू० र० ($p_0 q_0$)	प्रचलित वर्ष में कुल व्यय (रुपयों में) मू१ र० ($p_1 q_0$)
चावल	५ मन	१८	२०	९०	१००
गेहूँ	२ "	१६	१८	३२	३६
ज्वार	४ "	१०	१०·५	४०	४२
बाजरा	५ "	९	१०	४५	५०
दालें	३ "	१८	२०	५४	६०
घी	१ सेर	५	६	५	६
तेल	१६ "	२	२·२५	३२	३६
चीनी	३० "	१	०.९	३०	२७
नमक	१० "	०·१	०·१२	१	१·२
कपड़ा	१८ गज	१·५	१·२	२७	२१·६
ईंधन	३६ मन	०·७५	०·८	२७	२८·८
मिट्टी का तेल	२ टिन	१२·०	१४·२	२४	२८·४
मकान	१ मकान	१५	१६	१५	१६
				यो मू० र० = ४२२ ($\Sigma p_0 q_0$)	यो मू१ र० = ४५३ ($\Sigma p_1 q_0$)

प्रचलित वर्ष के लिए देशनांक

$$= \frac{\text{यो}_{\text{मू}_1 \text{ र}_0}}{\text{यो}_{\text{मू}_0 \text{ र}_0}} \times १००$$

$$= \frac{४५३}{४२२} \times १००$$

$$= १०७$$

Index number for current year

$$= \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{453}{422} \times 100$$

$$= 107$$

अब उपर्युक्त सारणी में दी गई सामग्री से **परिवार बजट रीति** (family budget method) या **भारित मूल्यानुपात रीति** (weighted relative method) से निर्वाह-व्यय देशनांक निम्न प्रकार बनाया जायगा।

वस्तुएँ	आधार वर्ष में कुल व्यय (रुपयों में) अ (V)	आधार वर्ष में मूल्य (रुपयों में) मू॰ (p_0)	प्रचलित वर्ष में मूल्य (रुपयों में) मू॰ (p_1)	मूल्यानुपात $\frac{मू_1}{मू_0} \times १०० \left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)$ प (I)	मूल्यानुपात × भार प × अ (IV)
चावल	९०	१८	२०	$\frac{१०}{९}$ × १००	१००००
गेहूँ	३२	१६	१८	$\frac{९}{८}$ × १००	३६००
ज्वार	४०	१०	१०·५	$\frac{२१}{२०}$ × १००	४२००
बाजरा	४५	९	१०	$\frac{१०}{९}$ × १००	५०००
दालें	५४	१८	२०	$\frac{१०}{९}$ × १००	६०००
घी	५	५	६	$\frac{६}{५}$ × १००	६००
तेल	३२	२	२·२५	$\frac{९}{८}$ × १००	३६००
चीनी	३०	१	०·९	$\frac{९}{१०}$ × १००	२७००
नमक	१	०·१	०·१२	$\frac{६}{५}$ × १००	१२०
कपड़ा	२७	१·५	१·२	$\frac{४}{५}$ × १००	२१६०
ईंधन	२७	०·७५	०·८	$\frac{१६}{१५}$ × १००	२८८०
मिट्टी का तेल	२४	१२·०	१४·२	$\frac{७१}{६०}$ × १००	२८४०
मकान	१५	१५·०	१६	$\frac{१६}{१५}$ = १००	१६००
	यो$_{अ}$ = ४२२ (ΣV)				यो$_{अप}$ = ४५३०० (ΣIV)

प्रचलित वर्ष के लिए देशनांक

$$= \frac{\text{यो}_{\text{अप}}}{\text{यो}_{\text{अ}}}$$

$$= \frac{४५३००}{४२२}$$

$$= १०७$$

index number for current year

$$= \frac{\Sigma IV}{\Sigma V}$$

$$= \frac{45300}{422}$$

$$= 107$$

जैसा कि पहले स्पष्ट किया जा चुका है इन दोनों रीतियों से देशनांक का मान एक ही आता है।

विभ्रम

निर्वाह व्यय देशनांकों में विभ्रम होने के कई कारण हो सकते हैं। पहला कारण प्राप्त प्रतिनिधि वस्तुओं के चुनाव व उनके मूल्यों से सम्वन्धित है। इसमें इस वात की सम्भावना रह सकती है कि ऐसी वस्तुओं का चुनाव हो जाय जो प्रतिनिधि न हों या प्रतिनिधि वस्तुएँ छूट जायँ। मूल्यों के उद्धरण में भी कठिनाइयाँ हो सकती हैं। ये कठिनाइयाँ वस्तुओं के प्रकारों और उनके विभिन्न रूपों के कारण उपस्थित होती हैं। फुटकर मूल्यों में समानता न होने के कारण भी विभ्रम हो सकता है। जैसा वताया जा चुका है, ये मूल्य एक ही स्थान में अलग-अलग हो सकते हैं। अगर वर्ग को निश्चित रूप से परिभाषित कर भी दिया जाय तो भी विभ्रम होने का कारण यह है कि एक वर्ग के अन्तर्गत आने वाले परिवार विभिन्न रूप से व्यय करते हैं। माँग में परिवर्तन होने के कारण भी देशनांकों में विभ्रम हो जाता है। पर इनका सवसे वड़ा दोष यह है कि गलत भारों का उपयोग करके झूठे देशनांक वनाये जा सकते हैं।

इन सव विभ्रमों के कारण निर्वाह-व्यय देशनाँक असंतोषजनक होते हैं। वास्तव में इन पर पूर्णतः निर्भर नहीं रहा जा सकता क्योंकि एक ही आय-समूह (income-group) के सदस्यों के विभिन्न वस्तुओं पर किये जानेवाले व्ययों का वितरण अलग-अलग होता है। यह वितरण परिवार के सदस्यों की संख्या, उनकी रुचियों, उनकी आयु, वस्तुओं आदि के मूल्य पर निर्भर रहता है और ये चीजें परिवर्तनशील हैं। दूसरी मान्यता इन देशनांकों को वनाने में यह है कि आधार वर्ष में उपयुक्त राशियाँ अपरिवर्ती हैं। अर्थात् वर्ष-प्रतिवर्ष केवल मूल्यों में परिवर्तन होता है, वस्तुओं की राशियों में नहीं। वस्तुतः ऐसा होता नहीं है। इन राशियों से साधारणतः परिवर्तन होते हैं। यह कहा जा सकता है कि इन देशनांकों में निर्वाह-

व्यय में हुए आधार वर्ष के सापेक्ष वृद्धि का अनुमान लगाया जाता है। पर आधार-वर्ष के रहन-सहन के स्तर को ठीक स्तर मानने का कोई कारण नहीं है। ये कठिनाइयाँ थोड़ी-बहुत दूर की जा सकती हैं यदि यथोचित सामग्री का संग्रहण बदलती हुई दशाओं के साथ किया जाय। पर इसकी कठिनाइयाँ स्वतः स्पष्ट हैं।

औद्योगिक उत्पादन के देशनांक (Indices of Industrial Production)

मूल्यों के निर्वाह-व्यय के देशनांकों के अलावा औद्योगिक उत्पादन के देशनांकों की भी रचना की जा सकती है। ये देशनांक बतायेंगे कि किसी निश्चित वर्ष की तुलना में प्रचलित वर्ष के उत्पादन में कितनी वृद्धि या कितना ह्रास हुआ है। स्पष्टतः ये परिवर्तन औद्योगिक उत्पत्ति (industrial output) के परिमाण में होने वाले परिवर्तनों से जाने जा सकेंगे। इसलिए औद्योगिक उत्पादन के देशनांकों की रचना करने के लिए सर्वप्रथम यह जानना आवश्यक है कि देश के विभिन्न उद्योगों के उत्पादन का परिणाम क्या है। ये देशनांक राशि में हुए परिवर्तन बताएगा। अगर द्रव्य के रूप में देशनांक रचना करनी हो तो इन राशियों के मूल्य ज्ञात किये जा सकते हैं। इस प्रकार औद्योगिक-उत्पादन-देशनांकों की रचना या तो उत्पत्ति की राशि जान कर की जा सकती है, या उसका मूल्य जानकर।

उत्पत्ति सम्बन्धी सूचना साधारणतः निम्नलिखित शीर्षकों के अन्तर्गत प्राप्त की जाती है :

(१) खनन उद्योग (Mining industries)—इसके अन्तर्गत अनिद्ध खनिजों (ores) और अन्य खनिजों का उत्पादन आता है, जैसे कोयला, लोहा, मैंगनीज, ताँबा, अल्यूमीनियम, पैट्रोलियम आदि।

(२) धातु-शोधन उद्योग (Metallurgical industries)—इसके अन्तर्गत वे उद्योग आते हैं जो खनिजों को धातुओं के रूप में या अन्य रूपों में बदलते हैं। जैसे लोहा और इस्पात उद्योग, हवाई-उद्योग आदि।

(३) यान्त्रिक उद्योग (Mechanical industries)—इसके अन्तर्गत यन्त्र या मशीनें बनाने वाले उद्योग आते हैं, जैसे जहाज, वायुयान, मोटर, रेल के इंजन और अन्य प्रकार की मशीनें बनाने वाले उद्योग।

(४) वस्त्र-उद्योग (Textile industries)—जैसे सूती कपड़ा, ऊनी कपड़ा रेशम, जूट आदि से सम्बन्धित उद्योग।

(५) वे उद्योग जिन्हें उत्पत्ति-कर देना पड़ता हो (Industries subject to excise duties)—चीनी, दियासलाई, शराब, तम्बाकू आदि।

(६) अन्य महत्वपूर्ण उद्योग (other important industries)—साबुन, रासायनिक पदार्थ, आटा-मिलें, सिमेंट, काँच के सामान, तेल आदि;

इन उद्योगों की उत्पादन-सम्बन्धी सामग्री मासिक, त्रैमासिक या वार्षिक उत्पत्ति के अनुसार उपलब्ध कर ली जाती है। आधार-वर्ष उत्पादन की राशि को १०० मानकर अन्य वर्षों के लिये उसकी गणना कर ली जाती है अर्थात् प्रतिशतता उत्पादन-अनुपात निकाल लिए जाते हैं। उत्पादन के इन प्रतिशतता अनुपातों को उचित रूप से चुने गए भारों द्वारा गुणा कर दिया जाता है। भारों की गणना उद्योग का देश के लिए महत्व, या उत्पत्ति के मूल्य या किसी अन्य उचित आधार के अनुसार किया जाता है। अनुपातों का भारित समान्तर या गुणोत्तर माध्य औद्योगिक-उत्पादन होता है। ये देशनांक कुल उत्पत्ति (gross output) या वास्तविक उत्पत्ति (net-output) के लिए रचे जा सकते हैं।

व्यापारावस्था देशनांक (Indices of Business Conditions)

व्यापार की आवश्यकताएँ कभी भी समान नहीं रहतीं। उनम परिवर्तन होते रहते हैं। कभी मन्दी रहती है, कभी तेजी। कभी व्यापार में समृद्धि रहती है और कभी वह संकटावस्था में रहता है। इन परिवर्तनों के लिए भी देशनांकों की गणना की जाती है। इनकी गणना करने का एक लाभ यह भी है कि इनके द्वारा व्यापारावस्थाओं के बारे में पूर्वानुमान (forecast) लगाया जा सकता है, क्योंकि ये परिवर्तन आवार्तिक (periodic) होते हैं। पर चूँकि व्यापारावस्थाओं की जानकारी के लिए पूरी अर्थव्यवस्था पर विचार करना पड़ता है—उसके किसी एक पहलू पर नहीं—इसलिए इसके लिए जो सामग्री संग्रहित करनी होगी या जिन विषयों के बारे में सूचना प्राप्त करनी होगी वे बहुत विस्तृत होंगी। अन्यथा वे व्यापारावस्था को सही रूप में प्रस्तुत नहीं कर पाएँगी। इंगलैण्ड के प्रोफेसर पीगू (Professor Pigou) ने निम्नलिखित पदों का चुनाव किया है।

(१) अनावृत्ति प्रतिशतता (unemployment percentage)।

(२) लोहे का उपभोग (consumption of pig iron)।

(३) इंगलैण्ड में मूल्य (prices in England)।

(४) त्रैमासिक विपत्रों पर बट्टे की दरें (rates of discount on three months' bills)।

(५) निर्मित पदार्थों का परिमाण (volume of manufactured goods)।

(६) कृषि से सम्बन्धित उत्पादन (agricultural production)।

(७) नौ प्रमुख फसलों की प्रति एकड़ उपज (yield per acre of nine principal crops)।

(८) खानों के उत्पादन के देशनांक (index of production from mines)।

(९) लन्दन क्लीयरिंग हाउस के भुगतान (clearings of London clearing house)।

(१०) बैंक-साख की वृद्धि (increase of bank-credit)।

(११) अप्राप्त उधार (credits outstanding)।

(१२) सामूहिक द्राव्यिक मजदूरी में वार्षिक वृद्धि (annual increase in the aggregate money wage)।

(१३) वास्तविक मजदूरी की दर (rate of real wages)।

(१४) सामान्य सामूहिक उपभोग (general aggregate consumption)।

(१५) बैंक आफ इंगलैण्ड की संरक्षित निधि और उसके दायित्व का अनुपात (proportion of reserve to liabilities of the Bank of England)।

ये राशियाँ किसी आधार वर्ष को लेकर अनुपातों के रूप में रखी जाती हैं। इन अनुपातों को उचित भारों से गुणा किया जाता है। इन गुणनफलों के योग को भारों के योग से विभाजित करके प्राप्त होने वाला अंक व्यापारावस्था-देशनांक होगा। अर्थात् इन राशियों का भारित माध्य व्यापारावस्था-देशनांक होगा।

देशनांकों के उपयोग और उनकी परिसीमाएँ

(Uses of Index Numbers & their limitations)

पिछले अनुच्छेदों को पढ़ कर यह विदित हो गया होगा कि देशनांकों का उपयोग ऐसे सभी स्थलों में किया जाता है जहाँ सामग्री आंकिक रूप में प्रस्तुत की जा सकती हो और समय के साथ परिवर्तित होती रहे। इसके लिए नियमित परिवर्तन होना आवश्यकता नहीं है। इसके साथ-साथ यह भी स्पष्ट हो गया है कि देशनांक सापेक्ष-परिवर्तन बताते हैं। देशनांक रचना की उपर्युक्त दो आवश्यकताएँ कई प्रकार की सामग्रियों में पाई जाती हैं, इसलिए विविध प्रकार के देशनांक मिलते हैं, जैसे मूल्यों के निर्वाह स्तर के, औद्योगिक उत्पादन के, व्यापारावस्था के, मजदूरी के, उत्पाद-

निर्यात के आदि । मूल्यों के देशनांकों द्वारा मूल्यों में होने वाले सामान्य परिवर्तन का ज्ञान होता है। इससे द्रव्य का मान (value of money) मालूम किया जा सकता है। द्रव्य के मान का तात्पर्य उसकी क्रय-शक्ति से है। अगर इसमें परिवर्तन शीघ्रातिशीघ्र हो तो अर्थ-व्यवस्था में स्थायित्व नहीं रहेगा। इसलिए इसे लगभग समान रखने का प्रयत्न किया जाता है। पर इस प्रयत्न को करने से पहले परिवर्तन का ज्ञान होना आवश्यक है, जो विना देशनांकों की सहायता के नहीं हो सकता। विभिन्न देशों के मूल्यों का स्थायित्व और उनकी क्रय-शक्ति भी इन देशनांकों द्वारा जानी जाती है। निर्वाह-व्यय देशनांकों द्वारा वास्तविक मजदूरी (real wages) में होने वाले परिवर्तनों को जाना जा सकता है। औद्योगिक उत्पादन देशनांकों या औद्योगिक कर्मण्यता देशनांकों (indices of industrial activity) द्वारा किसी देश के औद्योगीकरण का अनुमान लगाया जा सकता है। व्यापारावस्था-देशनांकों द्वारा किसी देश की आर्थिक अवस्था और उसकी आर्थिक प्रगति का अन्दाज लगाया जा सकता है। किसी देश की वास्तविक राष्ट्रीय आय में होने वाले उच्चावचनों (fluctuations) को भी जाना जा सकता है। साथ ही साथ इनकी सहायता से भविष्य में होनेवाली घटनाओं का पूर्वानुमान किया जा सकता है। इसी प्रकार विदेशी व्यापार के देशनांकों, ऋण-पत्रों के मूल्यों आदि के देशनांक भी तत्संवंधी परिवर्तनों के वारे में महत्वपूर्ण जानकारी देते हैं।

पर इन सब वातों के साथ-साथ इस वात का भी ध्यान रखना चाहिए कि ये केवल 'लगभग संकेतक' (approximate indicators) हैं। न केवल सामग्री प्राप्त करने में विभ्रम हो सकता है वल्कि आधार वर्ष के चुनाव, प्रतिनिधि वस्तुओं के चुनाव, मूल्यों और राशियों में स्थानानुसार वदलाव और भारावंटन (distribution of weights) में भी त्रुटियाँ होती हैं। पर इसके वावजूद भी इस वात पर विश्वास किया जा सकता है कि देशनांक जिस दिशा में जाएँगे उसी ओर चल (variable) की उपनति (trend) होगी। अर्थात् देशनांकों द्वारा उपनति जानी जा सकती है। इस वात का ध्यान रखना चाहिए कि एक उद्देश्य से वनाये गए देशनांकों का उपयोग दूसरे स्थलों में न हो अन्यथा गलत निर्वचन (interpretation) किये जाएँगे।

प्रश्नावली

(१) "देशनांक आर्थिक वैरोमीटर हैं।" इस कथन की व्याख्या कीजिए तथा साथ ही यह भी वताइए कि किसी प्रकाशित देशनांक का प्रयोग करते समय आप किस प्रकार की सावधानी वरतेंगे। (वी० काम०, इलाहावाद, १९५२)

(२) एक उदाहरण के द्वारा यह दिखाइए कि किस प्रकार आप देशनांक को एक आधार वर्ष से दूसरे आधार वर्ष में परिवर्तित करेंगे।

(बी० कॉम, आगरा, १९४०)

(३) थोक-मूल्यों के भारित देशनांक की व्याख्या एक उदाहरण सहित कीजिए तथा उसकी विशेषता भी बताइए।

(बी० काम०, नागपुर, १९४२)

(४) देशनांकों की रचना करने में (अ) गुणोत्तर मध्यक तथा (ब) शृंखला आधार पद्धति की अभियुक्ति (claims) बताइए। उदाहरण सहित इनकी पुष्टि कीजिए।

(बी० काम०, दिल्ली, १९५३)

(५) देशनांक की परिभाषा दीजिए। मूल्य-देशनांक की रचना में भारों के स्थान की भी व्याख्या कीजिए।

(एम० ए०, राजपूताना, १९५०)

(६) मूल्य-देशनांक की रचना के लिए एक आदर्श सूत्र की समस्या पर विचार कीजिए। देशनांक की उत्क्राम्यता से आप क्या समझते हैं, अच्छी तरह समझाइए।

(एम० ए०, पटना, १९४०)

(७) एक औद्योगिक स्थान के मजदूरों के निर्वाह-व्यय देशनांक की रचना किस पद्धति से करेंगे, संक्षेप में समझाइए।

(बी० काम०, आनर्स, आन्ध्र, १९४८)

(८) आर्थिक प्रभावों को व्याख्या करने में देशनांकों की विशेषता को उदाहरणों सहित प्रदर्शित कीजिए।

(बी० काम०, इलाहाबाद, १९४६)

(९) निर्वाह-व्यय-देशनांकों में भ्रमों के कौन से मुख्य कारण हैं? ये भ्रम किस प्रकार से दूर किये जा सकते हैं?

(बी० काम०, इलाहाबाद, १९३८)

(१०) देशनांकों की उपयोगिता बतलाइए। सामान्य तथा निर्वाह-व्यय देशनांकों की रचना में कौन-सा तरीका काम में लाया जाएगा।

(बी० काम०, आगरा, १९४२)

(११) निर्वाह-व्यय-देशनांकों की रचना करते समय आप आधार-निर्णय तथा भारों की निश्चितता के लिए किन बातों को ध्यान में रखेंगे?

(बी० काम०, आगरा, १९४३)

(१२) निम्नलिखित सारणी में कलकत्ता में १९१४ से १९३० तक के लिए जूट के वार्षिक थोक मूल्य (४०० पौंड प्रति गाँठ में) दिए हुए हैं। देशनांक की रचना कीजिए।

वर्ष	रुपये	वर्ष	रुपये
१९१४	७९	१९२२	८८
१९१५	५४	१९२३	७८
१९१६	६७	१९२४	७६
१९१७	५६	१९२५	११२
१९१८	७२	१९२६	९९
१९१९	१०२	१९२७	७६
१९२०	९८	१९२८	७५
१९२१	९४	१९२९	७१
		१९३०	५०

(१३) भारतवर्ष से १९३०–३१ से लेकर १९३५–३६ तक कच्चे कपास तथा कच्चे जूट के निर्यात में उच्चावचन (fluctuations) की व्याख्या करने के लिए एक अनुकूल देशनांक की रचना कीजिए। १९२६–३० को आधार वर्ष मान लीजिए।

वर्ष	कच्चे कपास की मात्रा (१००० टन)	कपास का मूल्य (लाख रुपयों में)	कच्चे जूट की मात्रा (१००० टन)	कच्चे जूट का मूल्य (लाख रुपयों में)
१९२५—३० (माध्य)	६०९	५९४१	८२६	२९२४
१९३०—३१	७०१	६४३३	६२०	१२८८
१९३१—३२	४२३	२३४५	५८७	१११९
१९३२—३३	३६५	२०२७	५६३	९७३
१९३३—३४	५०४	२७५३	७४८	१०९३
१९३४—३५	६२३	३४९५	७५२	१०८७
१९३५—३६	६०७	३३७७	७७१	१३७१

(आई० सी० एस०, १९३९)

(१४) भारत में औद्योगिक उत्पादन की निम्नलिखित सामग्री को शृंखला आधार पद्धति के द्वारा औद्योगिक-कर्मण्यता की तुलना करने के लिए प्रयोग में लाइए:

भारतवर्ष में औद्योगिक उत्पादन के देशनांक

वर्ष	देशनांक	वर्ष	देशनांक
१९१९—२०	१२०.	१९२६—२७	१४९
१९२०—२१	१२२	१९२७—२८	१५६
१९२१—२२	११६	१९२८—२९	१३३
१९२२—२३	१२०	१९२९—३०	१६२
१९२३—२४	१२०	१९३०—३१	१४९
१९२४—२५	१३७	१९३१—३२	१६०
१९२५—२६	१३६	१९३२—३३	१६०

(एम० काम०, लखनऊ, १९४३)

(१५) निम्नलिखित सारणी में सन् १९४४ से लेकर १९५१ तक के लिए अ, ब और स वस्तुओं के माध्य थोक मूल्य दिये हुए हैं।

वस्तु	माध्य थोक मूल्य (रुपयों में)							
	१९४४	१९४५	१९४६	१९४७	१९४८	१९४९	१९५०	१९५१
अ	५०·६	६१·६	६६·८	७१·०	७०·६	७२·०	७२·८	७५·६
ब	६·८	६·४	५·६	६·२	६·४	७·८	६·०	६·८
स	२१·६	२५·८	२६·४	२८·६	२८·६	३०·२	२८·०	३४·६

उक्त सामग्री से (१) १९४४ को आधार वर्ष मान कर (२) शृंखला पद्धति के द्वारा, देशनांक की रचना कीजिए।

(१६) नीचे चार वस्तुओं के थोक-मूल्य देशनांक तथा इनके माध्यों के ऊपर आधारित एक और देशनाँक, दिये हुए हैं। श्रृंखला आधार पद्धति द्वारा ५ वर्ष के लिए एक नये देशनांक की रचना कीजिये।

वर्ष	वस्तुओं के थोक मूल्य देशनांक				योग	माध्य
	अ	व	स	द		
१९४६	३०८	४७६	२२०	३२४	१३२८	३३२
१९४७	२१६	५१२	३२८	२४८	१३०४	३२६
१९४८	३४८	४४४	४००	४१६	१६०८	४०२
१९४९	३००	६१६	३८४	३७२	१६७२	४१८
१९५०	१७२	६६०	३५२	२४०	१४२४	३५६
१९५१	१७६	६३६	३५६	२४०	१४०८	३५२

(१७) निम्नलिखित सामग्री से १९३४ के लिए (१९३० पर आधारित) मूल्य देशनांक की रचना कीजिये। समझाइये कि आप किस माध्य का प्रयोग करेंगे ? इसके कारण भी लिखिये।

वस्तु	इकाई	मूल्य (१९३० में) रु०—आ०—पा०	मूल्य (१९३४ में) रु०—आ०—पा०
चावल	प्रतिमन	४—१२—०	७— २—०
गेहूँ	,, ,,	३—१०—०	४— ८—६
अलसी	,, ,,	६— ८—०	४—१४—०
गुड़	,, ,,	६— ४—०	६— ४—०
कपास	,, ,,	१७— ४—०	१२—१५—०
तम्बाकू	,, ,,	१५— ०—०	११— ४—०

(१८) निम्नलिखित सारणी में सन १९२७ औ १९३७ (जुलाई, १९४१=१०० में कुछ वस्तुओं के थोक मूल्य देशनांक दिए हुए हैं। अच्छी तरह समझाइए कि आप किस प्रकार १९३७ के मूल्यों के अनुपात की तुलना १९२७ के मूल्यों के अनुपात से करेंगे ? यदि आप एक से अधिक पद्धति का प्रयोग कर सकते हों तो उनके सापेक्ष लाभ और कमियों को वतलाइए।

साथ ही १९२६ तथा १९२८ के लिए (१९२५ पर आधारित) एक सामान्य मूल्य देशनांक की रचना कीजिए।

(२०) निम्नलिखित सामग्री से (१९३९ को आधार वर्ष मानकर) १९४९ में भोजन-वर्ग के लिए एक भारित देशनांक की रचना कीजिए।

भोजन-वर्ग की मदें	भार	मूल्य प्रति सेर (१९३९ में)			मूल्य प्रति सेर (१९४९ में)		
		रु०	आ०	पा०	रु०	आ०	पा०
गेहूँ	४०	०	१	३	०	७	६
चावल	२०	०	२	०	०	१०	०
चना	१५	०	१	०	०	५	६
अरहर की दाल	५	०	२	३	०	९	०
दूध	६	०	२	६	०	१०	०
लाई का तेल	१०	०	५	०	२	८	०
चीनी	३	०	४	०	०	१४	०
नमक	१	०	१	०	०	३	०
	१००						

(२१) निम्नलिखित सामग्री में, तुलना के हेतु, आप किन देशनांकों को प्रयोग में लाएँगे? कारण दीजिये।

वर्ष	चावल		गेहूँ		ज्वार	
	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा
१९२७	९·३	१००	६·४	११	५·१	५
१९३४	४·५	९०	३·७	१०	२·७	३

मूल्य तथा मात्राएँ कल्पित-इकाइयों में दी गई हैं।

(एम० ए०, कलकत्ता, १९३१)

(२२) खण्ड-उत्क्राम्यता परीक्षा से आप क्या समझते हैं, स्पष्ट कीजिये। निम्नलिखित सामग्री से फिशर के आदर्श देशनांक की रचना कीजिये तथा

यह भी बतलाइए कि यह किस प्रकार खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा को पूरा करता है।

	जिला सारन में कुल अनुमानित उत्पादन (हजार टनों में)		जिला सारन में फसलों के समय मूल्य (प्रतिमन)			
	१९३१—३२	१९३२—३३	१९३१—३२		१९३२—३३	
			रु०	आ०	रु०	आ०
शीतकालीन						
चावल	१७	२६	३	८	३	२
जौ	१०७	८३	२	०	१	१४
मकई	६२	४८	२	९	१	१२

(२३) निम्नलिखित सामग्री से यह सिद्ध कीजिये कि देशनांक के लिए, फिशर के आदर्श सूत्र द्वारा खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी हो जाती है।

वस्तु	आधार वर्ष में मूल्य	आधार वर्ष में मात्रा	प्रचलित वर्ष में मूल्य	प्रचलित वर्ष में मात्रा
अ	६	५०	१०	५६
ब	२	१००	२	१२०
स	४	६०	६	६०
द	१०	३०	१२	२५
इ	८	४०	१२	३६

(एम० काम०, इलाहाबाद, १९४६)

(२४) निम्नलिखित सामग्री से फिशर का आदर्श देशनांक बनाइए और यह दिखलाइए कि यह किस प्रकार समय-उत्क्राम्यता परीक्षा को पूरा करता है।

वस्तु	इकाई	आधार-वर्ष मूल्य	आधार-वर्ष मात्रा	प्रचलित-वर्ष मूल्य	प्रचलित-वर्ष मात्रा
गेहूँ	प्रति मन	८ रुपये	५०	२०	६०
घी	प्रति सेर	२	१५	६	१०
ईंधन	प्रति मन	१	२०	२	२५
चीनी	प्रति ५ से	२	१९	५	८
कपड़ा	प्रति गज	१	४०	३	३०

(२५) नीचे एक औसत मजदूर परिवार के बजट के वर्ग-देशनांक तथा वर्ग-भार दिए हुए हैं। भारों सहित (निर्वाह-व्यय देशनांक की रचना कीजिए।

वर्ग	देशनांक	भार
भोजन	३५२	४८
ईंधन तथा रोशनी	२२०	१०
कपड़ा	२३०	८
किराया	१६०	१२
विविध	१९०	१५

(आई० ए० एस०, १९५०)

(२६) इंगलैण्ड के एक शहर के मध्य-वर्ग परिवारों के बजटों से हमें निम्न-लिखित सूचना प्राप्त होती है:—

मदों पर व्यय	भोजन	किराया	कपड़ा	ईंधन	विविध
	३५%	१५%	२०%	१०%	२०%
मूल्य (१९२८)	१५० पौंड	३० पौंड	७५ पौंड	२५ पौंड	४० पौंड
मूल्य (१९२९)	१४५ पौंड	३० पौंड	६५ पौंड	२३ पौंड	४५ पौंड

१९२८ की तुलना में १९२९ के निर्वाह-व्यय अंकों में क्या-क्या परिवर्तन मालूम होते हैं। (बी०, काम० लखनऊ, १९४८)

(२७) निम्नलिखित सामग्री से इलाहाबाद के मजदूरों के विविध-वर्ग का निर्वाह व्यय देशनांक बनाइये।

विविध वर्ग (Miscellaneous Group)

क्रम संख्या	वस्तु	इकाई	भार	१९३९ में मासिक मूल्य (रुपयों में)	१९५१ में मूल्य (रुपयों में)
१	नाई	प्रति हजामत	१३	०—१—६	०—६—०
२	साबुन	प्रति 'बार'	९	०—१—३	१—४—०
३	दवाई	" बोतल	३	०—८—०	२—८—०
४	सुपारी	" पौंड	२५	०—५—०	१—५—०
५	बीड़ी	" बंडल	२२	०—१—०	०—४—०
६	यात्रा में व्यय		२७	०—४—६	०—१४—०
७	अखबार	प्रति कापी	१	०—०—१	०—२—०

(२८) निम्नलिखित सामग्री से (१९३९ को आधार मान कर) १९४० के लिए निर्वाह-व्यय देशनांक की रचना कीजिये। सामूहिक-व्यय रीति को प्रयोग में लाइये।

वस्तु	१९३९ में उपयोग की मात्रा	इकाई	१९३९ में मूल्य	१९४० में मूल्य
			रु०—आ०	रु०—आ०
चावल	६ मन	प्रति मन	५—१२	६— ०
गेहूँ	४ मन	" "	५— ०	८— ०
चना	१ मन	" "	६— ०	९— ०
अरहर की दाल	६ मन	" "	८— ०	१०— ०
घी	४ सेर	" सेर	२— ०	१— ८
चीनी	१ मन	" मन	२०— ०	१५— ०
नमक	१२ सेर	" सेर	२०— ८	१८— ०
तेल	२० सेर	" "	४— ०	४—१२
कपड़ा	५० गज	" गज	०— ८	०—१२
ईंधन	१२ मन	" मन	०— ८	१— २
मिट्टी का तेल	१ टिन	" टिन	४— ०	५— २
मकान का किराया	—	" मकान	१०—१२	१२—१२

(२९) निम्नलिखित सामग्री से प्रचलित वर्ष के लिये देशनांक की गणना सामूहिक-व्यय रीति से और परिवार वजट रीति से अलग-अलग कीजिए :—

वस्तुएँ	आधार वर्ष में उपयुक्त राशि	इकाई	आधार वर्ष के मूल्य (रु० में)	प्रचलित वर्ष के मूल्य (रु० में)
चावल	५ मन	मन	६	८
ज्वार बाजरा	५ मन	मन	४	५
गेहूँ	१ मन	मन	५	१०
चना	१ मन	मन	३	६
अरहर	½ मन	मन	४	६
अन्य दालें	२ मन	मन	३	४
घी	४ सेर	सेर	१.२५	२
गुड़	२ मन	मन	१.२५	५
नमक	१२½ सेर	सेर	४	५
तेल	२४ सेर	सेर	२०	२५
कपड़ा	४० गज	गज	०.२५	०.५
ईंधन (लकड़ी)	१० मन	मन	०.५०	०.८
मिट्टी का तेल	१ टिन	टिन	४	६
मकान का किराया	....	मकान	१२	१५

(बी० कॉम, इलाहाबाद १९४९)

(३०) १९३९ को आधार वर्ष मानकर, निम्नलिखित सारणी से १९४० के लिए निर्वाह-व्यय-देशनांक की रचना करिये :—

वस्तु	भार	१९३९ में मूल्य		१९४० में मूल्य		इकाई	
		रु०	आ०	रु०	आ०		
चावल	८	८	०	१०	०	प्रति	मन
गेहूँ	१५	५	०	८	०	"	"
दालें	६	६	०	७	०	"	"
चीनी	४	०	४	०	६	प्रति	सेर
घी	५	१	४	२	०	"	"
कपड़ा	१०	०	८	०	१०	प्रति	गज
ईंधन (लकड़ी)	५	१	४	१	१४	प्रति	मन
सिगरेट	३	०	५	०	७	प्रति	पैकेट
कागज	१	०	३	०	५	प्रति	दस्ता
मिट्टी का तेल	३	०	४	०	४	प्रति	बोतल

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९५१)

(३१) राष्ट्रीय उत्पादन की राशि तथा मूल्य के देशनांक किन-किन तरीकों से बनाये जाते हैं ? प्रत्येक विधि कहाँ तक संतोषजनक है । इसकी व्याख्या कीजिये ।

(आई० ए० एस०, १९४७)

(३२) आपको किसी नगर की कपड़े की मिलों के मजदूरों का निर्वाह व्यय देशनांक बनाना है, आप इसके लिए क्या सामग्री एकत्रित करेंगे ? देशनांक की रचना की विधि भी समझाइए । (आई० ए० एस० १९४८)

(३३) फिशर का देशनांक रचना का आदर्श सूत्र क्या है ? समय उत्क्राम्यता तथा खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा से आप क्या समझते हैं ? निम्नलिखित सामग्री से तुलना के हेतु उचित देशनांक की रचना कीजिये :—

वर्ष	चावल		गेहूँ		ज्वार	
	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा
१९३५	४	५०	३	१०	२	५
१९४५	१०	४०	८	८	४	८

(मूल्य तथा मात्रा कल्पित इकाइयों के हैं) (आई० ए० एस० १९५६)

अध्याय १०

सामग्री का चित्रों द्वारा निरूपण

(Diagrammatic Representation of Data)

यह बतलाया जा चुका है कि सांख्यिकी का एक महत्वपूर्ण कार्य सामग्री को बोधगम्य बनाना है। ऐसा करने की बहुत-सी रीतियाँ हैं। सामग्री का वर्गीकरण और सारणीयन इसी दृष्टिकोण से किया जाता है कि सामग्री सुगमतापूर्वक समझी जा सके। सामग्री के माध्य भी उसे सुगम तथा सरल बनाने ही के लिए निकाले जाते हैं। माध्यों से सामग्री की तुलना करना आसान हो जाता है। परन्तु सारणीयन और माध्यों की बहुत-सी परिसीमाएँ हैं। सामग्री को सुबोध बनाने की एक और रीति उसे चित्रों और बिन्दुरेखों के रूप में प्रस्तुत करना है। इस अध्याय में सामग्री को चित्रों (diagrams) के रूप में निरूपित करने की रीतियाँ दी गई हैं।

सामग्री को चित्रों के रूप में प्रस्तुत करने के लाभ

चित्रों का सब से बड़ा लाभ यह है कि **सामग्री को बोधगम्य बना देते हैं।** साधारणतया बड़े अंकों की महत्ता आसानी से समझी नहीं जा सकती क्योंकि लोगों का दैनिक कार्य में इनसे सम्बन्ध नहीं रहता। पर सांख्यिकी में ऐसे अंकों का उपयोग प्रायः होता है और जनसाधारण को उनका महत्व समझाने के लिए चित्रों की सहायता ली जाती है। यहाँ इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि चित्र हमेशा तुलनात्मक होते हैं। केवल एक चित्र का कोई अर्थ नहीं होता।

चित्रों के रूप में प्रस्तुत करने का दूसरा लाभ यह होता है कि वे **सर्व साधारण के लिए आकर्षक होते हैं।** प्रायः लोग अंकों में उतनी दिलचस्पी नहीं दिखाते जितनी चित्रों में; अगर किसी पृष्ठ में अधिक तथ्य दिए होंगे तो वे उसे छोड़ देंगे, पर चित्रों को ढूँढ़-ढूँढ़ के देखते हैं। यह एक मनोवैज्ञानिक तथ्य है। इसका लाभ उठा कर आंकिक तथ्यों को चित्रों में रखा जाता है। चित्रों को लोग ध्यानपूर्वक देखते हैं, इसलिए उनके द्वारा पड़ा हुआ प्रभाव स्थायी होता है। इस बात की संभावना अधिक है कि लोग चित्रों के रूप में प्रस्तुत तथ्यों को अधिक समय तक याद रखें।

क्योंकि इनके समझने में अधिक प्रयत्न नहीं करना पड़ता इसलिए ये समय की बचत करते हैं। अगर आंकिक रूप में तथ्यों को प्रस्तुत किया जाय तो वस्तुस्थिति

को समझने में पर्याप्त समय लग जायगा। पर चित्रों में यह बात नहीं है। उन्हें देखते ही वस्तु स्थिति का ज्ञान हो जायगा क्योंकि ये सापेक्षिक होते हैं।

इन सुविधाओं के कारण चित्रों का उपयोग प्रायः किया जाता है, विशेषतः उन स्थलों में जहाँ किसी तथ्य की महत्ता सर्व-साधारण को समझानी हो। पर इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि चित्रों का उपयोग केवल ऐसी सामग्री को प्रस्तुत करने के लिए किया जा सकता है जिसमें परस्पर-तुलना संभव हो अर्थात् एक ही समुदाय के अन्तर्गत आने वाले तथ्यों को, जिनको एक ही इकाई में नापा जा सके, इस रीति से प्रस्तुत किया जा सकता है। केवल एक चित्र का कोई कार्य नहीं होता, उससे तभी अर्थ निकाला जा सकता है जब तुलना करने के लिए कोई दूसरा चित्र भी साथ में दिया गया हो।

चित्रांकन के नियम

चित्रांकन का उद्देश्य, जैसा लिखा जा चुका है, सामग्री को सुबोध और चित्ताकर्षक रूप में प्रस्तुत करना है। सिवाय एक उपकरण के इनका स्वयं कोई महत्व नहीं है क्योंकि न तो वे अंकों के रूप में दिए गए तथ्यों के अतिरिक्त कुछ बताते हैं और न ही वे कुछ सिद्ध करते हैं। इसलिए इस उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए इनको बनाने के लिए कुछ नियम बनाए गए हैं।

चित्र खींचने के लिए सबसे पहले स्केल निश्चित कर लेना चाहिये और उसे स्पष्ट रूप से बता देना चाहिए। शीर्ष (vertical) स्केल बाईं ओर और अनुभूमिक (horizontal) स्केल दाईं ओर दिखाना चाहिए। चित्र का आकार स्केल के बदलने के साथ परिवर्तित हो जाता है। अगर दो या अधिक चित्र खींचे जा रहे हों तो उन्हें एक ही स्केल के अनुसार व्यक्त करना चाहिए। अलग-अलग स्केलों का प्रयोग गलत सूचना देगा। क्या स्केल रखना चाहिए, यह निश्चित रूप से नहीं बताया जा सकता है पर इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि उसको मानकर बने हुए चित्र न तो आकार में इतने बड़े हों कि उन्हें एक नजर में न देखा जा सके और न ही इतने छोटे हों कि उन्हें देखने के लिए प्रयत्न करना पड़े। स्केल निश्चित करने में उस कागज के आकार का भी ध्यान रखना चाहिए जिसमें उसे बनाया जा रहा हो। चित्र का आकार ऐसा होना चाहिए जिससे सब मुख्य बातें प्रदर्शित की जा सकें। अच्छा चित्र होने के लिए यह आवश्यक है कि वह साफ सुथरा और स्पष्ट हो, इसलिए इसको बनाने में उपकरण का उपयोग करना चाहिए। टेढ़े-मेढ़े चित्र खींचने से कोई लाभ नहीं है। प्रत्येक चित्र का उचित शीर्षक देना चाहिए और इस बात का ध्यान रखना

चाहिए कि वह स्वयं में सम्पूर्ण हो। विभिन्न तथ्यों को स्पष्टतया प्रस्तुत करने के लिए रंगों का प्रयोग करना चाहिए या विभिन्न कोणों में रेखाएँ खींचनी चाहिए।

विभिन्न प्रकार के चित्र

सामग्री को चित्रों के रूप में कई प्रकार से प्रस्तुत किया जा सकता है। इनमें से किस चित्र का उपयोग करना चाहिए, यह सामग्री की प्रकृति पर निर्भर रहेगा। चित्रांकन की ऐसी रीति चुननी चाहिए जो सामग्री को सबसे अधिक परिशुद्धता के साथ प्रस्तुत करे और जिससे वह सबसे अधिक शीघ्रता से समझ में आ जाय। विभिन्न प्रकार के चित्र जिनका उपयोग सामग्री प्रस्तुत करने में किया जाता है, निम्नलिखित हैं :

(१) विभा-चित्र (Dimensional Diagrams)

(क) एक-विभा-चित्र (one-dimensional diagrams)—ये रेखाओं या दण्डों (bar) के रूप में दिखाए जाते हैं। इनकी लम्बाइयाँ दिए हुए अंकों के अनुपात में होती हैं।

(ख) द्वि-विभा-चित्र (two-dimensional diagrams)—ये आयतों या वृत्तों के रूप में दिखाए जाते हैं। आयातों या वृत्तों के क्षत्रफल दिए हुए अंकों के अनुपात में होते हैं

(ग) त्रि-विभा-चित्र (three-dimensional diagrams)—ये घनों इष्टका (blocks) या रंभों (cylinders) के रूप में दिखाए जाते हैं। इनकी परिभाएँ (volumes) अंकों के अनुपात में रखी जाती हैं।

(२) **चित्र-लेख (Pictograms)**—इनमें चित्रों के रूप में सामग्री दिखाई जाती है। चित्र के आकार या उनकी संख्या अंकों के अनुपात में होती है।

(३) **मान-चित्र-लेख (Cartograms)**–इसमें किसी प्रदेश का मान-चित्र खींच कर विभिन्न स्थानों में उपस्थित तथ्यों को दिखाया जाता है। इससे वितरण को जाना जा सकता है।

(४) **विन्दुरेख या वक्र (Graphs & curves)**—अंकों को विन्दुरेखों या वक्रों के रूप में व्यक्त किया जाता है। ऐसा दो रीतियों से हो सकता है। या तो साधारण-स्केल लेकर या लघुगणक-स्केल लेकर।

चित्रों के रूप में आंकिक तथ्यो को प्रस्तुत करने की रीतियों का वर्णन आगामी अनुच्छेदों में किया गया है।

विभा-चित्र (Dimensional Diagrams)

एक-विभा-चित्र (one dimensional diagrams)

इन चित्रों में, जैसा बताया जा चुका है, केवल लम्बाई पर विचार किया जाता है। मोटाई दिखाई तो जाती है, पर उसका सामग्री से कोई सम्बन्ध नहीं रहता। इस प्रकार के चित्रों को दंड-चित्र (bar-diagram) कहते हैं। दंड-चित्र दो तरह के हो सकते हैं। एक को सरल दंड चित्र (simple bar-diagram) कहते हैं। इसमें एक दण्ड केवल एक तथ्य को चित्रित करता है। इस प्रकार तथ्य के विभिन्न आंकिक मूल्यों को विभिन्न दण्डों द्वारा दिखाया जाता है। दंड-चित्रों के आधार पर बहुगुण दंड-चित्र (multiple bar diagram) बनाए जा सकते हैं। इनमें दो या अधिक प्रकार की सामग्री के दंडों को एक साथ प्रस्तुत किया जाता है। पर उन स्थानों में जहाँ विभिन्न प्रकार के तथ्यों को प्रस्तुत करना होता है, प्रत्येक दण्ड को अन्तर्विभक्त (sub-diride) कर दिया जाता है और उसका प्रत्येक भाग अलग तथ्य को प्रस्तुत करता है। ऐसे दंड-चित्रों को अन्तर्विभक्त दंड-चित्र (sub-divided bar-diag rams) कहते हैं। पहले सरल-दंड चित्रों की रचना पर विचार किया जायगा और फिर अन्तर्विभक्त दंड-चित्रों की रचना पर।

(क) सरल दंड-चित्र (simple-bar-diagram)—सरल दंड-चित्र बनाने के लिए स्केल इस प्रकार निश्चित करना चाहिए कि सबसे लम्बा दंड दिये हुए कागज में आ जाय। इस बात का भी ध्यान रखना चाहिये कि चित्र के चारों ओर पर्याप्त स्थान छूट जाय ताकि उसका शीर्षक, स्केल और इकाइयाँ लिखी जा सकें। इन चित्रों में मोटाई पर विचार नहीं किया जाता, इसलिए वह ऐसी होनी चाहिए कि चित्र सुन्दर लगे। पर इस बारे में कोई प्रतिबन्ध नहीं है। अगर पदों की संख्या बहुत अधिक हो तो केवल रेखाएँ खींच कर भी काम चल सकता है। पर मोटाई भले ही कितनी ही निश्चित क्यों न की जाय, एक चित्र के विभिन्न दंडों के लिए वह समान रहनी चाहिए। दंडों की दूरी भी बराबर रहनी चाहिए। दंडों का एक सिरा अनुभूमिक आधार रेखा (horizontal base line) पर रखा जा सकता है या शीर्ष-आधार-रेखा (vertical base line) पर। पहली दशा में दंड शीर्ष-रूप में स्थित होंगे और दूसरे में अनुभूमिक रूप में। प्रायः आधार रेखा अनुभूमिक ली जाती है। पर आधार रेखा निश्चित करना सुविधा पर निर्भर रहता है। दंडों का उपयोग केवल ऐसी सामग्री के लिए किया जा सकता है जो खंडित (discrete) हो। इसलिए उन्हें मिलाकर नहीं रखना चाहिए क्योंकि इससे सामग्री में संतता

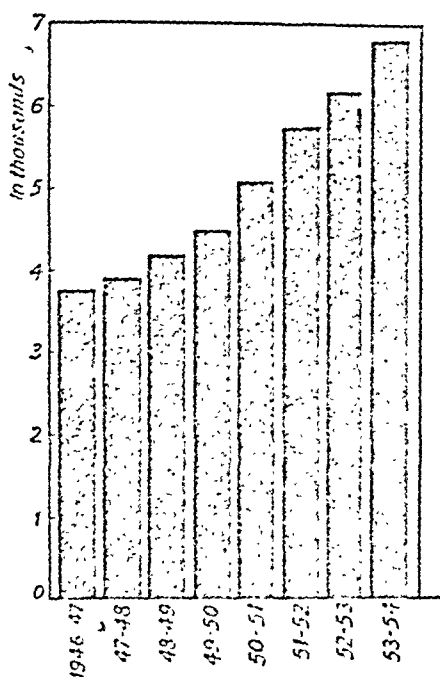
प्रतीत होती है। संतत सामग्री के लिए विन्दु रेखाओं का उपयोग किया जाता है। चित्र की चित्ताकर्पकता पर विशेप ध्यान देना चाहिए। इसके लिए चित्रों को रँगा जा सकता है या उनमें रेखाएँ खींची जा सकती हैं। आगामी अनुच्छेद में ऐसा चित्र खींचने की विधि दी गई है।

सारणी नं० १ में प्रयाग विश्वविद्यालय की पिछले कुछ वर्षों में, छात्र-संख्या दी गई है। इसको चित्र रूप में प्रस्तुत करना है।

सारणी संख्या १

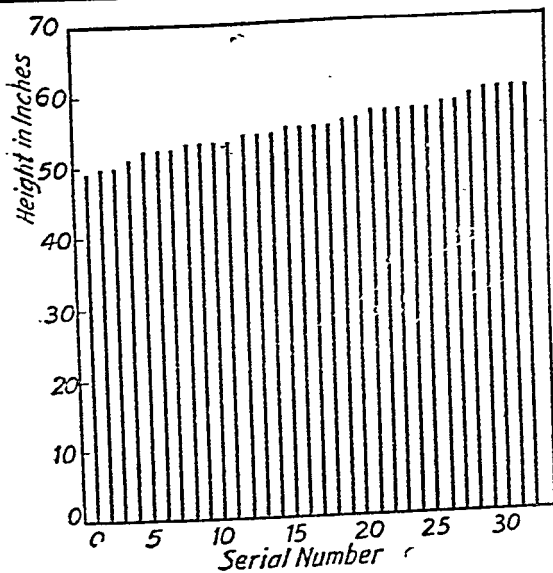
प्रयाग विश्वविद्यालय में छात्रों की संख्या

वर्ष	छात्रों की संख्या
१९४६-४७	३७३७
१९४७-४८	३८९७
१९४८-४९	४१८३
१९४९-५०	४४४७
१९५०-५१	५०६६
१९५१-५२	५७४०
१९५२-५३	६११९
१९५३-५४	६७४७

इस सामग्री में सबसे बड़ी संख्या ६७४७ है और यदि इसे ३" लम्बे दंड द्वारा दिखाया जाय तो सबसे छोटी संख्या जोकि ३७३७ है $\left(\frac{३\times ३७३७}{६७४७}\right)$ = १.५६" लंबे दंड द्वारा दिखलाई जायगी। इसी प्रकार अन्य संख्याओं को दर्शित करने वाले दंडों की लम्बाई इसी स्केल द्वारा निकाली जा सकती है। प्रस्तुत चित्र में दंडों का आधार अनुभूमिक रेखा मानी गई है और इनके बीच की दूरियाँ बराबर हैं। इसी प्रकार इनकी मोटाई भी समान है।

चित्र ५

अगर सामग्री बहुत अधिक परिमाण में हो तो दंडों के स्थान में रेखाओं का उपयोग किया जाता है। इनके खींचने की विधि वही है जो दंडों के खींचने की है। अन्तर केवल इतना ही है कि इनमें मोटाई नहीं होती। सारणी संख्या [illegible] में दी गई सामग्री को चित्र संख्या ६ में दिखाया गया है।

सारणी संख्या २

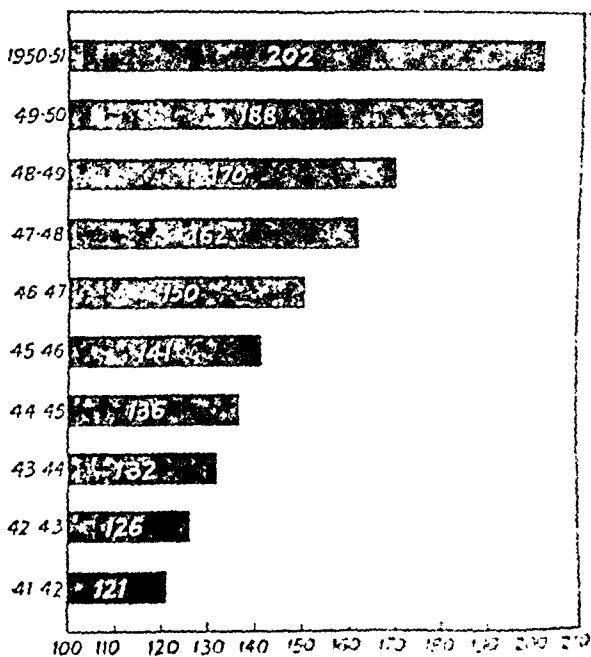
व्यक्ति संख्या	व्यक्तियों की ऊँचाई	व्यक्ति संख्या	व्यक्तियों की ऊँचाई
१	४ फीट ११ इंच	१७	५ फीट ५ इंच
२	५ ,, ० ,,	१८	५ ,, ५ ,,
३	५ ,, ० ,,	१९	५ ,, ६ ,,
४	५ ,, १ ,,	२०	५ ,, ६ ,,
५	५ ,, २ ,,	२१	५ ,, ७ ,,
६	५ ,, २ ,,	२२	५ ,, ७ ,,
७	५ ,, २ ,,	२३	५ ,, ७ ,,
८	५ ,, ३ ,,	२४	५ ,, ७ ,,
९	५ ,, ३ ,,	२५	५ ,, ७ ,,
१०	५ ,, ३ ,,	२६	५ ,, ८ ,,
११	५ ,, ३ ,,	२७	५ ,, ८ ,,
१२	५ ,, ४ ,,	२८	५ ,, ९ ,,
१३	५ ,, ४ ,,	२९	५ ,, १० ,,
१४	५ ,, ४ ,,	३०	५ ,, १० ,,
१५	५ ,, ५ ,,	३१	५ ,, १० ,,
१६	५ ,, ५ ,,	३२	६ ,, ० ,,

चित्र ६

इन दोनों चित्रों में अनुभूमिक रेखा आधार मानी गई है, चित्र संख्या ३ में जो सारणी संख्या ३ को निरूपित करता है आधार रेखा शीर्ष मानी गई है।

सारणी संख्या ३

प्रयाग विश्वविद्यालय में अध्यापकों की संख्या

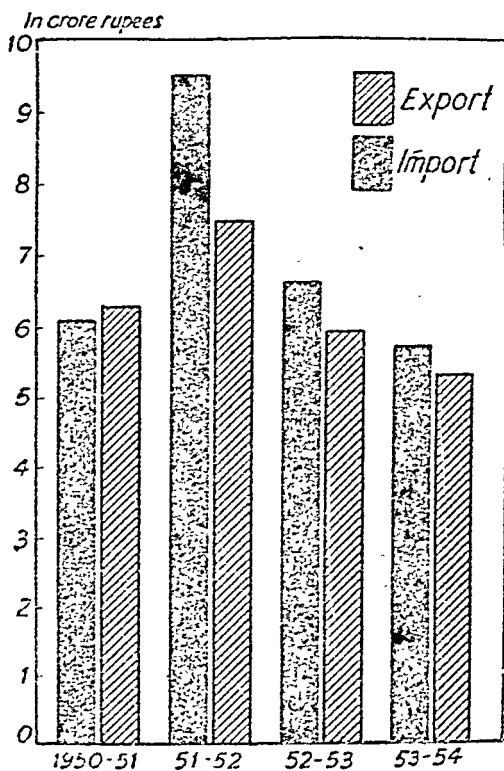
वर्ष	अध्यापकों की संख्या
१९४१-४२	१२१
१९४२-४३	१२६
१९४३-४४	१३२
१९४४-४५	१३६
१९४५-४६	१४१
१९४६-४७	१५०
१९४७-४८	१६२
१९४८-४९	१७०
१९४९-५०	१८८
१९५०-५१	२०२

प्रयाग विश्वविद्यालय में अध्यापकों की संख्या

चित्र ३

सरल दंड-चित्रों का उपयोग बहुगुण दंड-चित्रों (multiple bar diagrams) की रचना करने में भी किया जाता है। इस प्रकार के बहुगुण-दंड-चित्र बनाने की रीति का वर्णन यहाँ किया जा रहा है। सारणी सं० ४ में भारत का आयात और निर्यात (मूल्यों में) दिखाया गया है। इसको बहुगुण-दंड चित्र के रूप में चित्र संख्या ४ में दिखाया गया है।

सारणी संख्या ४

वर्ष	कुल आयात (करोड़ रुपयों में)	कुल निर्यात (करोड़ रुपयों में)
१९५०-५१	६१०·३६	६२४·६५
१९५१-५२	९५५·३९	७४२·७८
१९५२-५३	६६०·६५	५७८·३६
१९५३-५४	५६५·२५	५२७·९८

भारत का आयात और निर्यात

चित्र ४

इस प्रकार के दंड चित्रों में विभिन्न तथ्यों को एक साथ मिलाकर रखे गये दंडों को एक दूसरे से स्पष्टतः अलग-अलग कर देना चाहिये। इसके लिये विभिन्न रंगों या अलग-अलग प्रकार की रेखाओं का उपयोग किया जाता है।

(ख) अन्तर्विभक्त दंड-चित्र (sub-divided bar-diagrams)

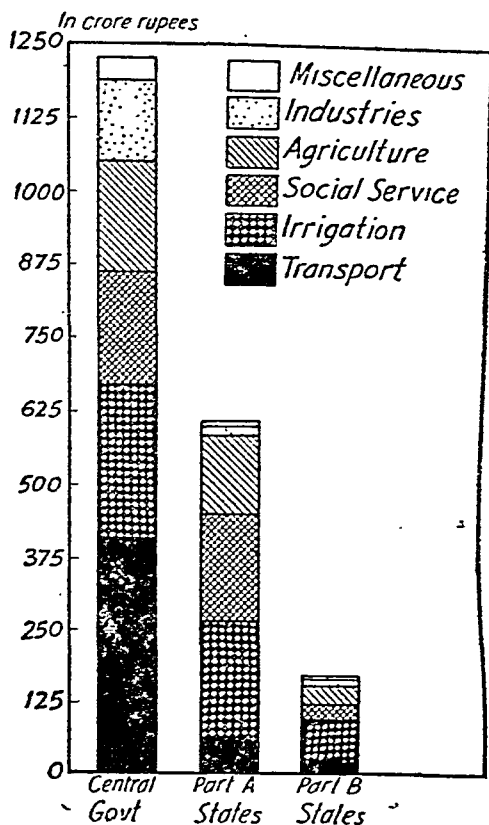
उन सामग्रियों को, जिन्हें उपभागों के रूप में रखा जा सकता है या ऐसी राशियों को जो अन्य राशियों के योग हों, अन्तर्विभक्त दंड-चित्रों के रूप में रखा जा सकता है। प्रत्येक दंड के भागों को अलग-अलग करने के लिए उन्हें विभिन्न रंगों या रेखाओं से दिखाया जाता है। वास्तविक मूल्य के बदले उनका प्रतिशत मूल्य लेकर भी चित्र बनाए जा सकते हैं। अन्तर्विभक्त दंड-चित्रों को खींचने की विधि निम्नलिखित अनुच्छेदों में दी गई है।

सारणी संख्या ५, पंचवर्षीय योजना के अन्तर्गत केन्द्रीय और राज्य सरकारों द्वारा विभिन्न विषयों पर किया जाने वाला व्यय दिखाती है।

सारणी संख्या ५

विभिन्न सरकारों द्वारा विभिन्न विषयों पर किया जाने वाला व्यय (करोड़ रुपयों में)

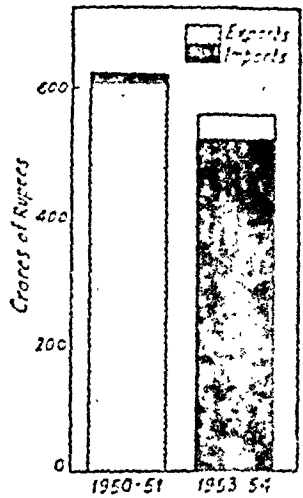
विषय	केन्द्रीय सरकार	क-राज्य सरकारें	ग-राज्य सरकारें
कृषि और विकास	१८६·३	१२७·३	३३·६
सिंचाई और शक्ति	२६५·१	२०६·१	८१·५
यातायात और संवाहन	४०१·५	९६·५	१८·८
उद्योग	१४६·७	१३·१	०·१
सामाजिक सेवा	१११·४	१९२·३	२८·१
विविध	४०·७	१०·०	०·३
कुल	१२४०·५	६१०·१	१३२·२

विभिन्न सरकारों का व्यय

चित्र ५

चित्र संख्या ५ में इस सामग्री का चित्रण किया गया है। प्रत्येक दंड को विभिन्न विषयों पर किये गये व्ययों के अनुपात में विभाजित किया गया है। यह चित्र न केवल इतना बताता है कि केन्द्रीय क राज्यों और ख राज्यों द्वारा किया गया कुल व्यय (जो पूरे दंड से दिखाया गया है) कितना है बल्कि यह भी बताता है कि प्रत्येक प्रकार की सरकारें विभिन्न विषयों पर कितना व्यय करती हैं (जो प्रत्येक दंड के भागों द्वारा दिखाया गया हैं)। इस चित्र की सहायता से हम विभिन्न सरकारों के पूरे व्ययों की, विभिन्न प्रकार की सरकारों के विभिन्न विषयों पर किए गये व्ययों की और एक ही प्रकार के राज्यों के विभिन्न विषयों पर किए गये व्यय की तुलना कर सकते हैं।

अगर दो राशियों का अन्तर दिखाना हो तो अन्तर्विभक्त दंडों का उपयोग किया जाता है। पूरा दंड एक राशि को दिखाता है और इसके दो भागों में एक भाग दूसरी राशि को दिखाता है और दूसरा भाग इन दो राशियों के अन्तर को। अगर अन्तर

ऋणात्मक हो तो एक प्रकार के रंग का या एक प्रकार की रेखाओं का उपयोग किया जाता है और धनात्मक होने पर दूसरे प्रकार के।

निम्नलिखित सारणी संख्या ६ में भारत का आयात-निर्यात (imports and exports) तथा उनका अन्तर दिया हुआ है। सं० १९५०-५१ में आयात अधिक तथा निर्यात कम था और इसके विपरीत सं० १९५३-५४ में निर्यात अधिक तथा आयात कम था, पहले हम एक दंड खींचेंगे जो कि निर्यात को निरूपित करेगा और उसके आयात वाला दंड बनाया जायगा।

सारणी संख्या ६

भारत का आयात निर्यात

(करोड़ रुपयों में)

वर्ष	निर्यात	आयात	अन्तर
१९५०-५१	६१०	६२४	−१४
१९५३-५४	५६५	५२७	+३८

भारत का आयात निर्यात

चित्र ६

राशियों के प्रतिशत दिखाने वाले अन्तर्विभक्त दंड-चित्रों में दंडों की लम्बाई समान रहती है। केवल प्रतिशत दिखाने वाले भागों की लम्बाई घटती-बढ़ती है। ऐसे दंड-चित्र बनाने के पहले किसी विषय सम्बन्धी राशि और कुल राशि में अनुपात निकाल लिया जाता है। इससे यह ज्ञात हो जाता है कि कोई राशि विशेष कुल राशि की कितनी प्रतिशत है। यह ज्ञात हो जाने पर दंड-चित्र पिछली रीतियों के अनुसार बनाए जाते हैं।

द्वि-विमा-चित्र (Two Dimensional Diagrams): (क) आयत (Rectangles): इन चित्रों में, जैसा बताया जा चुका है, राशियां क्षेत्रफल से निरूपित की जाती हैं। अतएव न केवल उनकी लम्बाइयों पर विचार करना पड़ता है बल्कि उनकी

चौड़ाइयों पर भी विचार किया जाता है, जब दो राशियों को दो आयतों के क्षेत्रफल द्वारा दिखाना होता है तो दो रीतियाँ अपनाई जा सकती हैं। या तो उनकी चौड़ाइयाँ बराबर रखी जाएँ और उनकी लम्बाइयाँ राशियों के अनुपात में बनाई जायँ, या उनकी लम्बाइयाँ समान रख के उनकी चौड़ाइयाँ राशियों के अनुपात में रखी जायँ। प्रत्येक दशा में दोनों आयतों के क्षेत्रफल राशियों के अनुपात में होंगे। प्रायः लम्बाई समान रखी जाती है और चौड़ाइयाँ अलग-अलग रखी जाती हैं और प्रत्येक आयत में विभिन्न विषय-सम्बन्धी राशियों को कुल राशियों के प्रतिशत के रूप में दिखाया जाता है। उदाहरण के लिए आगामी अनुच्छेदों में दी गई सामग्री का इस रीति से चित्रण करना बताया गया है।

सारिणी संख्या ७ (क)

प्रथम पंचवर्षीय योजना के अन्तर्गत किये जाने वाले व्यय (करोड़ रुपयों में)

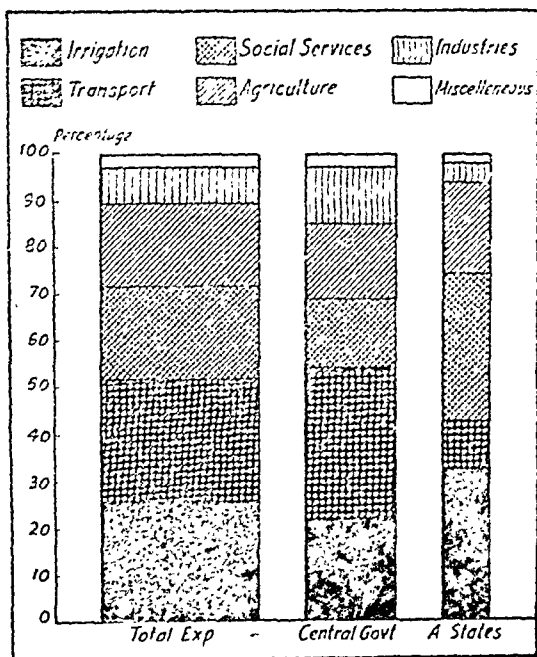
विषय	कुल	केन्द्रीय संख्या	राज्य सरकारें
यातायात और संवाहन	४९७	४०९·५	५६·५
कृषि और विकास	३६१	१८६·३	१२७·३
सामाजिक सेवा	४२५	१९१·४	१९२·३
सिंचाई और शक्ति योजना	५६१	२६५·९	२०६·१
उद्योग	१७३	१४६·७	१७·९
अन्य	५२	४०·७	१०·०
	२०६९	१२४०·५	६१०·१

अगर लम्बाई बराबर रखनी है तो इनको निरूपित करने वाले दंडों के आधार इन राशियों के अनुपात में होंगे। अर्थात् वे २०६९·० : १२४०·५: ६१०·१ में होंगे या ३.३९: २·०३: १ में होंगे। आधार निश्चित हो जाने पर विभिन्न कालमों के अन्तर्गत किए हुए व्यय का उस कालम के अन्त में दिये गये व्यय से प्रतिशत अनुपात निकाल लिया जाता है। इस अनुपात को सारणी संख्या ७ (ख) में दिखाया गया है। इन प्रतिशतों के अनुसार प्रत्येक आयत को विभाजित कर दिया जाता है। यही इस सामग्री का चित्रण हुआ।

सारणी संख्या ७ (ख)

विभिन्न विषयों पर किये गये व्यय (प्रतिशतों में)

विषय	कुल	संचयी प्रतिशत	केन्द्रीय सरकार	संचयी प्रतिशत	के-राज्य सरकारें	संचयी प्रतिशत
शक्ति और सिंचाई	२७·१	२७·१	२१·४३	२१·४३	३३·७७	३३·७७
यातायात	२४·०	५१·१	३३·०१	५४·४४	९·२८	४३·०५
सामाजिक सेवा	२०·५	७१·६	१५·४४	६९·८८	३१·५२	७४·५७
कृषि और विकास	१३·५	८९·७	१५·०२	८४·९०	२०·८७	९५·४४
उद्योग	८·४	९७·५	११·८२	९६·७२	२·९३	९८·३७
अन्य	२·५	१००·०	३·२८	१००·०	१·६३	१००·००
	१००·०		१००·०		१००·०	

प्रथम पं० व० यो० पर व्यय

चित्र ७

प्रतिशत दिखाने के स्थान पर पूर्ण राशियाँ भी दिखाई जा सकती हैं। आयतों की चौड़ाई और लम्बाई, दोनों बदली जा सकती हैं। इस प्रकार के चित्रों का प्रायः उपयोग

किया जाता है क्योंकि इससे अन्तर भी दिखाए जा सकते हैं। इनके साथ-साथ वर्गों और वृत्तों का भी उपयोग द्वि-विभा-चित्र वनाने में किया जाता है।

(ख) वर्ग (Squares)---द्वि-विभा चित्रों में कई स्थानों पर वर्गों का प्रयोग करना पड़ता है, विशेषत: उन स्थानों में जहाँ एक राशि अन्य राशियों की अपेक्षा वहुत वड़ी होती है। अगर इन स्थानों में दंड-चित्रों का उपयोग किया जाय तो वड़ी राशि को निरूपित करने वाला दंड अन्य की अपेक्षा वहुत वड़ा हो जायगा। यहाँ वर्गों का उपयोग किरने में यह लाभ रहेगा कि कोई वर्ग वहुत वड़ा नहीं हो पायेगा। इसका कारण यह है कि वर्ग-चित्रों में भी क्षेत्रफल पर विचार किया जाता है। और अगर दो राशियों के अनुपात के क्षेत्रफल वनाये जाएँ तो वर्गों की लम्वाइयाँ इन राशियों के वर्गमूल के अनुपात में होंगी। उदाहरण के लिए दो राशियाँ १०० और १६०० लीजिए। अगर दंड चित्र वनाए जाएँ तो दंडों की लम्वाइयाँ १:१६ में होंगी। पर अगर वर्ग चित्र वनाए जायँ तो लम्वाइयाँ १ : ४ में होंगी और क्षेत्रफल १ : १६ में। इस प्रकार क्षेत्रफल राशियों के अनुपातों को व्यक्त करेंगे।

वर्ग-चित्रण करने के लिए पहले राशियों का वर्गमूल ले लिया जाता है और इन वर्गमूलों के अनुपात में प्रत्येक वर्ग की लम्वाई वनाई जाती है। इन लम्वाइयों पर वने वर्ग राशियों का निरूपण करते हैं। सारणी संख्या ८ (क) में सामग्री दी गई है जिसका चित्रण चित्र संख्या ८ में दिया गया है।

सारणी संख्या ८ (क)

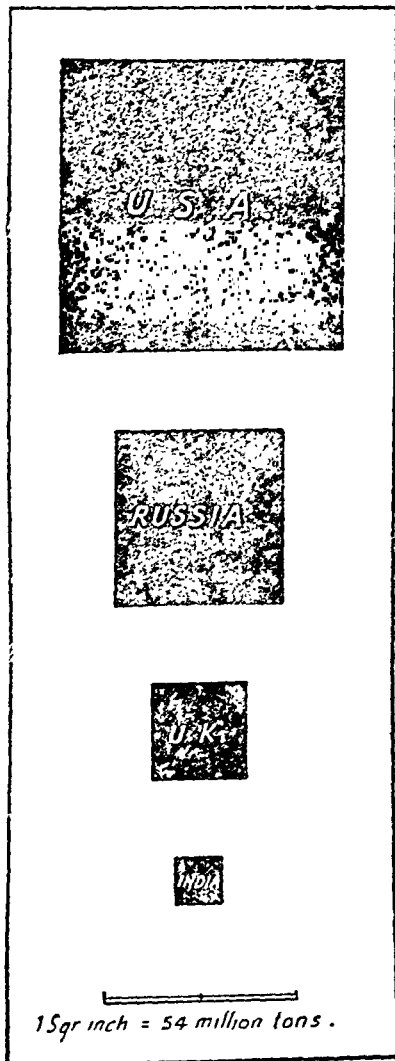
विभिन्न देशों में कोयले का उत्पादन (१९५१)

देश	उत्पादन (००,००,००० टनों में)
सं० रा० अमेरिका	१३०·१
रूस	४४.०
यूनाइटेड किंगडम	१६·४
भारत	३·३

इन राशियों के वर्गमूल निकाल लिए गए हैं और उनके अनुपत में वर्गों की भुजाओं की गणना की गई है। ये गणनाएँ सारणी संख्या ८ (ख) में दी गई हैं।

सारणी संख्या ८ (ख)

उत्पादन (१)	कालम १ की संख्याओं का वर्गमूल (२)	वर्ग की भुजाओं की लम्वाइयाँ (३)
१३०·१	११·४०	१.५६
४४.०	६·६३	०·९१
१६.४	४·०५	०·५५
३·३	१·८२	०·२५

विभिन्न देशों में कोयले का उत्पादन

चित्र ८

तुलना में सुविधाजनक बनाने और स्थान की बचत करने के लिए कुल राशि को भागों में भी बाँटा जाता है, और इससे वर्ग द्वारा दिखाया जाता है और उस सामग्री के हिस्सों को इस वर्ग के भाग करके निरूपित किया जाता है : ये भाग आयतों के रूप में होते

हैं। आयत अनुभूमिक होंगे या शीर्ष, यह इस बात पर निर्भर करता है कि वर्ग का विभाजन किस रीति से किया गया है। सारणी संख्या ९ में दी गई सामग्री का इस प्रकार किया गया चित्रण चित्र संख्या ९ में दिया गया है।

सारणी संख्या ६ (क)

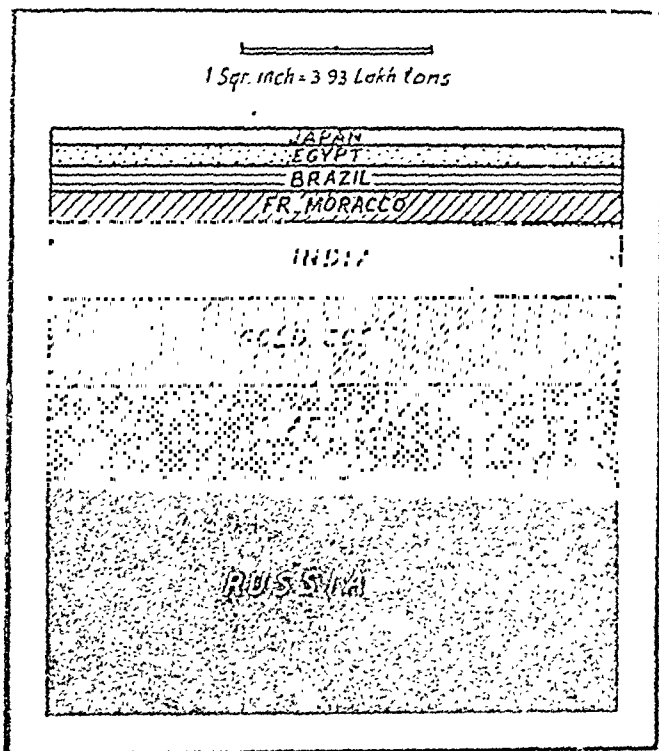
विभिन्न देशों में मेंगनीज का उत्पादन (हजार टनों में)

देश	उत्पादन
रूस	२,२००
दक्षिण अफ्रीका	८७०
गोल्ड कोस्ट	७८३
भारत	७४७
फ्रांसीसी मॉरोको	३१६
ब्राजील	१७९
मिश्र	१६७
जापान	१४८
कुल	५,४१०

अब ५४१० का वर्गमूल ले लिया गया। इसका वर्गमूल लगभग ७४.१ हुआ। अब अगर ७४.१ को ३.७" से दिखाया जाय तो विभिन्न देशों के उत्पादन को दिखाने के लिए ३.७" के भाग करने पड़ेंगे। गणना करने पर प्राप्त हुए भाग सारणी संख्या ९ (ख) में दिए गये हैं।

सारणी संख्या ६ (ख)

देश	उत्पादन (हजार टनों में)	लम्बाई (इंचों में)	संचयी लम्बाई (इंचों में)
रूस	२,२००	१·५१	१·५१
दक्षिण अफ्रीका	८७०	०·५९	२·१०
गोल्ड कोस्ट	७८३	०.५४	२·६४
भारत	७४७	०·५१	३·१५
फ्रांसीसी मॉरोको	३१६	०·२२	३·३७
ब्राजील	१७९	०·१२	३·४९
मिश्र	१६७	०·११	३·६०
जापान	१४८	०·१०	३·७०
कुल	५४१०	३·७०	

विभिन्न देशों में मैंगनीज का उत्पादन

चित्र ९

(ग) वृत्त (Circles)—द्वि-विमा-चित्रों में वृत्तों का भी मुख्य स्थान है, इसका कारण निरूपण में आसानी होना है। किसी भी वृत्त का क्षेत्रफल अपनी त्रिज्या (radius) के वर्ग का अनुलोमापाती (directly proportional) होता है। अर्थात् अगर एक वृत्त की त्रिज्या दूसरे वृत्त की त्रिज्या की चौगुनी है तो पहले वृत्त का क्षेत्रफल दूसरे के क्षेत्रफल का सोलह गुना होगा। इसलिए वर्ग के स्थान पर वृत्तों का उपयोग किया जा सकता है। जिस प्रकार वर्गों के रूप में चित्र बनाने के लिए राशि का वर्गमूल लिया जाता है, उसी प्रकार वृत्तों के रूप में चित्र बनाने के लिए भी राशि का वर्गमूल लेते हैं। वर्गों के रूप में निरूपण में इस वर्गमूल के अनुपात में वर्गों की भुजाएँ रखी जाती हैं, वृत्त-निरूपण में इन वर्गमूलों के अनुपात में त्रिज्याओं की

लम्बाइयाँ होती हैं, सारणी संख्या १० में दी गई राशियों को वृत्तों के रूप में चित्र संख्या १० में निरूपित किया गया है।

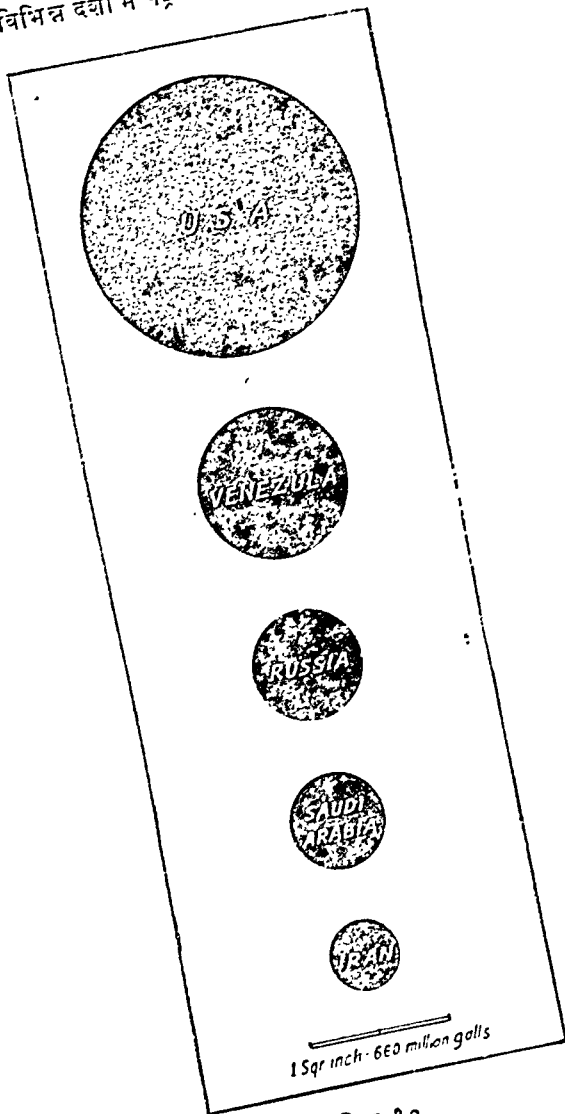
सारणी संख्या १०

विभिन्न देशों में पेट्रोलियम का उत्पादन (दस लाख पौंडों में)

देश	उत्पादन (दस लाख पौंडों में)
संयुक्त राष्ट्र अमेरिका	२,२००
वेनेजूला	६२२
रूस	३०१
सऊदी अरब	२६८
ईरान	१३२

इनके वर्गमूल लेने पर और त्रिज्याओं (radii) की लम्बाई निश्चित करने पर यह सारणी निम्नलिखित रूप में होगी :

उत्पादन	वर्गमूल	त्रिज्या की लम्बाई (इंचों में)
२,२००	४६·९	१·०२
६२२	२४·९	·५४
३०१	१७·४	·३८
२६८	१६·४	·३५
१३२	११·५	·२५

विभिन्न देशों में पेट्रोलियम का उत्पादन

चित्र १०

इन त्रिज्याओं को लेकर खींचे गये वृत्तों के क्षेत्रफल राशियों के अनुपात में होंगे। वृत्त सुडौल होने के कारण वर्गों से अधिक सुन्दर लगते हैं और इनको खींचने में सरलता

भी होती हैं। इसलिए ऐसे स्थानों में जहाँ वृत्त या वर्ग, दोनों में किसी का भी प्रयोग किया जा सके, वृत्तों का प्रयोग करना चाहिए।

जिस प्रकार ऐसी राशि को जो कई छोटी राशियों के योग से बनी हो, एक वर्ग द्वारा दिखाया जाता है और छोटी राशियों को इस वर्ग के भागों द्वारा, उसी प्रकार पूरे वृत्त द्वारा एक राशि दिखाई जा सकती है जिसके संघटक (components) इस वृत्त के शकलों (sectors) द्वारा दिखाये जाएँगे। इस प्रकार के चित्रों को कोण-चित्र (angular diagrams) कहा जाता है। शकलों को खींचना अपेक्षाकृत अधिक सरल होता है और ये सुन्दर दीखते हैं, इसलिए प्रायः वर्गों के स्थान पर वृत्तों का उपयोग किया जाता है।

शकलों के क्षेत्रफल उनके द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाए गये कोणों के अनुपात में होते हैं। वृत्त के केन्द्र पर एक कोण ३६०° का होता है। यह ३६०° का कोण पूरी राशि को निरूपित करता है। इस राशि के संघटकों को निरूपित करने वाले शकल केन्द्र पर कितने अंश का कोण बनाएँगे, इसकी गणना अंकगणित से की जा सकती है। इस प्रकार प्रत्येक संघटक राशि को निरूपित करने वाला शकल निश्चित कर लिया जाता है। सारणी संख्या ११ (क) में विभिन्न सरकारों द्वारा विभिन्न विषयों पर किये जाने वाले व्यय दिये गये हैं, जिसका चित्ररूप में निरूपण संख्या ११ में किया गया है।

सारणी संख्या ११ (क)

विभिन्न सरकारों द्वारा प्रथम पंचवर्षीय योजना के अन्तर्गत किया जाने वाला व्यय

(करोड़ रुपयों में)

सरकारें	व्यय
केन्द्रीय सरकार (रेलवे सहित)	१,२४१
क-राज्य सरकारें	६१०
ख-राज्य सरकारें	१७३
ग-राज्य सरकारें	३२
जम्मू और काश्मीर	१३
योग	२०६९

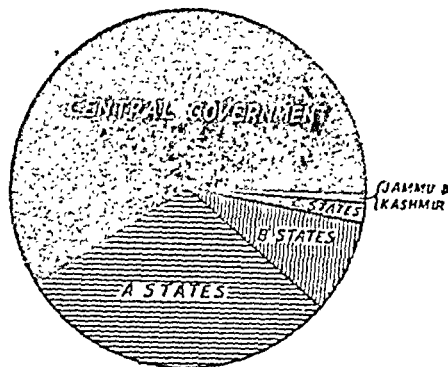
इसका चित्रण करने के लिए कोई त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा। इस वृत्त के केन्द्र पर बनने वाला ३६०° का कोण २०६९ करोड़ रुपये दिखाता है। अर्थात् इस वृत्त का क्षेत्रफल २०६९ करोड़ रुपये दिखाता है। इसलिए १,२४१ रुपये दिखाने वाले शकल को बनाने के लिये पहले ३६०° को २०६९ से विभाजित किया जायेगा। इस प्रकार प्राप्त भजनफल १ करोड़ रुपये दिखाने वाले शकल द्वारा केन्द्र पर बनाये गये कोण को

तायेगा। १२४१ करोड़ रुपये दिखाने वाले शकल द्वारा केन्द्र पर बनाए जाने वाले कोण की गणना १ करोड़ रुपये दिखाने वाले शकल के कोण को १२४१ से गुणा करके प्राप्त की जाएगी। अर्थात् १२४१ रु० निरूपित करने वाला शकल केन्द्र पर $\frac{१२४१ \times ३६०}{२०६९}$ अंश का कोण बनायेगा। इस प्रकार अन्य राशियों के लिए गणना करके विभिन्न शकलों के केन्द्र पर बनाए जाने वाले कोण सारणी संख्या ११ (ख) में दिये गये हैं।

सारणी संख्या ११ (ख) :

विभिन्न राशियों को निरूपित करनेवाले शकलों के द्वारा केन्द्र पर बनाए जाने वाले कोण :

रुपये (करोड़ों में)	कोण
१२४१	२१५.९
६१०	१०६.१
१७३	३०.१
३२	५.६
१३	२.३
	३६०.०

प्रथम पंचवर्षीय योजना का व्यय

चित्र ११

प्रत्येक शकल द्वारा केन्द्र पर बनाए जाने वाले कोण को निश्चित करने के बाद वृत्त में कोई त्रिज्या खींच ली जाती है। इस त्रिज्या से २.३° का कोण बनाती हुई रेखा

अंतिम राशि को बताएगी। इस दूसरी रेखा से ५.६° का कोण बनाया जायगा, और इस प्रकार तब तक बनाते जाना चाहिये जब तक राशियाँ समाप्त न हो जायँ।

अगर दो या अधिक सामग्रियों और उनके संघटकों की परस्पर तुलना करनी हो तो एक से अधिक वृत्त खींचने पड़ते हैं। इन वृत्तों की त्रिज्याएँ राशियों के वर्गमूल के अनुपात में होती हैं। प्रत्येक शकल को पिछली रीति से निर्धारित किया जाता है। सारणी संख्या १२ (क) पंचवर्षीय योजना के अन्तर्गत केन्द्रीय सरकार और क-राज्य सरकारों द्वारा विभिन्न विषयों पर किया जाने वाला व्यय दिया गया है, जिसका निरूपण चित्र संख्या १२ में किया गया है।

सारणी संख्या १२ (क)

केन्द्रीय और क–राज्य सरकारों द्वारा विभिन्न विषयों पर किया जाने वाला व्यय (करोड़ रुपयों में)

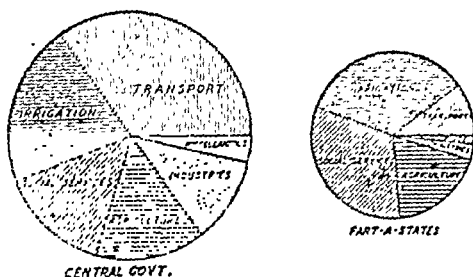
विषय	केन्द्रीय सरकार	क-राज्य सरकार
कृषि और सामुदायिक विकास	१८६.३	१२७.३
सिचाई और शक्ति	२६५.९	२०६.१
यातायात और संवाहन	४०९.५	५६.५
उद्योग	१४६.७	१७.९
सामाजिक सेवा	१९१.४	१९२.३
विविध	४०.७	१०.०
योग	१२४०.५	६१०.१

१२४१ और ६१० के वर्गमूल क्रमशः ३५.५ और २४.७ हुए। इसलिए वृत्तों की त्रिज्याएँ ३५.५ : २४.७ के अनुपात में होंगी। अगर पहले वृत्त की त्रिज्या १.८ इंच (लगभग) है तो दूसरी की १.२ इंच (लगभग) होगी। विभिन्न विषयों को निरूपित करने वाले शकलों द्वारा केन्द्र पर बनाए जाने वाले कोण (लगभग) निम्नलिखित होंगे।

सारणी संख्या १२ (ख) :

विभिन्न शकलों द्वारा संगत वृत्तों पर बनाए जाने वाले कोण (अंशों में)।

विषय	केन्द्रीय सरकार	क-राज्य सरकारें
कृषि और विकास	५८	७५
सिंचाई और शक्ति	७७	१०२
यातायात और संवाहन	११९	३३
उद्योग	४३	११
सामाजिक सेवा	५५	११३
विविध	१२	६
योग	३६०	३६०

केन्द्रीय और 'क' राज्य सरकारों का व्यय

चित्र १२

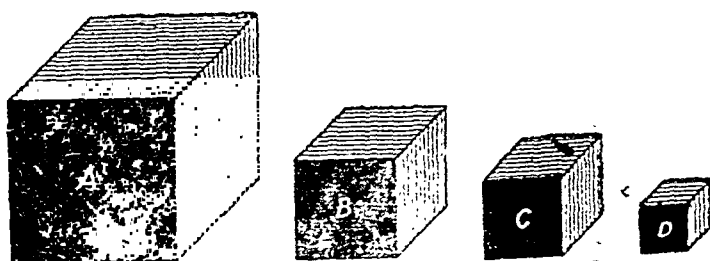
वृत्तों का उपयोग उन स्थानों पर किया जा सकता है जहाँ वर्गों या आयतों का उपयोग सम्भव हो, पर इनके बनाने में काफी गणना करनी पड़ती है। अतएव ऐसी राशियों के लिए जिनमें संघटकों की संख्या अधिक है, इनका उपयोग कम करना चाहिए, वैसे कई छोटे संघटकों को एक साथ मिलाकर उन्हें एक शकल द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है।

त्रि-विभा-चित्र (Three Dimensional Diagrams) **घन** (Cubes)—त्रि-विभा-चित्रों के अन्तर्गत रमक (cylinders) तथा गोल (spheres) आते हैं, पर इनकी बनावट और उसके लिए की जाने वाली गणना कठिन है। अतएव इन पर विचार नहीं किया जायगा। इन चित्रों का बोध देने के लिए घन निर्माण का वर्णन देना पर्याप्त है। जैसा द्वि-विभा-चित्रों के अन्तर्गत बताया जा चुका है, कई राशियों में इतना अधिक अन्तर रहता है कि उन्हें दंड चित्रों से निरूपित करने

पर आकारों में बहुत बड़ा अन्तर हो जाता है। यह बात द्वि-विभा-चित्रों के लिए भी सही है। मान लीजिए दो राशियाँ १ : ७२९ के अनुपात में हैं। अगर उन्हें दंड-चित्रों द्वारा दिखाया जाय तो एक दंड की लम्बाई अगर १" रखी जाय तो दूसरे की ६० फीट ९ इंच रखनी पड़ेगी। अगर द्वि-विभा चित्रों का उपयोग किया जाय तो भी समस्या हल नहीं होती। क्योंकि अगर इन्हें वर्गों या वृत्तों के द्वारा निरूपित किया जाय तो यदि एक वर्ग की भुजा या एक वृत्त की त्रिज्या १" रखी जाय तो दूसरे की भुजा या त्रिज्या २७" होगी। ऐसे स्थलों में घनों का उपयोग किया जाता है, क्योंकि इसमें घनों की भुजाओं का अनुपात राशियों के घनमूलों के अनुपात में होता है। अर्थात् अब जो घन बनेंगे उनकी भुजाएँ १:९ के अनुपात में होंगी। घनों के रूप में चित्रण करने का उदाहरण यहाँ दिया जा रहा है। सारणी संख्या १३ (क) में चार नगरों की आबादी दी हुई है जिसका चित्रण चित्र संख्या १३ में दिया गया है।

सारणी संख्या १३ (क)

नगर	आबादी
अ	५,००,०००
ब	१,००,०००
स	५०,०००
द	१०,०००

कॉलम २ में दी गई संख्याओं के घनमूल (लगभग) क्रमशः ७९·२५, ४६·४५, ३६·८१ और २१·५३ हुए। चित्र संख्या १३ में दिए गये घनों की भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः १·५८, ·९२, ·७४ ·४४ और घनमूल को ५० से भाग दे कर प्राप्त की गई हैं।

चित्र १३

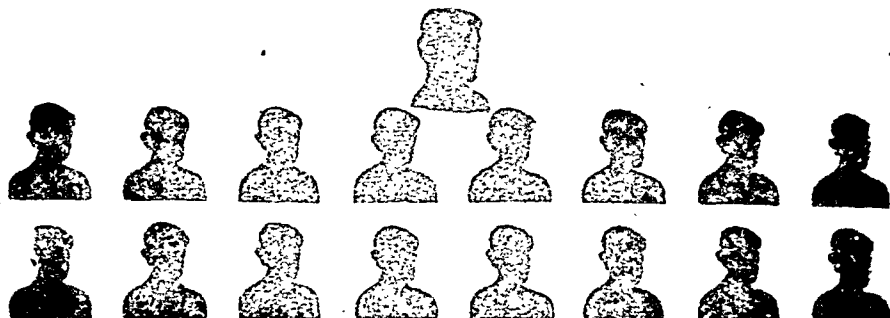
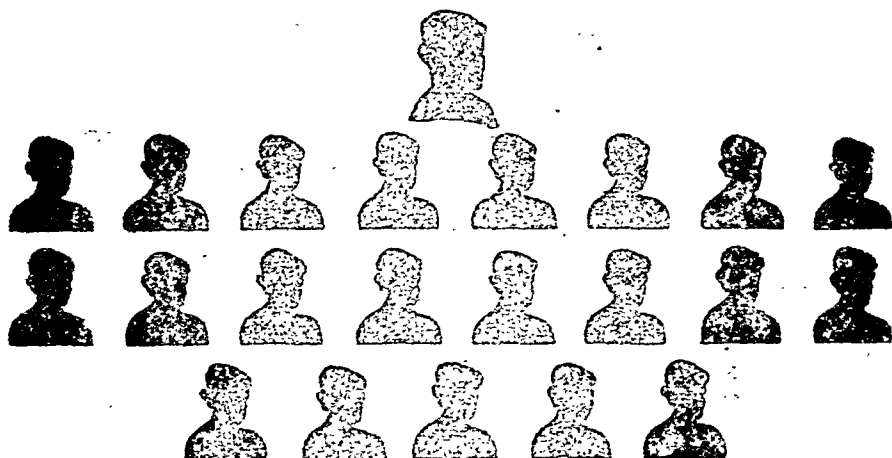
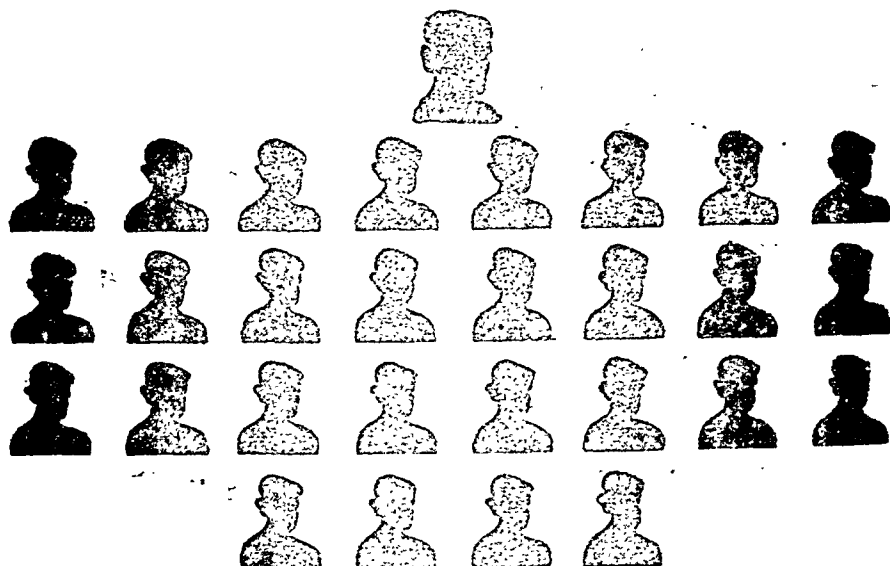
त्रि-विभा चित्रों का बनाना बहुत कठिन है और घनों को बनाने में घनमूल की गणना करनी पड़ती है जो सरल रीतियों से नहीं की जा सकती। अतएव इनका उप-

योग केवल उन स्थलों में करना चाहिए जहाँ ऐसा करना नितान्त आवश्यक हो जाय; पर इसके बावजूद भी त्रि-विभा-चित्र अपेक्षाकृत अच्छे लगते हैं, क्योंकि संसार में प्रत्येक वस्तु तीन विभा वाली होती है। अगर दो से अधिक प्रकार की राशियों की परस्पर तुलना करनी हो तो एक ही पैमाना लेकर दो प्रकार के कई घन खींचे जा सकते हैं। इस प्रकार के चित्रों में एक प्रकार के घनों की परस्पर तुलना तो की ही जा सकती है, पर इनके साथ-साथ दूसरे प्रकार के घनों से भी तुलना करना सम्भव है।

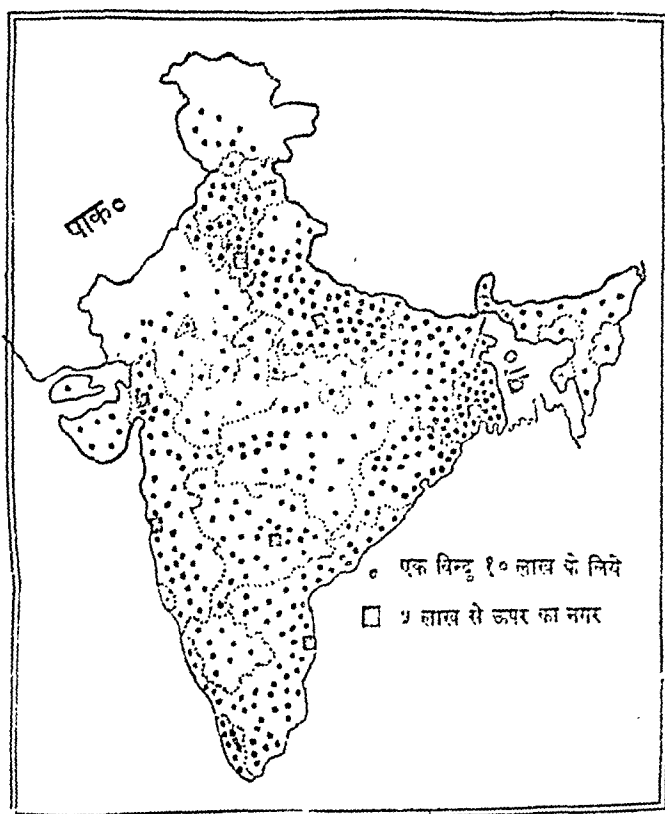
चित्र-लेख (Pictograms)

चित्रलेखों में किसी विषय के बारे में दी गई सामग्री की सापेक्षता उसके चित्र खींच कर दिखाई जाती है, इन चित्रों में उस वस्तु के चित्रों की संख्या का उपयोग इकाइयों के रूप में किया जाता है। जैसे अगर किसी देश में १,०५० मोटरें किसी वर्ष में बनी हों और उसी वर्ष में किसी दूसरे देश में ६७५ मोटरें बनी हो तो उनका चित्र द्वारा निरूपण करने के पहले इकाई चुन ली जाती है। अगर यह निश्चित किया गया कि चित्र में दिखाई गई एक मोटर ५० मोटरों के बराबर होगी तो पहले देश के लिए २१ मोटरें बनाई जायँगी और दूसरे के लिए १३½ मोटरें। इस प्रकार के चित्रों का उपयोग प्रचार या विज्ञापन के लिए प्रायः किया जाता है, क्योंकि ये चित्र ज्यामितीय रीतियों से खींचे गये चित्रों की अपेक्षा आकर्षक और सुन्दर होते हैं। अगर केवल एक चित्र द्वारा एक राशि निरूपित करनी हो तो पहले इन राशियों के वर्गमूल की अनुपाती वर्ग-भुजाएँ खींच ली जाती हैं और इन वर्गों में चित्र बनाए जाते हैं। सारणी संख्या १४ में प्रयाग विश्वविद्यालय का अध्यापक-छात्र अनुपात दिया गया है। इसका चित्र संख्या १४ में किया गया है।

प्रयाग विश्वविद्यालय के अध्यापक छात्र अनुपात

वर्ष	प्रति अध्यापक छात्र संख्या
१९३२–३३	१६
१९४२–४३	२१
१९५२–५३	२८

1932–33

1942–43

1952–53

मान-चित्र लेख (Cartograms)

सामग्री का प्रादेशिक वितरण दिखाने के लिए मान-चित्र लेख का उपयोग किया जाता है। जिस क्षेत्र में सामग्री का वितरण दिखाना हो उसका मान-चित्र खींच लिया जाता है और प्रत्येक प्रदेश में राशि के परिमाण को निरूपित किया जाता है। जैसे किसी देश की जनसंख्या का घनत्व दिखाना हो तो भिन्न-भिन्न शहरों या क्षेत्रों में प्रति वर्ग मील में रहने वाली जनसंख्या मालूम कर ली जायगी और फिर १०,०००या १,००,००० या १०,००,००० व्यक्तियों को एक विन्दु से निरूपित कर प्रत्येक शहर या क्षेत्र उसकी जनसंख्या के अनुसार विन्दु रख दिए जाएँगे। चित्र संख्या १५ में भारत की जनसंख्या का घनत्व दिखलाया गया है।

चित्र संख्या १५—भारत में जनसंख्या का घनत्व

उपर्युक्त अनुच्छेदों में सामग्री को चित्रों के रूप में प्रस्तुत करने की विधियों का वर्णन किया जा चुका है। सामग्री को किस प्रकार के चित्र द्वारा प्रस्तुत किया जाना उचित होगा, यह प्रश्न इतना सरल नहीं जितना कि साधारणतः समझा जाता है; क्योंकि यदि किसी सामग्री को अनुपयुक्त चित्र द्वारा निरूपित किया जाय तो उससे विभ्रमात्मक परिणाम निकल सकते हैं। ऐसी परिस्थिति में यह आवश्यक है कि चित्र के चुनाव में सावधानी बरती जाय। चित्रों के बनाते समय सफाई और सुन्दरता का भी विशेष ध्यान रखना चाहिए। जैसा कि बताया जा चुका है कि कुछ सामग्री इस प्रकार की होती है कि जिसका निरूपण चित्रों की अपेक्षाकृत बिन्दु-रेखा में अधिक उपयुक्त होता है जैसे कि किसी भी काल-माला (time series) का निरूपण रेखा-चित्र द्वारा ही उपयुक्त होगा। अगले अध्याय में विभिन्न प्रकार के बिन्दु-रेखों का वर्णन किया जायगा।

प्रश्नावली

(१) साँख्यिकी में चित्र द्वारा सामग्री-निरूपण की आवश्यकता और उसके महत्व पर एक लेख लिखिए।

(२) चित्रण में प्रायः क्या गलतियाँ हो सकती हैं? इन्हें दूर करने के लिए आप क्या सावधानियाँ बरतेंगे?

(३) तथ्यों के चित्रीय निरूपण की उपयोगिता बताइए, और चित्र बनाने की विभिन्न विधियों में, जो आपको ज्ञात हैं, एक की व्याख्या कीजिए। (बी० कॉम०, इलाहाबाद १९४५)

(४) निम्नलिखित सारणी इलाहाबाद में मकान बनाने की लागत के मदें देती है:—

	रु०
जमीन	४,५००
मजदूर	२,५००
ईंटें	२,०००
लोहा	१,८००
लकड़ी	१,५००
सिमेंट	८००
चूना	८००
पत्थर	६००
बालू	२००
अन्य पदार्थ	१,३००

उपर्युक्त अंकों को एक उपयुक्त चित्र द्वारा निरूपित कीजिए।

(बी० कॉम, इलाहाबाद १९४१)

(५) निम्नलिखित सामग्री को प्रतिशतता के आधार में शीर्ष-दंडों द्वारा निरूपित कीजिए

इलाहाबाद शू कम्पनी के लिए १९३६ और १९४० के लिए (प्रति जोड़ जूते) आय, लागत और लाभ या हानि।

	१९४०		१९३६	
	रु०	आ०	रु०	आ०
प्रति जोड़े जूते आय	१२	८	१०	०
प्रति जोड़े लागत				
मजदूरी	४	०	३	०
चमड़ा	८	०	६	०
अन्य लागत	१	०	०	८
	१३	०	९	८
प्रति जोड़े लाभ (+) या हानि (−)	०−(८ आने)		+(८ आने)	

(बी० कॉम, इलाहाबाद, १९४४)

(६) निम्नलिखित को प्रतिशतता के आधार पर खींचे गए अन्तर्विभक्त दंडों द्वारा निरूपित कीजिये।

१९३८, १९३९ और १९४० में प्रति कुर्सी लागत, आय और लाभ या हानि।

	१९३८ रु०	१९३९ रु०	१९४० रु०
प्रति कुर्सी लागत			
(१) मजदूरी	४·५	७·५	१०·५
(२) अन्य लागतें	३·०	५·१	७·०
(३) पॉलिश व्यय	१·५	२·४	३·५
कुल लागत	९·०	१५·०	२१·०
प्रति कुर्सी आय	१०·०	१५·०	२०·०
प्रति कुर्सी लाभ(+) हानि(−)	(+)१·०	......	(−) १·०

(बी० कॉम, इलाहाबाद, १९४८)

(७) नीचे विभिन्न देशों और दुनियाँ की जनसंख्या के १९३१ के अंक दिए गए हैं:–

देश	जनसंख्या (००० छोड़ कर)
चीन	४,११,७७०
भारत	३,५२,३७०
रूस	१,६१,०००
अमेरिका	१,२४,०००
जर्मनी	६४,७७६
जापान	६४,७००
यू० के०	४६,०७७
फ्रांस	४१,८६०
इटली	४१,१००
अन्य	७,०५,०७७
दुनिया	२०,१२,८००

उपर्युक्त सामग्री को शकलों में विभाजित वर्तुल चित्र द्वारा निरूपित कीजिए।

(८) निम्नलिखित सूचना को निरूपित करने के लिए उपयुक्त चित्र खींचिये:–

फैक्टरी	मजदूरी रु०	सामान रु०	लाभ रु०	उत्पादित इकाइयाँ रु०
क	२,०००	३,०००	१,०००	१,०००
ख	१,४००	२,४००	१,०००	८००

साथ ही साथ प्रति इकाई लागत और लाभ भी दर्शाइए।

(बी० कॉम, इलाहाबाद १९५२)

(९) निम्नलिखित सामग्री को सरल दंड चित्र द्वारा निरूपित कीजिये।

खाद्यान्नों का कुल उत्पादन (दस लाख टनों में)

वर्ष	कुल उत्पादन
१९४९–५०	५४.०५
१९५०–५१	५०.०२
१९५१–५२	५१.१४
१९५२–५३	५७.४८
१९५३–५४	६५.४२

(१०) निम्नलिखित सामग्री को बहुगुण दंड चित्र द्वारा निरूपित कीजिए: आयात और निर्यात के राशि देशनांक (आधार—१९४८-४९ = १००)

वर्ष	आयात	निर्यात
१९४८–४९	१००	१००
४९–५०	११८	१०५
५०–५१	८३	११०
५१–५२	१००	८९
५२–५३	७८	९४
५३–५४	६४	९४

(११) भारत में विभिन्न वस्तुओं का आयात (करोड़ रु० में) १९४८–४९—१९५३-५४

वर्ष	भोज्य, पेय और तम्बाकू	कच्चा माल और उत्पत्ति	पूर्णतः या मुख्यतः निर्मित वस्तुएँ	विविध	कुल योग
१९४८–४९	९१.९८	१२६.९३	२९४.५२	४.५७	५१८.००
४९–५०	१२२.३६	१४४.३०	२८८.५३	४.७९	५६०.०३
५०–५१	१३५.८१	१२५.७७	३१४.७८	२.६२	५७८.९८
५१–५२	२६२.०७	२५६.०८	३५१.४४	५.३५	८७४.९४
५२–५३	१७५.६५	१७१.१६	२७६.३७	४.३१	६३५.४९
५३–५४	९२.७४	१६१.५५	२७६.०३	३.९७	५४२.२९

उपर्युक्त सामग्री को उपयुक्त चित्र द्वारा निरूपित करिये।

(१२) निम्नलिखित सामग्री को चित्रित करिये और उनके अन्तर भी दिखाइये:—

एक फर्म की कुल आय और कुल लागत (हजार रु० में)
(१९४०-१९४५)

वर्ष	कुल आय	कुल लागत
१९४०	२२	१९.५
४१	२७.२	२१.७
४२	२८.२	३०.०
४३	३०.२	२५.६
४४	३२.७	२६.१
४५	३३.३	३४.२

(ये अंक काल्पनिक हैं)

(१३) निम्नलिखित सारणी में एक फर्म के लाभ-हानि दिए गए हैं। इन्हें दंड चित्र द्वारा निरूपित कीजिये।

एक फर्म की लागत, आय और लाभ या हानि का लेखा १९५०–५३।

	१९५०	१९५१	१९५२	१९५३
लागत (प्रति इकाई)	रु०	रु०	रु०	रु०
मजदूरी	५·४	५.७	६.४	७.०
कच्चा माल	३·८	२.६	३.०	३.५
वेतन	१·०	०.८	०.८	०.६
अन्य लागतें	२·५	२.३	२.१	२.४
	१२·७	११.४	१२.३	१३.५
आय (प्रति इकाई)	११·०	१२.१	१२·९	१३.०
प्रति इकाई लाभ (+) हानि (-)	−१.७	+०.७	+०.६	−०.५

इस सामग्री को अन्तर्विभक्त दंड-चित्र द्वारा प्रतिशतता के आधार पर दिखलाइये—

(१४) निम्नलिखित सारणी भारत की औद्योगिक उद्गम से राष्ट्रीय आय बताती है। इसे अन्तर्विभक्त दंड-चित्र द्वारा निरूपित कीजिए :–

भारत की राष्ट्रीय आय (औद्योगिक उद्गम से)

(आय रु० में)

पद	१९४८-४९	१९४९-५०	१९५०-५१
कृषि	४२.५	४४.९	४८.९
खनन, निर्माण और हस्त-व्यवसाय	१४.८	१५.०	१५.३
वाणिज्य, यातायात और संचार	१६.०	१६.६	१६.९
अन्य सेवाएँ	१३.४	१३.८	१४.४
साधन लागत पर वास्तविक देशी उत्पत्ति	८६·७	९०.३	९५.५
विदेश से अर्जित वास्तविक आय	−०.२	−०.२	−०.२
राष्ट्रीय, आय	८६.५	९०.१	९५.३

इस सामग्री का प्रतिशतता के अनुसार भी चित्रण कीजिए।

(१५) निम्नलिखित सारणी ३ परिवारों का मासिक व्यय दिखाती है। इसका चित्रण प्रतिशतता के अनुसार उपयुक्त चित्र द्वारा कीजिए:—

व्यय की मदें	क परिवार	ख परिवार	ग परिवार
	(रु०)	(रु०)	(रु०)
भोज्य पदार्थ	४३	८४	१२०
कपड़ा	८	१७	२५
मनोरंजन	३	१०	१२
शिक्षा	५	९	१५
मकान का किराया	१०	२१	१७
अन्य	६	१५	११

(१६) निम्नलिखित को आयत के रूप में निरूपित कीजिये :—

दो परिवारों का मासिक बजट

व्यय की मदें	क परिवार	ख परिवार
	रु०	रु०
खाद्य-पदार्थ	१८०	११०
कपड़ा	७०	६५
मकान का किराया	९०	८०
ईंधन और बिजली	३५	३०
विविध	७५	१५
कुल व्यय	४५०	२००
बचत	२५	१०

(१७) उपर्युक्त सामग्री को वृत्तों के रूप में भी दिखलाइये:—

(१८) भारत में कपड़ा-उत्पादन और आयात के लिए नीचे दिए गए समंकों की चित्रीय रूप से तुलना कीजिए। इन अंकों से आप क्या परिणाम निकालते हैं:—

करोड़ गजों में

	१९१३–१४	१९३८–३९
मिल-उत्पादन	११६.४	४२६.९
हाथ करघा-उत्पादन	१०६.८	१९२.०
आयात	३१९.७	६४.७

(बी०, कॉम, इलाहाबाद, १९४६)

(१९) निम्नलिखित सारणी में भारत का त्रैमासिक विदेशी व्यापार दिया गया है। इसे उपर्युक्त चित्र में निरूपित कीजिये।

	करोड़ रु० में		अन्तर
	निर्यात	आयात	अतिरिक्त (+) या कमी (−)
१९५२-५३ २रा त्रिमास	४८.७	३८.९	+९.८
३रा ”	१५७.०	१६७.७	−१०.७
४था ”	१४०.३	१३८.३	+२.०
१९५३-५४ १ला ”	१३२.६	१३०.६	+२.०
२रा ”	११९.९	१६४.०	−४४.१
३रा ”	१३०.४	१४८.४	−१८.०
४था ”	१४८.८	१२४.०	+२४.८
१९५४-५५ १ला ”	१३२.९	१२९.६	+२.४
२रा ”	११३.५	१४५.२	−३१.७

(२०) निम्नलिखित को उपयुक्त रूप से चित्रित कीजिये।

आय के मुख्य शीर्षक	१९४८-४९ (लाख रु०)	१९४९-५० (लाख रु०)	१९५०-५१ (लाख रु०)
आयात-निर्यात कर	७२,७४	१,२६,१६	१,२४,७१
संघीय उत्पत्ति-कर	५०,६३	६७,८५	६७,५४
आय-कर (निगम कर के साथ)	१,३९,९८	१,१५,३७	१,२५,७१
अन्य कर	३,१९	३,६०	६,६१

(२१) निम्नलिखित सामग्री को अन्तर्विभक्त वृत्त-चित्र द्वारा दिखाइयेः—

भाग-क राज्यों की जनसंख्या (१९५१) (लाख व्यक्तियों में)

आसाम	९०.४४
उत्तर प्रदेश	६३२.१६
उड़ीसा	१४६.४६
पश्चिमी बंगाल	२४८.१०
पंजाव	१२६.४१
सम्बई	३५९.५६
विहार	४०२.२६
मद्रास	५७०.१६
मध्य प्रदेश	२१२.४८

(२१) नीचे दी गई सारणी में जीविका के अनुसार भारत की जनसंख्या दी गई है। इसे उपयुक्त चित्र द्वारा निरूपित कीजिये।

जीविकानुसार वर्ग	पुरुष (लाखों में)	स्त्री (लाखों में)	कुल (लाखों में)
(१) कृषि से संबंधित	१२६२.१	१२२९.१	२४९१.२
(क) पूर्णतः या मुख्यतः जमीन वाले कृषक और उन पर आश्रित व्यक्ति	८५१.२	८२२.३	१६७३.५
(ख) पूर्णतः या मुख्यतः बिना जमीन वाले कृषक और उन पर आश्रित व्यक्ति	१६२.३	१५३.७	३१६.४
(ग) कृषक-मजदूर और उन पर आश्रित व्यक्ति	२२४.०	२२४.८	४४८.८
(घ) जमीन के खेती न करने वाले स्वामी, कृषि-लगान लेने वाले और उनके आश्रित व्यक्ति	२४.३	२८.९	५३.१
(२) कृषि से असम्बन्धित	५३०.३	५०५.४	१०३५.७
(क) कृषि के अतिरिक्त उत्पादन	२००.२	१८६.४	३७६.६
(ख) वाणिज्य	११२.३	१००.७	२१३.१
(ग) यातायात	३१.१	२५.१	५६.२
(घ) अन्य सेवाएं और विविध वृत्ति	२२६.६	२०३.२	४२९.८
कुल जनसंख्या (कृषि सम्बन्धी और अन्य)	१८३२.३	१३३४.६	३५६६.९

(२२) एक मान-चित्र लेख बनाइये और उसमें भारत के विभिन्न भागों में जनसंख्या के घनत्व को निम्नलिखित सारणी के अनुसार दिखलाइये।

राज्य	घनत्व (व्यक्ति प्रति वर्गमील)
उत्तर प्रदेश	५५७
बिहार	५७२
उड़ीसा	२४४
पश्चिमी बंगाल	८०६
आसाम	१७६
मद्रास	४४६
मैसूर	३०८

राज्य	घनत्व (व्यक्ति प्रति वर्गमील)
बम्बई	३२३
मध्य प्रदेश	१६३
हैदराबाद	२२७
राजस्थान	११७
पंजाब	३३८
पेप्सू	३४७
विन्ध्य-प्रदेश	१५१
मध्य भारत	१७१
ट्रावनकोर-कोचीन	१०१५

(२३) निम्नलिखित सारणी में भारत की जनसंख्या धर्म के अनुसार दी गई है। इसको आयत-चित्र और वृत्त-चित्र में वास्तविक संख्या और प्रतिशतता में निरूपित करिये:—

धर्म	संख्या (लाखों में)
हिन्दू	२०३१·९
सिख	६२·२
जैन	१६·२
मुसलमान	३५४·०
ईसाई	८१·६
अन्य धर्म	२०·१

(२४) निम्नलिखित सामग्री को चित्रलेख द्वारा निरूपित करिये:—

देश	जनसंख्या (करोड़ों में)
चीन	४६·४
भारत	३५·७
पाकिस्तान	७·६
सं० रा० अ०	१५·१
यु० रा०	५·०

(२५) सन् १९४५ के अन्त में नोटों के प्रचलन में सापेक्ष वृद्धि को, चित्र रूप में दिखलाइये :

नोट प्रचलन में वृद्धि

(राष्ट्रीय मुद्रा-इकाई के दस लाखों में)

देश	१९३९ में	१९४५ के अन्त में
कनाडा	२३३	१,१२०
संयुक्त राष्ट्र अमेरिका	७,५९८	२८,५०७
यूनाइटेड किंगडम	५५५	१,३८०
आस्ट्रेलिया	५७	२००
भारत	२,२४५	१२,१०९

(एम० काम०, इलाहाबाद, १९४८)

(२६) निम्नलिखित दो परिवारों के मासिक व्यय को द्वि-विभा-चित्रों द्वारा दिखाइए :-

व्यय की मदें	परिवार अ	परिवार ब
	आमदनी ५०० रु० प्रति माह	आमदनी ४०० रु० प्रति माह
भोजन	१४० रुपये	१२० रुपये
कपड़ा	८०	८०
मकान का किराया	१००	६०
शिक्षा	३०	४०
रोशनी तथा ईंधन	४०	२०
विविध	४०	८०

(एम० ए०, पंजाब, १९५२)

(२७) निम्नलिखित अंक १९३१ में संसार के विभिन्न देशों की जनसंख्या तथा कुल विश्व-जनसंख्या के बारे में दिये गये हैं:-

देश	जनसंख्या (०००, छोड़ दिये गये हैं)
चीन	४११,३७०
भारत	३५२,३७०
रूस	१६१,०००
संयुक्त राष्ट्र अमेरिका	१२४,०७०
जर्मनी	६४,७७६
जापान	६४,७००
यूनाइटेड किंग्डम	४६,०७७
फ्रांस	४१,९६०
इटली	४१,१००
दूसरे	७०५,०७७
विश्व	२,०१२,८००

उपर्युक्त सामग्री को वृत्त-चित्र से जो कि शकलों में बँटा हो, दिखलाइए।

(२८) निम्नलिखित सामग्री से भारतवर्ष में कपड़े के आयात और उत्पादन की तुलना रेखा-चित्रीय रूप में कीजिए। आप इससे किस परिणाम पर पहुँचते हैं।

	करोड़ गजों में	
	१९१३-१४	१९३८-३९
मिल का बना हुआ कपड़ा	११६.४	४२६.९
हाथ का बना हुआ कपड़ा	१०६.८	१९२.०
आयात	३११.७	६४.७

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४६)

(२९) निम्नलिखित सामग्री को एक अनुकूल चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए:

आमदनी की मदें	१९३८-३९ (लाख रुपये में)	१९३९-४० (लाख रुपयों में)
महसूल	४०५०	४५८८
केन्द्रीय आबकारी कर	८६८	६५२
कॉरपोरेशन कर	२०४	२३८
आमकर	१३७४	१४२०
नमक	८१२	१०८०
अफीम	५०	४६
अन्य	११२	१३०

(बी० कॉम०, नागपुर, १९४३)

(३०) निम्नलिखित सारणी में सन् १९३१ ई० में संसार के कुछ देशों के जन्म-अर्घ तथा मृत्यु-अर्घ दिए हुए हैं। इन्हें एक अनुकूल चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए

देश	जन्म-अर्घ	मृत्यु-अर्घ
मिश्र	४८	२७
कनाडा	२४	११
यू० एस० ए०	१९	१२
भारत	३३	२४
जापान	३२	१९
जर्मनी	१६	११
फ्रांस	१९	१६
आइरिश फ्री स्टेट	२०	१४
यूनाइटेड किंग्डम	१६	१२
रूस	४०	१८
आस्ट्रेलिया	२०	९
न्यूजीलैन्ड	१८	८
फिलस्तीन	५३	२३
स्वेडन	१५	१२
नार्वे	१७	११

(वी० कॉम०, लखनऊ, १९३८)

(३१) कारणों सहित यह बतलाइये कि आप निम्नलिखित सामग्री का निरूपण करने के लिये किन-किन चित्रों को उपयुक्त समझते हैं:—

(अ) किसी सरकारी परीक्षा में पाये गये अंकों के अनुसार बहुत से परिक्षार्थियों का वंटन।

(ब) दो चुने हुए परिक्षार्थियों के एक परीक्षा में पाये गये ६ विभिन्न विषयों के अंक,

(स) सन् १९३८ से १९५५ तक भारतीय आयात और निर्यातों का मूल्य,

(द) कुल जीवन बीमा कम्पनियों की सम्पत्तियों के योग का वंटन (१९ जनवरी १९५६ के दिन)।

(य) सन् १९३८ से १९५५ तक के बम्बई और कलकत्ता नगरों के मध्य-वर्ग के निर्वाह व्यय देशनांक;

(र) सन् १९५१ के गिने गये व्यक्तियों का आयु, यौन तथा वैवाहिक स्थिति के अनुसार वंटन, (आई० ए० एस० १९५६)

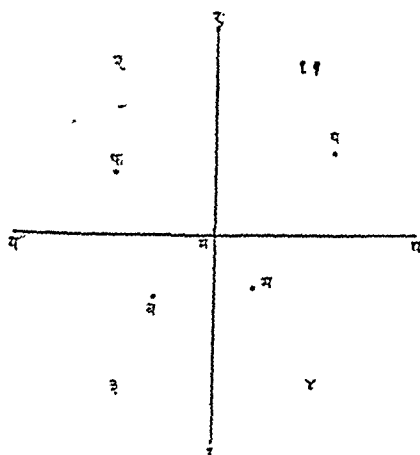
अध्याय ११

सामग्री का विन्दुरेखीय निरूपण

(Graphic Representation of Data)

प्रचार में आकर्षण के लिए पिछले परिच्छेद में दिए गए चित्रों का उपयोग प्राय: किया जाता है, पर साँख्यिकीय दृष्टिकोण से विन्दुरेख अधिक महत्वपूर्ण है। उन स्थानों में जहाँ दो या अधिक राशियों की तुलना करनी होती है चित्रों का उपयोग किया जाता है पर जहाँ दो चलों में सम्बन्ध ज्ञात करना हो, इनका उपयोग नहीं किया जा सकता। दो चलों में संबंध स्थापित करने का अर्थ उनकी परस्पर-निर्भरता या एक में परिवर्तन होने के साथ-साथ दूसरे में होने वाले परिवर्तन दिखाना है। विन्दुरेखों की विशेषता यह है कि ये अधिक स्पष्ट, परिशुद्ध और सुबोध होते हैं। इनका खींचना भी अपेक्षाकृत अधिक सरल होता है। इसके अन्तर्गत कालिक-चित्रों(historigrams) और बारंबारता-बंटन-चित्रों (graphs of frequency distribution) को खींचना आता है।

विन्दुरेखों की रचना करने में पहले दो सरल रेखाएँ ली जाती हैं जो एक-दूसरे से ९०° का कोण बनाती हैं (अर्थात् एक रेखा दूसरी पर लम्ब होती है)। इन रेखाओं को अक्ष (axis) कहा जाता है। अनुभूमिक (horizontal) रेखा को **भुजाक्ष या य-अक्ष** (adscissa or x-axis) कहा जाता है, और शीर्ष रेखा (vertical)को **कोटि अक्ष या र-अक्ष** (ordinate or y-axis)। जिस स्थान पर ये एक-दूसरे को काटती हैं उसे मूलविन्दु (origin) कहा जाता है। य–अक्ष में मूलविन्दु के दाहिनी ओर धनात्मक राशियाँ और उसकी बाईं ओर ऋणात्मक राशियाँ दी जाती हैं। और र-अक्ष में मूलविन्दु के ऊपर धनात्मक राशियाँ और नीचे ऋणात्मक राशियाँ दी जाती हैं। इस प्रकार खींची गई रेखाएँ चित्र सं० ० में दी गई हैं। ये रेखाएँ विन्दुरेख-कागज पर खींची जाती हैं। इनसे कागज चार भागों में विभाजित हो जाता है। दिए हुए चित्र में यय′ भुजाक्ष या य-अक्ष है, रर′ कोटि-अक्ष या र-अक्ष है और म मूलविन्दु है। इनसे कागज के चार भाग (१), (२), (३), और (४) हुए हैं। धनात्मक राशियाँ म य और म र में नापी जाती है और ऋणात्मक राशियाँ म य′,

और म र' में नापी जाती हैं। अतः अगर दो राशियाँ (य और र) के मूल्य धनात्मक हैं तो वे पहले भाग में अंकित किये जाएँगे और अगर दोनों ऋणात्मक हैं तो वे

चित्र ०

तीसरे भाग में। अगर र के मूल्य धनात्मक हैं और य के ऋणात्मक तो इनका अंकन दूसरे भाग में होगा और इनके विपरीत होने पर अंकन चौथे भाग में किया जाएगा।

प्रत्येक अक्ष के लिए सुविधानुसार स्केल निश्चित कर दिया जाता है। यह आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक अक्ष के लिए एक ही स्केल रखा जाय। स्केल द्वारा यह बताया जाता है कि प्रत्येक अक्ष की एक निश्चित लम्बाई (जैसे १ इंच या १ सेंटीमीटर) राशि का कितना मूल्य दिखाएगी। जैसे दिए हुए चित्र में य-अक्ष पर १" = १० इकाइयों के और र-अक्ष पर १" = ५ इकाइयों के माना गया है। अब अगर य का कोई मूल्य १२ और र का कोई मूल्य ८ हो तो उन्हें दिखाने के लिए मूलबिन्दु के दाहिनी ओर उससे १.२" दूरी ले ली जाएगी, क्योंकि य का मूल्य धनात्मक है और र-अक्ष में मूलबिन्दु के ऊपर की ओर उससे १.६" इंच की दूरी ले ली जायगी। जहाँ पर इन बिन्दुओं से खींची रेखाएँ मिलती हैं वहीं बिन्दु य = १२ और र = ८ होगा। इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि दूरियाँ मूल बिन्दु से नापी जाती हैं, इसलिए वह य = ० और र = ० वाला बिन्दु हुआ। किसी बिन्दु की य-अक्ष में र मूलबिन्दु से नापी गई दूरी को य-याम (x-coordinate) और र-अक्ष पर नापी गई दूरी को र-याम (y-coordinate) कहते हैं। इन दोनों दूरियों

को उस विन्दु के याम (co-ordinates) कहते हैं। किसी विन्दु का कागज पर स्थान वताने की रीति यह है कि उसके याम वता दिए जायँ । यामों को (य, र) के रूप में व्यक्त किया जाता है। (य,र) का अर्थ य -अक्ष पर मूलविन्दु से य की दूरी पर र-अक्ष की दिशा में र दूरी लेकर प्राप्त विन्दु होता है । उदाहरण में दिए हुए विन्दु के याम (१२,८) हुए। चित्र में कुछ विन्दुओं प, फ, व, और भ को अंकित किया गया है जिनके याम क्रमशः (१२,८) (–१०,६), (–६,–६) और (४,–५) हैं।

विन्दुरेख खींचने में कुछ वातों पर ध्यान रखना पड़ता है । पहली स्केल के वारे में है। स्केल ऐसी चुनना चाहिए जिससे दिए हुए कागज पर पूरी सामग्री प्रस्तुत की जा सके अर्थात् स्केल ऐसा होना चाहिए जो पूरी सामग्री को प्रस्तुत कर सके। दूसरी वात इस विपय में है कि अक्ष में किस चल (variable) को रखा जाय। इसके लिए परम्परानुसार स्वतन्त्र चल (independent variable) को य–अक्ष में दिखाया जाता है और परतन्त्र चल (dependent variable) को र–अक्ष में दिखाया जाता है। प्रत्येक अक्ष के लिए जिस स्केल का उपयोग किया जा रहा हो उसे स्पष्टतः वता देना चाहिए। अन्तिम वात सामग्री-प्रांकण (plotting of data) से सवन्धित हैं। जव सामग्री को विन्दुओं के द्वारा प्रस्तुत कर दिया जाता है तो प्रश्न उठता है कि इन विन्दुओं को किस प्रकार मिलाया जाय कि विन्दुरेखा वने। इसके लिए यह नियम है कि यदि राशियाँ किसी संतत चल (continuous variable) के विभिन्न मूल हैं तो इन विन्दुओं को मिलाने वाली रेखा जितनी अधिक सरलित-वक्र (smoothed curve) हो सके उतनी वनानी चाहिए। संतत चल का अर्थ ऐसे चल से है जो दिए हुए विस्तार में कोई भी मूल्य ले सके, जैसे समय, व्यक्तियों की लम्वाई आदि। इस दशा में ऐसा प्रतीत नहीं होना चाहिए कि वक्र के विभिन्न भाग एक-दूसरे से कोण वनाते हैं। इस प्रकार खींचे हुए वक्र यह प्रकट करते हैं कि चल के एक मूल्य से दूसरा मूल्य संतत रूप में लेते हैं। पर अगर चल खंडित (discrete) हो तो विभिन्न विन्दुओं को सीधी रेखाओं द्वारा मिलाना चाहिए। इन सीधी रेखाओं का अर्थ यह होता है कि चल के एक के वाद दूसरा मूल्य लेने के वीच में कोई संततता नहीं है अर्थात् उसके विभिन्न मूल्यों को तो ले सकता है पर इसके वीच के मूल्यों को नहीं लेता। इस प्रकार के दो विन्दुरेख खींचने का वर्णन आगामी अनुच्छेद में दिया गया है जिन्हें चित्र संख्या २ और ३ में चित्रित किया गया है। सामग्री को प्रायः दूसरे प्रकार के विन्दुरेख के रूप में प्रस्तुत किया जाता है क्योंकि विन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को पूर्णतः सरलित-वक्र के रूप में रखना संभव नहीं हो पाता ।

पर जो वक्र गणितीय सम्बन्ध के रूप में रखे जा सकते हैं उन्हें सरलित-वक्र के रूप में दिखाया जा सकता है।

आगामी भाग में पहले कालिक-चित्रों को खींचने का वर्णन किया गया है और बाद में बारंबारता चलचित्रों का।

प्राकृत और अनुपात स्केल (Natural and Ratio scale)—अगर चल के निरपेक्ष मूल्यों (absolute values) को प्रस्तुत करना हो तो **प्राकृत माप श्रेणी** (Natural scale) का उपयोग किया जाता है। प्राकृत स्केल अक्ष पर ली गई बराबर दूरियाँ बराबर मूल्यों को दिखाएँगी। इस प्रकार अगर स्केल य-अक्ष के लिए १"=५० इकाई लिया गय तो य-अक्ष में १" की कोई भी दूरी ५० इकाइयाँ दिखाएगी। इसी प्रकार र-अक्ष के लिए भी होगा। अगर चल के सापेक्षिक मूल्य (Relative values) दिखाने हों तो **अनुपात माप श्रेणी** (ratio scale) का उपयोग किया जाता है। पहले प्राकृत स्केल कर सामग्री प्रांकण की रीति का वर्णन किया जाएगा। और बाद में अनुपात स्केल की रीति का।

प्राकृत-स्केल लेकर सामग्री-प्रांकण—कालिक चित्र (Plotting of historigrams on natural scale)—कालिक चित्रों में किसी चल के विभिन्न समयों में लेने वाले मूल्यों को दिखाया जाता है। अर्थात् यह प्रस्तुत किया जाता है कि समय परिवर्तन के साथ चल के मूल्यों में क्या परिवर्तन हुआ। यदि चल के वास्तविक मूल्य लिए जायें तो इस प्रकार प्राप्त विन्दुरेख निरपेक्ष कालिक-चित्र (Absolute historigrams) कहलाते हैं। अगर मूल्यों को देशनांकों के रूप में रखा जाय तो जो विन्दुरेख प्राप्त होते हैं वे **देशना-कालिक चित्र** (Index historigram) कहलाते हैं। अगर दो या अधिक चलों द्वारा विभिन्न समयों पर लिए जाने वाले मूल्यों की परस्पर -तुलना करनी है तो दो या अधिक वक्र मिलेंगे और इस प्रकार तुलना की जा सकती है।

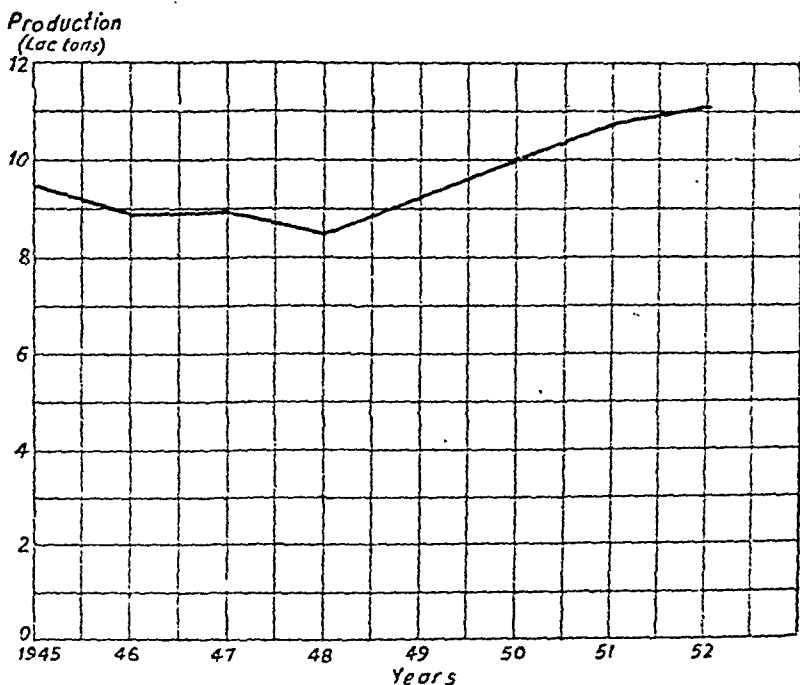
एक चल के लिए निरपेक्ष कालिक चित्र (Absotuc Historigrams—one variable)—सारणी संख्या १ में भारतवर्ष में १९४५ से १९५० तक उत्पादित इस्पात की मात्रा दी गई है। इसको एक विन्दुरेख के रूप में रखना है।

सारणी संख्या १

भारत वर्ष में इस्पात का उत्पादन, १९४५–१९५२ (लाख टनों) में

वर्ष	उत्पत्ति
१९४५	९·५४
१९४६	८·९०
१९४७	८·९३
१९४८	८·५७
१९४९	९·३०
१९५०	१०·०४
१९५१	१०·७६
१९५२	११·०३

इसको विन्दुरेखी रीति से प्रस्तुत करने के लिए पहले दो अक्ष खींचे जो एक-दूसरे को य विन्दु पर काटते हैं। य-अक्ष पर वर्ष दिखाए गए और र-अक्ष पर उत्पत्ति। य-अक्ष

भारत में इस्पात का उत्पादन

चित्र १

के लिए स्केल १"=२ वर्ष लिया गया और र अक्ष के लिए १" =४ लाख टन। अब १९४५ के ऊपर २.३८ इंच की दूरी पर स्थित विन्दु ५४ लाख टन की उत्पत्ति दिखा-

यगा। इसी प्रकार १९४६ के ऊपर २.२२" १९४७ के ऊपर २.२३" आदि के विन्दु खींचे जा सकते हैं। इन विन्दुओं को मिलाने वाली सीधी रेखाएँ ही इच्छित विन्दु रेखा बनाती हैं।

इस चित्र में एक बात पर ध्यान देना चाहिए। वह यह कि इसमें केवल एक चरण (Quadrant) दिखाया गया है। इसका कारण यह है कि जो सामग्री प्रांकित करनी हो उसकी सब राशियाँ धनात्मक हैं। अगर ऐसा न हो तो अन्य चरणों को भी दिखाना पड़ता।

इस चित्र के द्वारा यह जाना जा सकता है कि प्रत्येक वर्ष इस्पात का उत्पादन कितना था और समय के साथ वह किस प्रकार बदला है। इस चित्र की दंडचित्र की अपेक्षा प्रभावशालिता का अनुमान इस सामग्री के लिए दंड-चित्र खींच कर लगाया जा सकता है।

देशनांक कालिक चित्रों (index historigram) और निरपेक्ष कालिक चित्रों (absolute historigram) में केवल इतना अन्तर है कि पहले में देशनांक दिखाए जाते हैं और दूसरे में वास्तविक मूल्य। इसलिए पहले प्रकार के चित्रों से चल के मूल्यों में होने वाले प्रतिशत परिवर्तन का ज्ञान होता है और दूसरे प्रकार के चित्रों से चल के वास्तविक मूल्य में होने वाले परिवर्तन का ज्ञान होता है।

कूट-आधार रेखा (False base line)

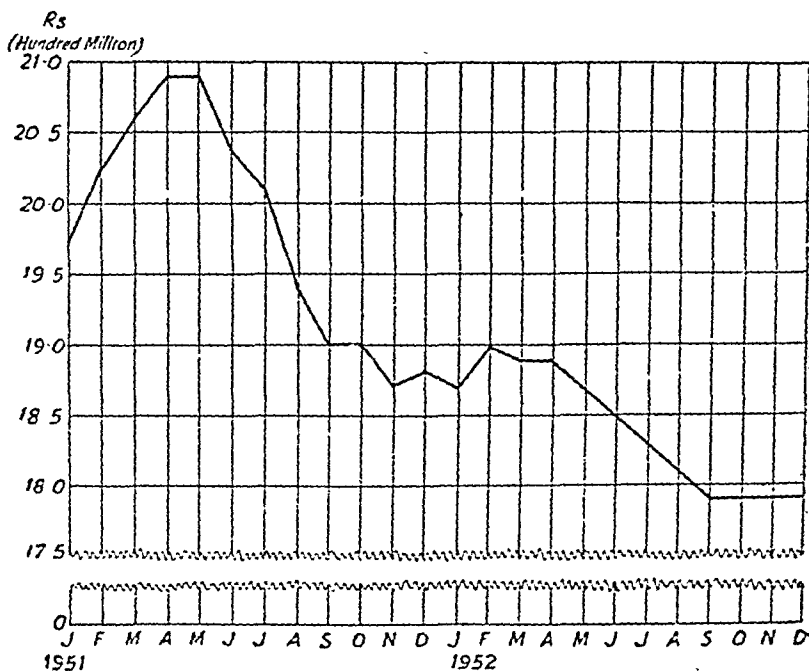
कूट-आधार रेखा वाले चित्रों में पूरा शीर्ष-स्केल नहीं दिखाया जाता। उन दशाओं में जब चल में होने वाले परिवर्तन चल के मूल्य की अपेक्षा बहुत कम हों और उन्हें दिखाना आवश्यक हो तो इसका उपयोग किया जाता है। इस प्रकार के बहुत छोटे परिवर्तनों को दिखाने के लिए अगर कूट आधार रेखा का उपयोग नहीं किया गया तो स्केल बहुत छोटा लेना पड़ेगा अर्थात् बड़ी संख्याओं को दिखाने के लिए मूल विन्दु से x-अक्ष को नापी जाने वाली दूरी बहुत बड़ी होगी और क्योंकि परिवर्तन बहुत छोटे हैं इसलिए वक्र कागज में ऊपर ही ऊपर रहेगा। इस प्रकार चित्र की सुन्दरता नष्ट हो जायगी और साथ ही साथ बहुत बड़े कागज की भी आवश्यकता पड़ेगी। सारणी संख्या २ में दी गई सामग्री (भारत में कुल द्रव्य की कुल पूर्ति) का प्रांकण चित्र संख्या २ में किया गया है।

सारणी संख्या २

भारत में द्रव्य की कुल पूर्ति (अरब रुपयों में)

माह	१९५१	१९५२
जनवरी	१९·७	१८·७
फरवरी	२०·२	१९·०
मार्च	२०·६	१८·९
अप्रैल	२०·९	१८·९
मई	२०·९	१८·७
जून	२०·४	१८·५
जुलाई	२०·१	१८·३
अगस्त	१९·४	१८·१
सितम्बर	१९·०	१७·९
अक्टूबर	१९·०	१७·९
नवम्बर	१८·७	१७·९
दिसम्बर	१८·८	१७·९

इस चित्र में स्केल १″=१ अरब रुपया है। अगर कूट आधार रेखा न खींची

भारत में द्रव्य की पूर्ति

चित्र २

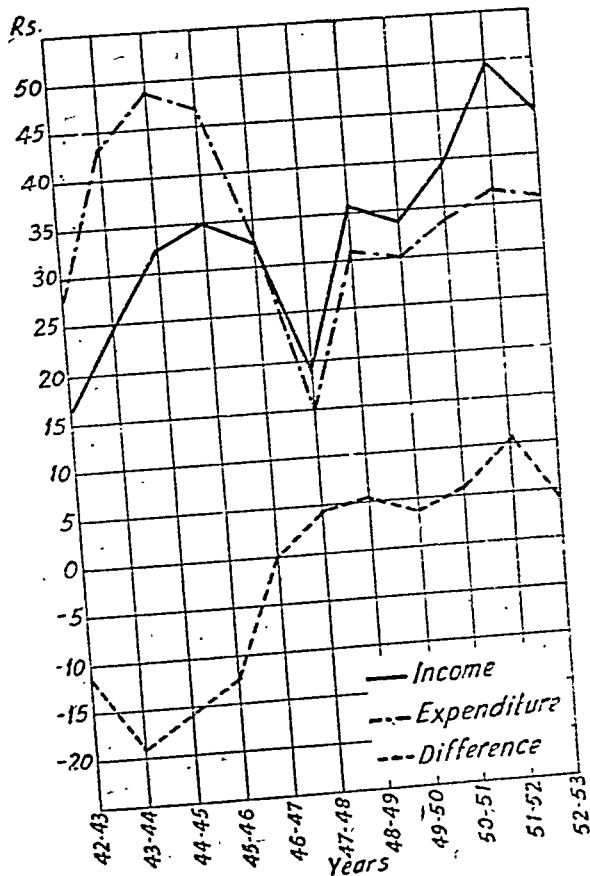
जाती तो लगभग २५" लम्बा कागज लेना पड़ता और तब द्रव्य-पूर्ति में होने वाले परिवर्तन इतनी स्पष्टता से दिखाए जा सकते।

कूट-आधार रेखा का उपयोग जितना कम हो सके उतना कम करना चाहिए। प्रायः जगह बचाने के लिए या अपेक्षाकृत कम महत्वपूर्ण उच्चावचनों को प्रभावशाली बनाने के लिए इसका उपयोग किया जाता है। ऐसी दशाओं में इनका अध्ययन सावधानीपूर्वक करना चाहिए। प्रत्येक इस प्रकार के चित्र में कूट आधार रेखा के ऊपर का कुछ भाग छोड़ देना चाहिए जैसा चित्र में दिखाया गया है।

दो या अधिक चलों के लिए कालिक-चित्र (Historigrams : two or more variables)—अगर ये चल एक ही इकाइयों में दिए गए हैं तो अनुभूमिक और शीर्ष स्केल एक ही होंगे। अन्य बातें वैसी ही रहेंगी जैसी एक चल के लिए कालिक चित्र खींचने में। अन्तर केवल इतना ही होगा कि अब एक ही कागज में एक से अधिक बिन्दुरेख होंगे। इस प्रकार का एक चित्र चित्र-संख्या ३ में सारणी संख्या ३ का प्रांकण करके बनाया गया है। इस प्रकार के चित्रों में यह सुविधा रहती है कि विभिन्न बिन्दु रेखों के अन्तरों और उनके योगों के बिन्दुरेख भी खींचे जा सकते हैं।

सारणी संख्या ३

वर्ष	आय	व्यय	अन्तर
४२–४३	१६·९	२८.१	−११·२
४३–४४	२८·१	४३·१	−१५·०
४४–४५	३२ ४	४८ ५	−१६·१
४५–४६	३५·०	४७·३	−१२·३
४६–४७	३३·०	३३·१	− ०·१
४७–४८	१८·६	१४·१	+ ४·५
४८–४९	३५·९	३०·८	— ५·१
४९–५०	३३·३	३० ०	+ ३·३
५०–५१	३९·४	३३·४	·· ६·०
५१–५२	४९·८	३६·६	+१३·२
५२–५३	३९·८	३५·९	— ३·९

आय-व्यय तथा अन्तर

चित्र ३

इस चित्र में दो चरण (quadrant) पहला और चौथा दिखाए गए हैं, क्योंकि अन्तर में जो र-अक्ष में दिखाया गया है, कुछ राशियाँ ऋणात्मक हैं। इस प्रकार समान इकाई वाले दो चलों के मूल्यों का अन्तर भी विन्दुरेख द्वारा दिखाया जा सकता है।

अगर इकाई एक ही न हों तो भी विभिन्न चलों के मूल्यों को एक ही कागज में विन्दु रेखों द्वारा दिखाया जा सकता है। इसकी रीति भी वैसी ही है जैसे समान इकाई वाले चलों के मूल्यों को प्रांकित करने की है। अन्तर केवल इतना होगा कि र-अक्ष में अन्य चलों की इकाइयाँ भी देनी पड़ेंगी। इस प्रकार के चित्र में प्रत्येक चल के समय के साथ होने वाले परिवर्तनों को तो जाना जा सकता है, पर इनकी परस्पर-तुलना नहीं की जा सकती।

अगर चलों के मूल्यों के आनुपातिक परिवर्तन दिखाने हों तो निरपेक्ष कालिक चित्रों के बदले देशनांक-कालिक चित्रों का उपयोग किया जाता है। अगर दो या अधिक चल हों और उनके अनुपातिक परिवर्तनों की तुलना करनी है तो देशनांकों के आधार-वर्ष (base-year) एक ही होने चाहिये अन्यथा तुलना संभव नहीं होगी।

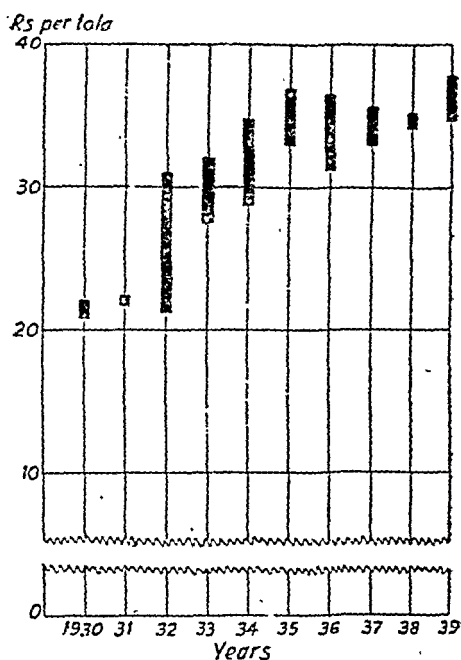
विचलन का विस्तार दिखाने की रीति

कुछ सामग्रियों में चल का अधिकतम और न्यूनतम मूल्य भी दिखाना पड़ता है जैसे हिस्सों के मूल्य या सोने का मूल्य। इन्हें दिखाने के लिए कटिबन्ध-विन्दुरेखों (Band Graphs) का उपयोग किया जाता है जो विचरण का विस्तार (range of variation) भी दिखाते हैं। सारणी सं० ४ में इस प्रकार की सामग्री दी गई है जिसका प्रांकण चित्र संख्या ४ में किया गया है।

सारणी संख्या ४

बम्बई में सोने का मूल्य (प्रति तोला)—१९३० से १९३९

वर्ष	अधिकतम		न्यूनतम	
१९३०	२२	०	२१	५
—३१	२१	१३	२१	४
—३२	३१	२	२१	४
—३३	३२	२	२६	१०
—३४	३४	१२	२८	११
—३५	३६	१३	३३	३
—३६	३६	१२	३१	४
—३७	३५	८	३३	१५
—३८	३५	३	३४	४
—३९	३७	११	३४	१२

सोने का अधिकतम तथा न्यूनतम मूल्य

चित्र ४

केवल कटिवन्ध दिखाने के स्थान पर वक्र भी दिखाए जा सकते हैं, अगर विचलन का विस्तार दिखाना हो तो दो वक्र बनेंगे। पहला चल के अधिकतम मूल्य दिखाने वाले विन्दुओं को मिला कर बनेगा और दूसरा चल के एक वर्ष के न्यूनतम मूल्यों को दिखाने वाले विन्दुओं को मिलाकर। इन दो विन्दु रेखों के वीच का स्थान विचलन का विस्तार वताएगा। सारणी संख्या ५ में एक चल के कल्पित अधिकतम और न्यूनतम मूल्य दिए गए हैं। इसका प्रांकण चित्र संख्या ५ में किया गया है ।

सारणी संख्या ५

चल य के विभिन्न तारीखों में लिए गए अधिकतम और न्यूनतम मूल्य

तारीख	अधिकतम मूल्य	न्यूनतम मूल्य
१	५२	५०
२	५५	५१
३	५६	५५
४	५३	५०
५	५१	४८
६	५२	५१
७	५३	५१
८	५५	५३
९	५६	५४
१०	५८	५४
११	५७	५६
१२	५९	५५
१३	५६	५५
१४	५८	५४
१५	६२	६०
१६	६३	६२
१७	६१	५९
१८	६०	५७
१९	६४	५८
२०	६६	६३
२१	६२	६०
२२	५९	५५
२३	६०	५९
२४	६४	६३
२५	६६	६४
२६	६७	६२
२७	६५	६०
२८	५८	५७
२९	५८	५६
३०	५५	५२

'य' के अधिकतम तथा न्यूनतम मूल्य

चित्र ५

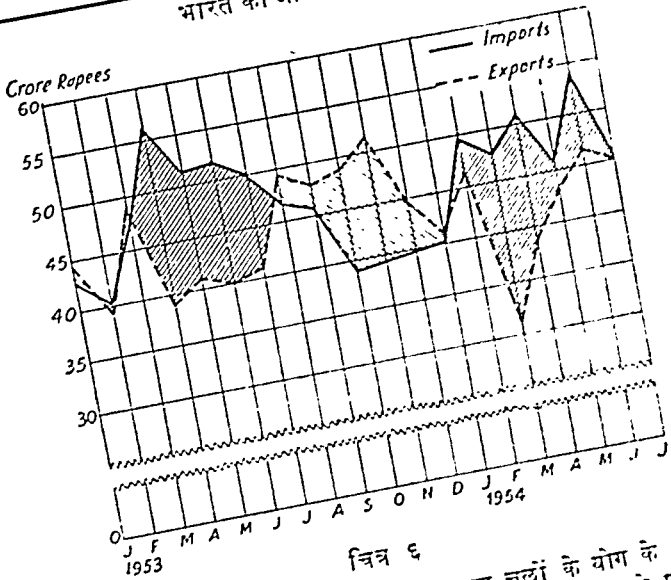
अन्तर दिखाने की रीति (Method of Showing Differences)—जब दो श्रेणियों का अन्तर दिखाना हो तो उनके बीच के स्थान को रंग कर या विभिन्न प्रकार की रेखाएँ खींचकर दिखाया जा सकता है। इस प्रकार का चित्रण अधिक प्रभावशाली और हृदयग्राही होता है। अगर अन्तर ऋणात्मक हो (अर्थात् घाटा हो) तो एक प्रकार के रंग का उपयोग किया जाता है, अगर धनात्मक हो (अर्थात् अतिरेक हो) तो दूसरे प्रकार के रंग का। इस प्रकार का चित्रण चित्र संख्या ६ में किया गया है जो सारणी संख्या ६ को प्रांकित करके प्राप्त हुआ है।

सारणी संख्या ६

भारत का विदेशी व्यापार जनवरी १९५३ से अगस्त १९५४ तक

महीना	आयात (करोड़ रुपये में)	निर्यात (करोड़ रुपये में
१९५३ जनवरी	४३·५	४४·५
फरवरी	४०·४	३९·२
मार्च	४७·१	४८·८
अप्रैल	५६·५	३८·९
मई	५१·४	४१·०
जून	५१·८	४०·०
जुलाई	५०·०	४१·०
अगस्त	४६·५	४९·४
सितम्बर	४५·५	४८·०

महीना	आयात (करोड़ रुपये में)	निर्यात (करोड़ रुपये में)
१९५३ अक्टूबर	३९.०	४८.७
नवम्बर	३९.८	५१.५
दिसम्बर	३९.९	४८.६
१९५४ जनवरी	४०.१	४०.८
फरवरी	४९.३	४६.६
मार्च	४३.८	३१.०
अप्रैल	५१.३	३८.७
मई	४५.३	४३.२
जून	५३.३	४६.७
जुलाई	४५.५	४५.०

भारत का आयात-निर्यात

चित्र ६

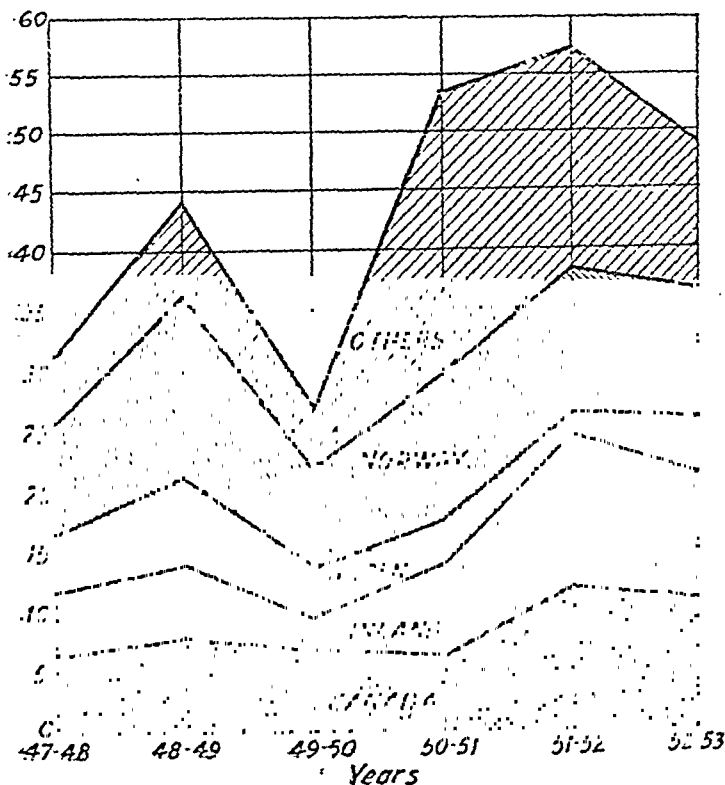
अगर समय के साथ बदलने वाला चल अन्य चलों के योग के बराबर हो तो कटिबन्ध बिन्दुरेखों का उपयोग किया जाता है। राशि के संघटकों को एक के ऊपर रख कर प्रांकित किया जाता है। इस प्रकार जितने संघटक होंगे उतने कटिबन्ध बन जायेंगे। इन कटिबन्धों को एक-दूसरे से अलग करने के लिए विभिन्न प्रकार के रंगों या चिन्हों का उपयोग किया जाता है। सारणी संख्या ७ में भारत में न्यूज़-प्रिंट का विभिन्न देशों से आयात दिया गया है।

सारणी संख्या ७

भारत में न्यूज-प्रिंट का आयात १९४७-४८ से १९५२-५३ तक (दस लाख रुपयों में)

देश	४७-४८	४८-४९	४९-५०	५०-५१	५१-५२	५२-५३
कनाडा	६.६	८.२	७.१	६.२	११.९	१०.६
फिनलैण्ड	५.५	५.९	२.४	८.०	१२.९	१०.९
स्वेडन	४.६	७.३	४.४	३.६	१.६	४.५
नार्वे	९.१	१४.९	८.५	११.९	१२.१	१०.७
अन्य	५.४	७.८	४.७	२४.०	१८.५	१२.६
कुल	३१.२	४४.१	२७.१	५३.७	५७.०	४९.३

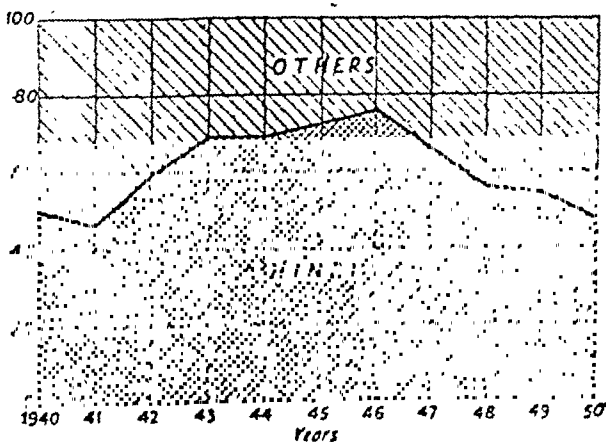
इसी सामग्री को दंडों के रूप में भी दिखाया जा सकता है। ये दण्ड एक-दूसर से मिले हुए होंगे। पर इसमें तुलना करना कठिन होता है, इसलिए इनका उपयोग प्रायः नहीं किया जाता है।

भारत में न्यूजप्रिन्ट का आयात

चित्र ७

अगर प्रतिशत के रूप में सामग्री दी गई तो भी कटिबन्ध चित्रों का उपयोग किया जा सकता है। इस प्रकार के चित्रों में प्रत्येक बार योग १०० रहेगा। इसलिए र–अक्ष में नापी गई योग की दूरी सदा बराबर रहेगी। पर संघटकों के मूल्यों में घट-बढ़ होने के कारण विभिन्न संघटकों को दिखाने वाले वक्र अलग-अलग होंगे। चित्र संख्या ८ में, सारणी ८ की सामग्री, जो प्रतिशत रूप में दी गई है, प्रांकित की गई है।

सारणी संख्या ८

भारत में हिन्दी चल-चित्रों की उत्पादन संख्या १९४०–५०

वर्ष	हिन्दी चलचित्र (१)	कुल चल चित्र (२)	(१),२ के प्रतिशत रूप में
१९४०	८६	१७१	५०·३
४१	७८	१७०	४६·५
४२	९७	१६३	५९·५
४३	१०८	१५९	६८·०
४४	८६	१२६	६८·२
४५	७३	९९	७३·७
४६	१५५	२००	७७·५
४७	१८६	२८३	६५·७
४८	१४८	२६५	५५·९
४९	१५७	२८९	५४·३
१९५०	११५	२४१	४६·९

चित्र ८

वारंवारता-चित्र
(Frequency-Diagrams)

जिन कारणों से अन्य प्रकार की सामग्री को चित्रों द्वारा निरूपित किया जाता है उन्हीं कारणों से वारंवारता बंटनों (frequency distributions) को भी चित्रों के रूप में दिखाया जाता है। ऐसे चित्रों को वारंवारता चित्र (frequency diagrams) कहा जाता है। इनको अंकित करने की रीति वैसे ही है जैसे पिछले अनुच्छेद में बताई जा चुकी है। वारंवारता चित्र किस प्रकार का बनेगा यह इस बात पर निर्भर करता है कि श्रेणी खंडित (discrete) है या संतत (continuous)। खंडित श्रेणी का अर्थ ऐसी श्रेणी है जिसमें चल के मूल्य किसी अन्तर (interval) में सब मूल्य नहीं लेता। इसके विपरीत संतत श्रेणी ऐसी श्रेणी है जिसमें चल के मूल्य दिए हुए अन्तर के सब मूल्य लेता है। जैसे मकानों में कमरों की संख्या एक खंडित श्रेणी बनाएगी क्योंकि कमरे केवल पूर्ण संख्या हो सकते हैं। पर व्यक्ति की लम्बाई संतत श्रेणी होगी क्योंकि व्यक्तियों की लम्बाई कोई भी मूल्य ले सकती है। व्यवहार में खंडित श्रेणियों का उपयोग अधिक होता है क्योंकि व्यवहार में नापी जाने वाली वस्तुएँ बहुधा किसी निश्चित इकाई के रूप में दी जाती है, इन इकाइयों के भिन्नों (fractions) के रूप में नहीं। खंडित श्रेणी दंड-चित्र या असंतत वक्र द्वारा दिखायी जाती है और संतत श्रेणी सरलित वक्र (smoothed curve) द्वारा दिखाई जाती है।

वारंवारता चित्र बनाने में य-अक्ष पर चल का मूल्य नापा जाता है, और र-अक्ष में प्रत्येक मूल्य की संतत वारंवारता। इस प्रकार बनाने वाले चित्र निम्नलिखित हैं—

(१) दंड चित्र (bar-diagrams) : इनका उपयोग खंडित श्रेणी निरूपित करने में किया जाता है।

(२) असंतत-वक्र (discontinuous curves) : इनमें विभिन्न विन्दुओं को मिला दिया जाता है। इनका उपयोग भी खंडित श्रेणी निरूपित करने के लिए किया जाता है।

(३) संतत वक्र (continuous curves): इनमें विभिन्न विन्दुओं को मिलाने वाला विन्दु रेख सरलित वक्र होता है। इसका उपयोग संतत श्रेणी निरूपित करने में किया जाता है।

आगामी अनुच्छेदों में इन पर अलग-अलग विचार किया गया है।

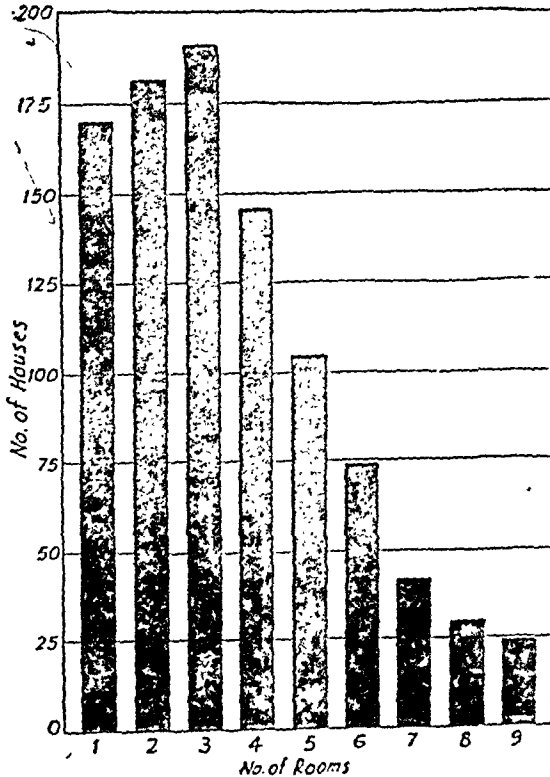
दंड चित्र बनाने के सिद्धान्त वे ही हैं जो पिछले परिच्छेद में दिये जा चुके हैं। चल के प्रत्येक मूल्य के ऊपर उसकी संगत वारंवारता दिखाई जाती है। इस प्रकार विभिन्न

मूल्यों के लिए विभिन्न दंड बनाए जाते हैं जिनकी लम्बाई संगत बारंबारताओं को बताती है। सारणी संख्या ९ में एक मकान में कमरों की संख्या का विवरण दिया गया है। इसको चित्र संख्या ९ में दंड-चित्र के रूप में प्रस्तुत किया गया है।

सारणी संख्या ९

कमरों की संख्या	मकानों की संख्या	कमरों की संख्या	मकानों की संख्या	कमरों की संख्या	मकानों की संख्या
१	१७०	४	१४६	७	४२
२	१८३	५	१०५	८	३०
३	१९१	६	७५	९	२५

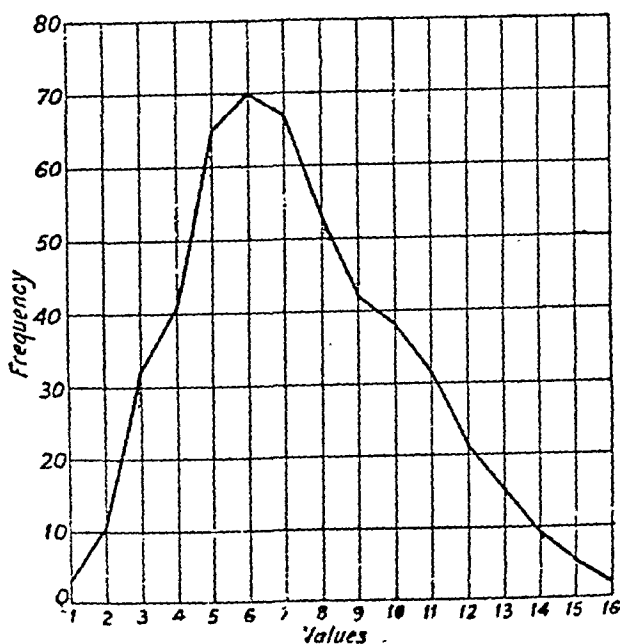
दण्ड अनुभूमिक भी बनाए जा सकते हैं। पर अनुभूमिक दंडों की अपेक्षा दीर्घ-दंडों का उपयोग करना चाहिए

मकानों में कमरों की संख्या

चित्र ९

इसी सामग्री को असंतत वक्र द्वारा भी दिखाया जा सकता है। य-और र-अक्ष चुन कर विन्दु-रेख कागज में विन्दु अंकित कर लिए जाते हैं। इन विन्दुओं को मिलाने वाला वक्र वारंवारता-वहुभुज (frequency polygon) कहलाता है। चित्र संख्या १० में दिया गया चित्र इस प्रकार के वारंवारता वहुभुज को दिखाता है यह चित्र सारणी संख्या १० में दी गई सामग्री को अंकित करके प्राप्त हुआ है। वारंवारता वहुभुज (frequency polygon) का उपयोग दक्ष व्यक्तियों को समझाने के लिए ही किया जा सकता है।

सारणी संख्या १०

चल के मूल्य	वारंवारता	चल के मूल्य	वारंवारता
०	३	८	४२
१	११	९	३८
२	३२	१०	३१
३	४१	११	२१
४	६५	१२	१५
५	७०	१३	९
६	६७	१४	५
७	५३	१५	२

चल के मूल्य

चित्र १०

संतत वक्रों का उपयोग ऐसे वारंवारता वंटनों को निरूपित करने के लिए किया जाता है जिनमें चल एक अन्तर में कोई भी मूल्य ले सकता है, ऐसे वंटन वर्गीकृत होते हैं। इसलिए इस बात का साधारणतः प्रयत्न करना चाहिए कि वर्गान्तर बराबर हों अन्यथा चित्र वंटन का गलत बोध (idea) दे सकता है। जैसा पहले बताया जा चुका है सामग्री के वर्गीकरण में १० से २५ तक वर्ग होने चाहिए। पर यह कोई स्थिर नियम नहीं है। हाँ, इसका अवश्य ध्यान रखना चाहिए कि वंटन जहाँ तक हो सके सरलित रहे। किसी भी वर्गान्तर को इसलिए नहीं छोड़ना चाहिए कि उसके अन्तर्गत चल के कोई मूल्य नहीं आते।

अगर सामग्री वर्गीकृत हो तो इसको निरूपित करने वाले वारंवारता-दंड-चित्र या वारंवारता-बहुभुज को सरलित करना पड़ता है ताकि वक्र संतत हो जाय। वक्र-सरलन की रीति निम्नलिखित है।

मान लीजिए सारणी संख्या ११ में दी गई सामग्री को सरलित वक्र के रूप में अंकित करना है।

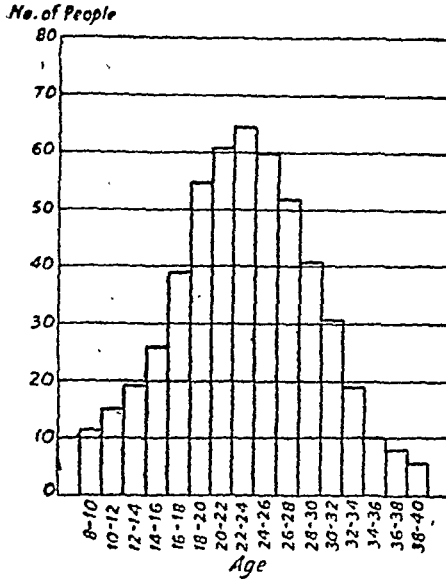
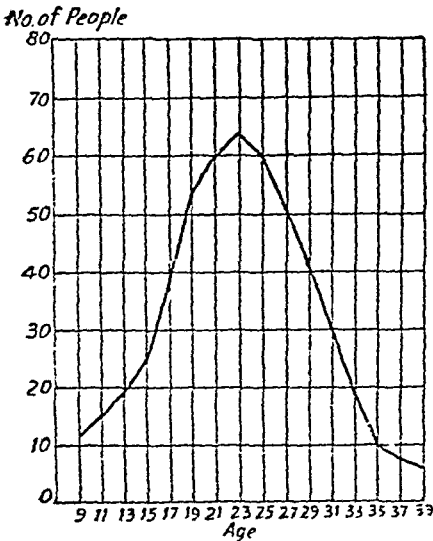
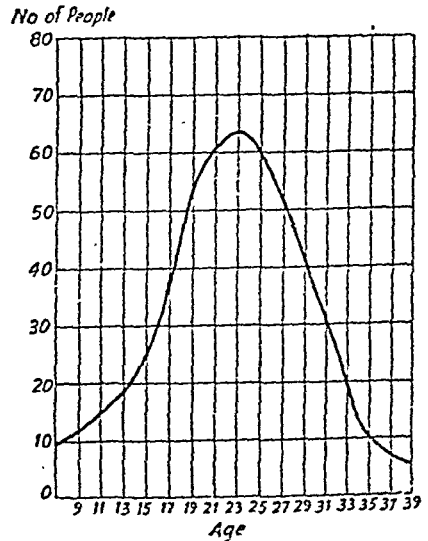
सारणी संख्या ११

व्यक्तियों की आयु का वंटन

आयु (वर्षों में)	व्यक्तियों की संख्या
८–१०	१२
१०–१२	१५
१२–१४	१९
१४–१६	२६
१६–१८	३८
१८–२०	५५
२०–२२	६१
२२–२४	६४
२४–२६	६०
२६–२८	५३
२८–३०	४२
३०–३२	३१
३२–३४	१८
३४–३६	१०
३६–३८	७
३८–४०	५

चित्र सं० ११ (क), ११ (ख) और ११ (ग) में क्रमशः इस सामग्री के वारंवारता चित्र, वारंवारता-बहुभुज और सरलित वारंवारता वक्र दिखाए गए हैं। चित्र

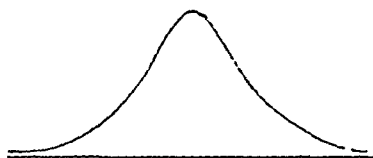
सं० ११ (क) और ११ (ख) के कुल क्षेत्रफल बराबर हैं, पर प्रत्येक वर्गान्तर के लिए दिया गया क्षेत्रफल दोनों में बराबर नहीं है। वारंवारता बहुभुज से यह ठीक-ठीक नहीं जाना जा सकता कि प्रत्येक वर्गान्तर के अन्तर्गत चल के कितने मूल्य आते हैं। वारंवारता-बहुभुज को सरलित करके चित्र सं० ११ ग खींची गई है। पर साधा-

चित्र ११ क

चित्र ११ ख

चित्र ११ ग

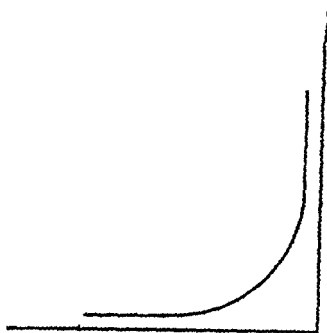
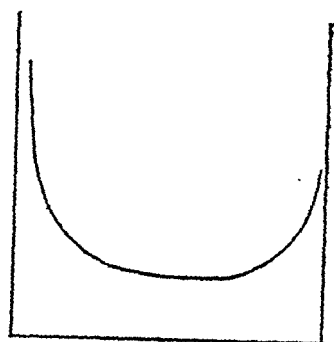
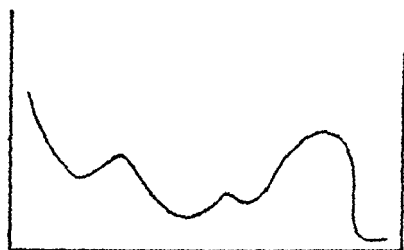
रणतः इसको इस प्रकार नहीं खींचा जाता। प्रांकित विन्दुओं से सीधे इसको खींचा जा सकता है।

विभिन्न प्रकार के सैद्धान्तिक वारंवारता वक्र (Theoretical Frequency Curves) :

(१) **प्रसामान्य वारंवारता वक्र** (normal frequency curves) : इन वक्र को घंटाकार वक्र (bell-shaped curve) भी कहते हैं। यह वक्र अधिकतम वारंवारता वाले चल के मूल्य से खींचें गए कोटि (ordinate) पर संमित (symmetrical) होता है। चित्र सं० १२ एक ऐसे वक्र को दिखाती है।

चित्र संख्या १२

(२) **विषम वारंवारता वक्र** (skew frequency curve) : ये वक्र चल के किसी भी मूल्य से खींचे गए कोटि पर संमित नहीं होते। अधिकतम वारंवारता वाले कोटि के एक ओर वारंवारता दूसरी ओर की वारंवारता की अपेक्षा अधिक शीघ्रता से कम होती है। ये वक्र व्यवहार में बहुधा पाये जाते हैं। अगर अधिकतम वारंवारता वाले कोटि के दाहिनी ओर वारंवारताएँ कम शीघ्रता से कम होती हैं तो वक्र को अनुलोम रूप से विषम (positively skew) कहा जाता है। इसके विपरीत होने पर विलोम रूप से विषम (negativly skew) । चित्र सं०१३ अनुलोमतः विषम और चित्र सं० १४ विलोमतः विषम वारंवारता वक्र दिखाती है।

चित्र संख्या १३ चित्र १४

(३) **विषम बाहु वारंवारता वक्र** (J-shaped or extremely asymmetrical frequnecy curves) : इन वक्रों में अधिकतम वारंवारता वाला मूल्य एक कोने में होता है और उसकी दाहिनी ओर (या बाईं ओर) के प्रत्येक चल की वारंवारता कम होती चली जाती है। चित्र संख्या १५ ऐसे वारंवारता वक्र को दिखाती है।

चित्र संख्या १५ चित्र १६

(४) अर्धवाहु वारंवारता वक्र (U—shaped frequency curve) : ऐसे वक्रों में अधिकतम वारंवारता कोनों में दिए गए चल के मूल्यों की होती है और जैसे-जैसे चलों के मूल्य वीच की ओर वढ़ते हैं, वारंवारता कम होती चली जाती है। चित्र सं० १६ में ऐसा वक्र दिया गया है।

चित्र संख्या १७

इनके अलावा ऐसे वक्र भी हो सकते हैं जो इन वक्रों को मिलाकर बने हों। अर्थात् जिनके विभिन्न भाग अलग-अलग प्रकार के वक्र हों। (चि० सं० १७)

संचयी वारंवारता वक्र

(Cumulative Frequency Curve)

अव तक जिन वारंवारता वक्रों पर विचार किया गया है वे प्रत्येक वर्गान्तर की वारंवारता वताते थे। सामग्री को निरूपित करने की एक प्रचलित रीति संचयी वारंवारता वक्र खींचने की है। संचयी वारंवारता की गणना करने की रीति यह है कि प्रत्येक क्रमानुगत वर्ग की वारंवारता में उससे पहले के या वाद के वर्गों की वारंवारताएँ जोड़ दी जाती हैं। यह योग उस वर्ग की संचयी वारंवारता वताता है। अगर वर्ग

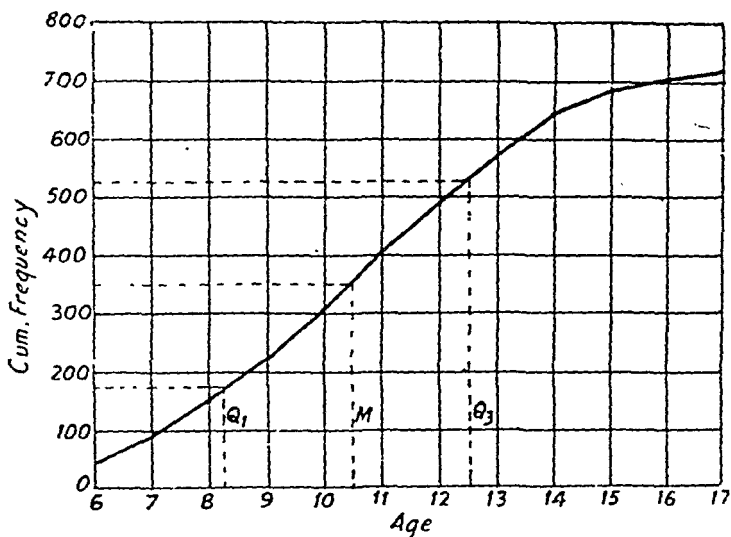
से पहले की वारंवारता जोड़ी जाती है तो वर्ग की संचयी वारंवारता यह बताती है कि उस वर्ग और उससे कम मूल वाले वर्गों में कितने पद (items) हैं। इसके विपरीत अगर वर्ग के बाद के वर्गों की वारंवारताएँ जोड़ी जाती हैं तो इस वर्ग की संचयी वारंवारता यह बताती है कि उस वर्ग में और उससे अधिक मूल्य वाले वर्गों में चल के पदों की संख्या कितनी है।

वारंवारता-वक्र और संचयी वारंवारता वक्र खींचने की रीतियाँ एक-सी है। अन्तर केवल इतना है कि पहली दशा में प्रत्येक वर्ग की वारंवारता वर्ग के मध्य-मूल्य की वारंवारता मान कर अंकित की जाती है और दूसरी दशा में संचयी वारंवारता वर्ग की अपर या अवर सीमा पर अंकित की जाती है। इस प्रकार प्राप्त बिन्दुओं को मिलाकर संचयी-वारंवारता वक्र प्राप्त होता है। सारणी संख्या १२ में प्रत्येक वर्ग की वारंवारता और संचयी वारंवारता दी गई है। इसे चित्र संख्या १८ में प्रदर्शित किया गया है। इस सामग्री के चतुर्थक तथा मध्यका भी निकाले गये है।

सारणी संख्या १२

विद्यालय में पढ़ने वाले विद्यार्थियों की आयु का बंटन

आयु	वारंवारता	संचयी वारंवारता
५–६	४०	४०
६–७	५६	९६
७–८	६०	१५६
८–९	६६	२२२
९–१०	८४	३०६
१०–११	९६	४०२
११–१२	९२	४९४
१२–१३	८०	५७४
१३–१४	६४	६३८
१४–१५	४४	६८२
१५–१६	२०	७०२
१६–१७	८	७१०

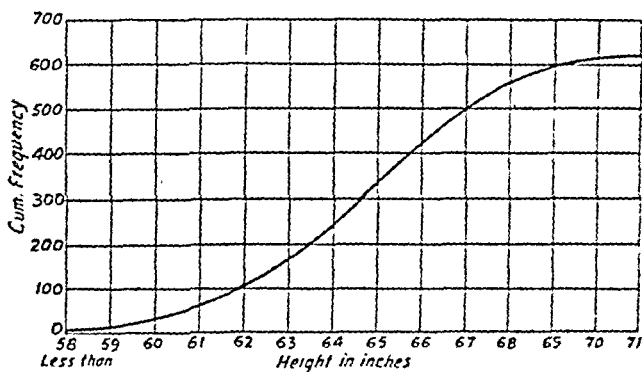
विद्यार्थियों का आयु-वंटन

चित्र १८

ऊपर दिए गए चित्र संख्या १८ में चतुर्थक तथा मध्यका का मूल्य भी मालूम किया गया है। विद्यालय में पढ़ने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या ७१० है। इसलिए मध्यका ३५५वें विद्यार्थी की आयु तथा पहला चतुर्थक १७७·५ में विद्यार्थी की आयु और तीसरा चतुर्थक ५३२·५ में विद्यार्थी की आयु होगी (विन्दु-रेख से मध्यका निकालने के लिए $\frac{\text{स}+१}{२}$ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ के स्थान पर $\frac{\text{स}}{२}$ वें $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ पद का मूल्य निकालना चाहिए। इसी प्रकार चतु$_1$ $\frac{\text{स}}{४}$ वें और चतु$_3$ $\frac{३\text{स}}{४}$ वें पद के मूल्य होंगे)।

मध्यका निकालने के लिए शीर्ष रेखा पर ३५५वें मूल्य से एक रेखा अनुभूमिका रेखा के समानान्तर खींची जायगी और यह जिस स्थान पर संचयी वारंवारता वक्र को छुएगी उस स्थान से एक दूसरी रेखा शीर्ष रेखा के समानान्तर खींची जायगी। यह रेखा जिस स्थान पर अनुभूमिक रेखा को छुएगी उसी स्थान का मूल्य मध्यका का मूल्य होगा। प्रस्तुत चित्र में मध्यका का मूल्य इस रीति से लगभग १०·५ वर्ष आता है। इसी प्रकार चतुर्थकों के मूल्य भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

जिस प्रकार वारंवारता वक्र वनाने के लिए सरलन करना पड़ता है वैसे ही संचयी वारंवारता वक्र वनाने के लिए भी सरलन करना पड़ता है। सारणी सं० १३ के लिए खींचा गया संचयी वारंवारता वक्र सरलन करके वनाया गया है।

सारणी संख्या १३

व्यक्तियों की लम्बाई	वारंवारता	संचयी वारंवारता
५७–५८ (इंच)	३	३
५८–५९	९	१२
५९–६०	२६	३८
६०–६१	३१	६९
६१–६२	४५	१०४
६२–६३	२४	१६८
६३–६४	७८	२४६
६४–६५	८५	३३१
६५–६६	९६	४२७
६६–६७	७२	४३९
६७–६८	६०	५५९
६८–६९	४३	६०२
६९–७०	२०	६२२
७०–७१	६	६२८

चित्र १९

अनुपात स्केल में विन्दुरेख
(Graphs on Ratio Scale)

साधारण या समान्तर स्केल के अनुसार खींचे गए विन्दुरेख चल के मूल्यों के निरपेक्ष परिवर्तनों को निरूपित करते हैं। इनसे यह जाना जा सकता है कि चल के आकार (size) में क्या परिवर्तन हुए हैं। कई स्थानों में केवल इतना जान लेने

से ही काम चल जाता है, पर अगर इस परिवर्तन की दर (अर्घ, rate) जाननी हो तो इस स्केल में खींचे गए विन्दुरेख वेकार हो जाते हैं। ऐसे सापेक्ष परिवर्तनों का महत्व दिन-प्रति-दिन वढ़ता चला जा रहा है। इन परिवर्तनों को विन्दुरेख के रूप में दिखाने के लिए अनुपात-स्केल का उपयोग किया जाता है। अनुपात स्केल और साधारण स्केल में यह अन्तर है कि दूसरे में दी गई वरावर दूरियाँ चल के वरावर आकारों को दिखाती हैं, पर अनुपात स्केल में वरावर दूरियाँ वरावर अनुपाती परिवर्तनों (proportionate changes) को वताती हैं। समान्तर स्केल या साधारण स्केल समान्तर श्रेणी के अनुसार होता है और अनुपात-स्केल गुणोत्तर श्रेणी के अनुसार। सापेक्ष और निरपेक्ष परिवर्तनों का अर्थ निम्नलिखित उदारहण से स्पष्ट हो जाएगा।

सारणी संख्या १४

किसी व्यक्ति की मासिक आय निम्नलिखित है :

मास	आय रु०	मासिक वृद्धि रु०	प्रतिशत वृद्धि
१	१००	....	....
२	२००	१००	१००
३	३००	१००	५०
४	४००	१००	३३$\frac{1}{3}$
५	५००	१००	२५
६	६००	१००	२०
७	७००	१००	१६$\frac{2}{3}$
८	८००	१००	१४$\frac{2}{7}$

अगर आय साधारण स्केल में दिखाई जाय तो वरावर दूरियों में वृद्धि दिखाई जायगी। अगर वृद्धि १०,००० से १०,१०० हो तव भी परिवर्तन वरावर माना जाएगा, भले ही यह केवल १% है। अनुपात स्केल के द्वारा यह परिवर्तन जाना जा सकता है।

छेदा-स्केल और छेदा-वक्र

(Logarithmic Scale and Logarithmic Curves)

छेदा स्केल में सामग्री का निरूपण दो प्रकार से किया जा सकता है :--

(१) दी हुई राशियों के छेदा या लघुगणकों को साधारण स्केल के अनुसार अंकित करके।

(२) दी हुई राशियों को छेदा स्केल के अनुसार अंकित करके।

दूसरी वाली रीति में चूँकि केवल शीर्ष स्केल ही छेदा-स्केल के अनुसार होता

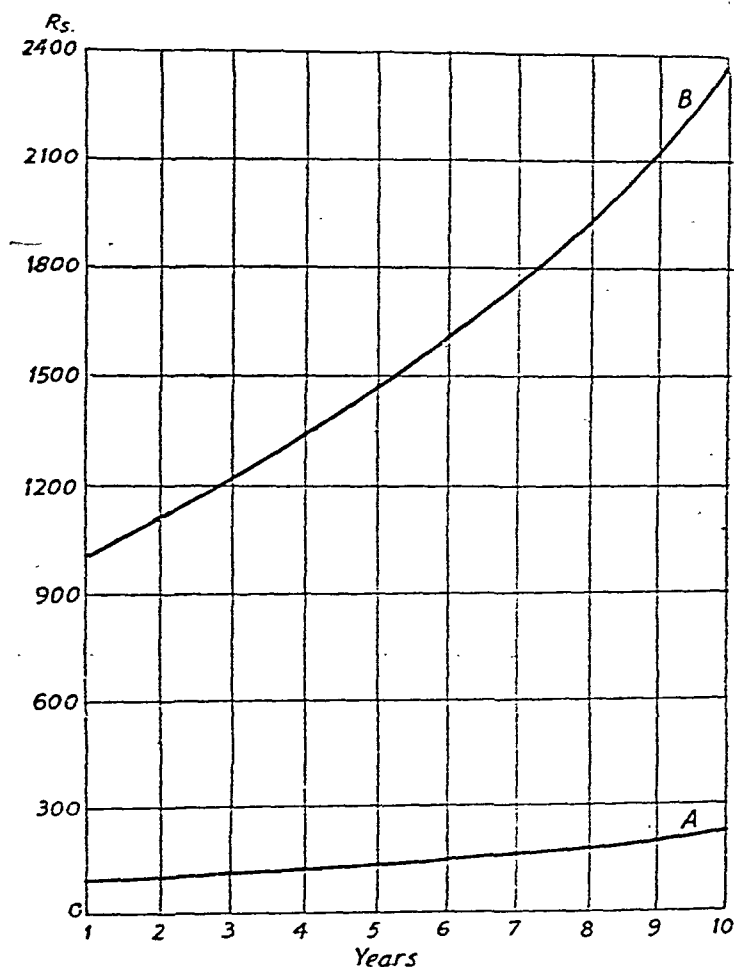
है, इसलिए इस प्रकार खींचे गये बिन्दु रेख को अर्ध-छेदा-बिन्दु-रेख (semi-logarithmic graph) भी कहते हैं।

सारणी संख्या १५ में दो संख्याओं (अ और ब) जिनका मान क्रमश: १०० रुपया तथा १००० रुपया है का १० प्रतिशत प्रति वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज के अनुसार मिश्रधन दिया गया है।

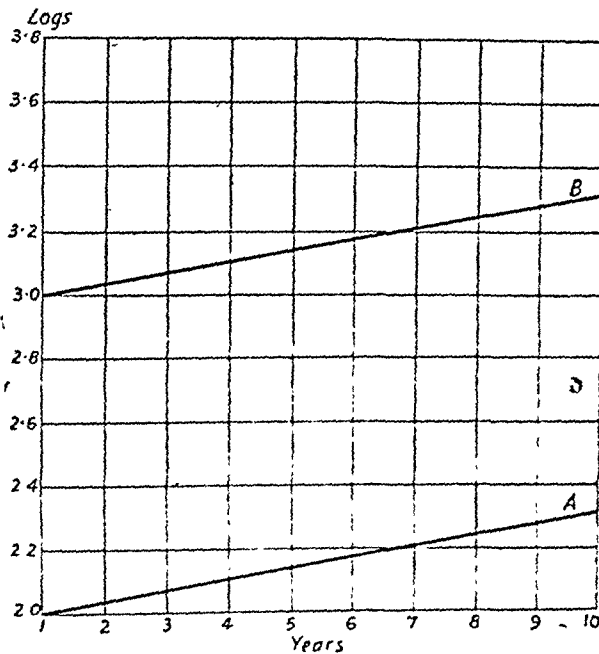
सारणी संख्या १५

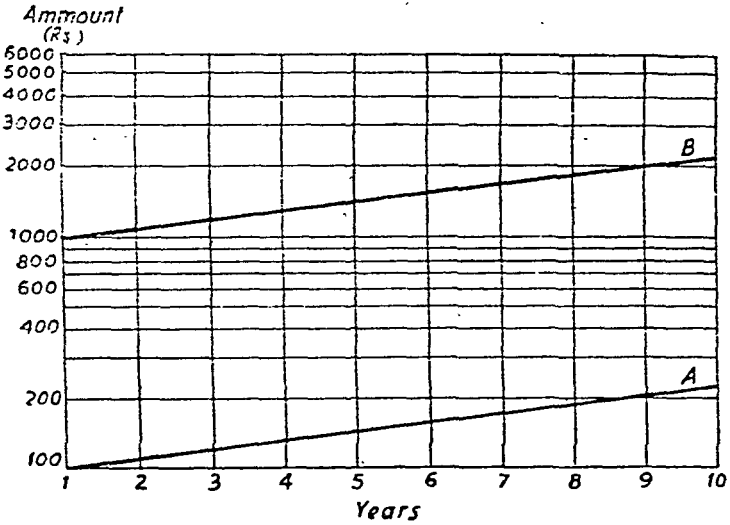
वर्ष	मिश्रधन		लघुगणक (छेदा)	
	अ	ब	अ	ब
१	१००	१०००	२·००	३·००
२	११०	११००	२·०४	४·३०
३	१२१	१२१०	२·०८	३·०८
४	१३३	१३३०	२·१२	३·१२
५	१४६	१४६०	२·१६	३·१६
६	१६१	१६१०	२·२०	३·२०
७	१७७	१७७०	२·२४	३·२४
८	१९५	१९५०	२·२८	३·२८
९	२१४	२१४०	२·३२	३·३२
१०	२३६	२३६०	२·३६	३·३६

उपरोक्त सामग्री प्राकृत स्केल पर नीचे दिये गये चित्र सं० २० में निरूपित है।

१०% चक्रवृद्धि व्याज से १०० रु० तथा १००० रु० का मिश्रधन

चित्र २०

उपरोक्त चित्र से ऐसा प्रतीत होता है कि १००० रुपये की वृद्धि १०० रुपये की वृद्धि की अपेक्षा अधिक तीव्र है। इसका कारण यह है कि प्राकृत स्केल निरपेक्ष परिवर्तन नापता है और १००० रुपये वाले वक्र में ऐसे परिवर्तन १०० रुपये वाले वक्र से अधिक है, यदि इसी सामग्री को अनुपात स्केल द्वारा निरूपित किया जाय तो यह भ्रम दूर हो सकता है और तब दोनों वक्र समान प्रवृत्ति दिखलायेंगे। नीचे दिये गये चित्र सं० २१ में राशियों का छेदा (logarithms) प्रांकित किया गया है।

१०% चक्रवृद्धि ब्याज से १०० रु० तथा १००० रु० के मिश्रधन का छेदा

चित्र २१

उपरोक्त चित्र से यह स्पष्ट है कि दोनों मूलधन एक ही दर के साथ बढ़ रहे हैं और उनकी प्रवृत्ति समान है। साधारण बिन्दुरेखपत्र के स्थान पर ऐसे पत्र का भी प्रयोग किया जा सकता है जिसमें छेदा स्केल बना हो। ऐसा करने से चित्र के समझने में आसानी हो जाती है क्योंकि छेदा पत्रों में (logarithmic papers) शीर्ष-रेखा पर राशियों के छेदा स्थान पर स्वयं राशियाँ ही लिखी जाती हैं। नीचे चित्र संख्या २२ में छेदा-पत्र का प्रयोग किया है।

चित्र २२

अनुपात स्केल की विशेषताएँ

(१) वरावर शीर्ष-दूरियाँ वरावर आनुपातिक परिवर्तनों को निरूपित करती हैं। चित्र संख्या २१ में १ और २,१० और २०,२५ और ५० के वीच की दूरियाँ बरावर हैं क्योंकि वे वरावर आनुपातिक परिवर्तनों को दिखाती हैं।

(२) इसमें शून्य और ऋणात्मक मूल्य नहीं दिखाए जा सकते। इस स्केल में शून्य नहीं होता।

(३) इसमें आधार रेखा की आवश्यकता नहीं रहती और किसी भी बिन्दुरेख को ऊपर या नीचे विना उसका मान (value) वदले हटाया जा सकता है। यह छेदा स्केल का वहुत वड़ा लाभ है। क्योंकि विन्दुरेखों के मान में विना कोई परिवर्तन किए हुए उन्हें समीप लाया जा सकता है और इस प्रकार तुलना करना सहज हो जाता है।

(४) परिवर्तन के विस्तार के बहुत वड़े होने पर भी छेदा-स्केल में उसे सुविधाजनक रूप से दर्शाया जा सकता है।

(५) यह पूर्ण को उसके अंशों के रूप में नहीं दिखा सकता।

(६) एक ही कागज में दो या अधिक स्केल दिखाए जा सकते हैं। इसी प्रकार दो या अधिक इकाइयों वाली सामग्रियाँ भी इसके द्वारा दिखाई जा सकती हैं।

प्रश्न

(१) विन्दुरेखों की रचना में किन वातों का ध्यान रखना पड़ता है ?

(२) कूट-आधार रेखा क्या है ? इसका प्रयोग करने में किन वातों का ध्यान रखना पड़ता है।

(३) लघुगणकीय स्केल में वक्र खींचने की आवश्यकता कब पड़ती है ? इनकी रचना करने के रीति का विस्तारपूर्वक वर्णन कीजिए।

(४) निम्नलिखित की व्याख्या करने के लिए संक्षिप्त टिपणियां लिखिये:— (क) संचयी वारंवारता वक्र, (ख) कालिक चित्र (ग) वारंवारता-चित्र (घ) वारं-वारता-वहुभुज

(५) निनलिखित सारणी में भारत के लिए मजदूरों के निर्वाह् व्यय देशनांक दिए गए हैं। इनको विन्दुरेख के रूप में प्रस्तुत करिये।

१९४५–४६	(आधार: १९४४=१००)
४६-४७	१००
४७-४८	१०६
४८-४९	१२०
४९-५०	१३५
५०-५१	१३७
५१-५२	१३९
५२-५३	१४५
५३-५४	१४२
	१४६

(६) निम्नलिखित सारणी में भारत का आयात-निर्यात दिया गय है, और इनके अन्तर को चित्र द्वारा निरूति करिये।

	मास	आयात (करोड़ रु० में)	निर्यात (करोड़ रु० में)
१९५२	अप्रैल	८१.१	४८.९
	मई	७९.७	५१.१
	जून	६३.३	५२.०
	जुलाई	५९.२	५४.२
	अगस्त	५९.३	५५.२
	सितम्बर	४९.१	४७.७
	अक्टूबर	४७.१	५३.५
	नवम्बर	४३.६	४१.१
	दिसम्बर	४७.४	४५.५

मास		आयात (करोड़ रु० में)	निर्यात (करोड़ रु० में)
१९५३	जनवरी	४३.५	४४.४
	फरवरी	४०·०	३९.२
	मार्च	४७·१	४८·८
	अप्रैल	५६·५	३८·९
	मई	५६.१	४१.०
	जून	५१.४	४१.०
	जुलाई	५१.७	४१.०
	अगस्त	४०.०	४०.१
	सितम्वर	५६.६	४९.४
	अक्टूवर	४५.५	४८.०
	नवम्वर	३८.९	४८.७
	दिसम्वर	३९.४	५२.१

(७) निम्नलिखित सारणी में बंवई में चाँदी के अधिकतम और न्यूनतम मूल्य दिए गएहैं। इन्हें उपयुक्त रूप से चित्रित करिये।

महीना		मूल्य (प्रति १०० तोला)			
		उच्चतम		निम्नतम	
		रु०	आ०	रु०	आ०
१९५३	अप्रैल	१६४	१५	१५२	१२
	मई	१६७	१४	१५७	१४
	जून	१६६	७	१५५	३
	जुलाई	१५७	४	१५१	१२
	अगस्त	१५९	१०	१५३	१
	सितम्वर	१६१	१	१५२	१३
	अक्तूवर	१५६	२	१४८	१४
	नवम्वर	१५५	११	१५२	०
	दिसम्वर	१५४	३	१५०	१४
१९५४	जनवरी	१६१	८	१५१	१२
	फरवरी	१६६	४	१५९	७
	मार्च	१६९	२	१६२	१२
	अप्रैल	१७३	१४	१६५	१४
	मई	१७१	१५	१५९	१३
	जून	१६०	६	१४७	१५
	जुलाई	१५६	१०	१५०	३
	अगस्त	१५७	०	१५२	१
	सितम्वर	१५८	२	१५३	११

(८) निम्नलिखित सामग्री को बिन्दुरेख के रूप में प्रस्तुत करिये।

न्यूयार्क में चांदी का मूल्य

(सेंट प्रति औंस)

वर्ष	उच्चतम	निम्नतम
१९४५	७०.७५	४४.४५
४६	९०.१३	७०.७५
४७	८६.२५	५९.७५
४८	७७.५०	७०.००
४९	७३.२५	७०.००
५०	८०.००	७१.७५
५१	९०.१६	८०.००
५२	८८.००	८२.७५
५३	८५.२५	८३.२५

(९) निम्नलिखित सारणी में भारत में खाद्यान्नों का उत्पादन (हजार टनों में) दिया गया है। इसे बिन्दुरेखीय रूप में प्रस्तुत करिये।

वस्तु	१९४५–४६	१९४६–४७	१९४७–४८	१९४८–४९	१९४९–५०
चावल	१९,८९२	२१,६६९	२१,२४७	२२,१९७	२३,१७०
गेहूँ	६,१३४	४,९७१	५,५७०	५,६५०	६,२९०
ज्वार	५,५३९	५,२९५	५,९७१	५,०२२	५,७७७
बाजरा	२,८५५	२,७१६	२,८१३	२,१७१	२,७९०
मक्का	२,३८३	२,३४९	२,४३१	२,०७२	२,०१८
जौ	२,२२२	२,४५०	२,६४०	२,२०६	१,२१५
चना	३,८६२	३,५९९	४,५०३	४,५३५	३,६६३
अन्य	३,३६२	३,०९४	३,०६९	३,५९६	३,७६२
कुल	४५,७३६	४६,१४३	४८,२४४	४७,८४९	४९,६०५

(१०) निम्नलिखित सारणी में भारत-सरकार के ऋण के विभिन्न मदों का प्रतिशत दिया हुआ है। इसको बिन्दुरेख के रूप में प्रस्तुत करिये।

मार्च के अन्त में	विना तारीख	दस वर्ष से अविक	५ से १० वर्ष तक	५ वर्ष से कम	कोषागार विपत्र	छोटी बचतें	अन्य दायित्व
१९४५	१८.१	२५.२	१८.०	१५.९	५.५	१०.१	७.२
४६	१४.७	३४.३	११.५	१६.६	४.३	११.४	७.२
४७	१२.१	३५.५	८.१	१६.२	३.६	१२.६	११.९
४८	१२.३	३२.७	१३.७	१३.७	४.७	११.२	११.७
४९	११.०	३०.५	८.४	१३.३	१५.२	११.६	१०.०
५०	१०.७	२४.७	१२.५	१२.०	१४.७	१२.२	१३.२
५१	१०.४	२१.०	१३.९	१२.९	१४.८	१३.२	१३.९
५२	१०.५	१८.८	१८.३	९.४	१३.५	१५.२	१४.३
५३	१०.३	१५.६	१६.५	१३.९	१२.७	१६.५	१४.५
५४	१०.३	१०.८	२१.८	११.५	१३.४	१८.०	१४.२

(११) अनुपात-स्केल के साधारण-स्केल की अपेक्षा क्या लाभ हैं ? निम्नलिखित सामग्री का छेदा-स्केल के अनुसार विन्दुरेख के रूप में प्रांकण करिये।

वर्ष	कुल प्रसारित नोट (करोड़ रु० में)	कुल प्रचलित नोट (करोड़ रु० में)
१९३३–३४	१७७	१६७
३४–३५	१८६	१७२
३५–३६	१९६	१६७
३६–३७	२०८	१९२
३७–३८	२१४	१८५
३८–३९	२०७	१८७
३९–४०	२५२	२३७
४०–४१	२६९	२५८
४१–४२	४२१	४१०
४२–४३	६५०	६२५

(१२) निम्नलिखत सामग्री कानपुर, नागपुर और कलकत्ता के निर्वाह व्यय देशनांक प्रस्तुत करती है। इन्हें विन्दु रेखों के रूप में निरूपित करिये।

वर्ष	कानपुर (१९३९=१००)	नागपुर (१९३९=१००)	कलकत्ता (१९३९=१००)
१९४४	३१४	२६७	२७९
४५	३०८	२५९	२८३
४६	३२८	२८५	२७५
४७	३७८	३२०	३०९
४८	४७१	३७२	३३९
४९	४७८	३७७	३४८
५०	४३४	३७२	३४९
५१	४५१	३९१	३७०
५२	४४१	३८०	३५१
५३	४५३	३८७	३४९

(१३) कूट आधार रेखा का उपयोग किन दशाओं में करना चाहिए? निम्न-लिखित सामग्री को, जो भारत में सब उद्योगों के लाभ के देशनां बताती है, बिन्दुरेख में प्रस्तुत करिये।

वर्ष	देशनांक (आधार; १९३९ : १००)
१९४१	१८७
४२	२२२
४३	२४६
४४	२३९
४५	२३४
४६	२२९
४७	१९२
४८	२६०
४९	१८२
५०	२४७

(१४) निम्नलिखित सारणी में कुछ देशों में द्रव्य पूर्ति के देशनांक दिए गए हैं इन्हें छेदा स्केल के अनुसार निरूपित करिये :

(आधार : १९४८ : १००)

वर्षान्त	यू० के०	स० रा० अ०	फ्रांस
१९४५	८६	९२	४७
४६	९७	९९	६२
४७	९८	१०२	७७
४८	१००	१००	१००
४९	१०१	१००	१२५
५०	१०२	१०८	१४४
५१	१०३	११५	१७०
५२	१०५	११९	१९२
५३	१००	१२१	२१४

(१५) निम्नलिखित सारणी में भारत के लिए उत्पादन थोक मूल्य, और निर्वाह व्यय के त्रैमासिक देशनांक दिए गए हैं। इन्हें एक ही स्थान पर बिंदु रेखों द्वारा प्रस्तुत करिये :

वर्ष और त्रिमास		उत्पादन देशनांक (सब उद्योग) (आधार : १९४६=१००)	थोक मूल्य देशनांक (आधार १९३९=१००)	निर्वाह-व्यय देशनांक पूरा भारत) आधार १९४६=१००
१९५१–५२	१	११७·३	४५६·९	१४४
	२	११७·७	४३९·९	१४५
	३	१२१·३	४३५·६	१४५
	४	१२६·०	४०७·९	१३९
१९५२–५३	१	१२६·७	३७३·२	१४०
	२	१२८·२	३८६·७	१४३
	३	१३३·६	३८१·२	१४२
	४	१३२·७	३८१·४	१४२
१९५३–५४	१	१३५·५	३९५·९	१४७
	२	१३४·९	४०७·३	१५३
	३	१३७·५	३९१·२	१४६
	४	१३७·३	३९५·८	—

(१६) संघटकों सहित कालिक चित्र किस प्रकार बनाए जाते हैं। विस्तरपूर्वक लिखिये।

निम्नलिखित सारणी म भारत के विभिन्न केन्द्रों में १९५३-५४ में चेकों का भुगतान (रुपयों में) दियागया है। इसको संघटक कालिक चित्र के रूप में दिखलाइये।

मास		केन्द्र				
		बम्बई	कलकत्ता	दिल्ली	कानपुर	मद्रास
१९५३	अप्रैल	२५०	२०८	१५	१५	३३
	मई	२११	१९८	१५	१५	३०
	जून	२२०	१९६	१४	१२	३२
	जुलाई	२२९	२१५	१५	१२	३५
	अगस्त	१९२	१९०	१२	१०	३०
	सितम्बर	१९८	२१३	१४	११	३६
	अक्टूबर	२००	१९८	१४	९	२८
	नवम्बर	२०१	२१५	१५	१२	३४
	दिसम्बर	२४८	२४५	१८	१४	३२
१९५४	जनवरी	२२७	२२२	१८	१२	२९
	फरवरी	२२५	२२१	१५	१२	३२
	मार्च	२५९	२४९	१८	१३	३६

(१७) निम्नलिखित वारवारता वंटन को बिन्दुरेखीय रूप में प्रस्तुत करिये। इसके लिए दण्ड चित्र भी बनाइये।

वर्गान्तर	वर्ग-वारंवारता
०–२	१७
२–४	५१
४–६	१०५
६–८	१५०
८–१०	२२५
१०–१२	२६२
१२–१४	३४०
१४–१६	३००
१६–१८	२००
१८–२०	२१०

(१८) निम्नलिखित वारंवाता-वंटन को विन्दुरेख के रूप में रखिये। प्रत्येक वर्ग के लिए वारंवारता ज्ञात करिये और संचयी वारंवारता वक्र भी वनाइये।

वर्गान्तर	वर्ग-वारवारता
०—५	१३
५—१०	४२
१०—१५	१३५
१५—२०	२३७
२०—२५	२५०
२५—३०	२५६
३०—३५	२५०
३५—४०	२३७
४०—४५	१३५
४५—५०	४२
५०—५५	१३

(१९) निम्नलिखित सारणी में दिए गए वारंवारता-वंटनों को अलग-अलग चित्रित करिये।

वर्ग वारंवारता

वर्गान्तर	(क)	(ख)	(ग)	(घ)
०—१	२	१५	१९०	६
१—२	६	२०	१२०	७
२—३	१५	३०	७०	१०
३—४	४६	५०	५०	७
४—५	११०	९०	४०	५
५—६	१६५	८५	३२	२
६—७	१८०	७५	२५	१
७—८	१६५	६०	१९	१
८—९	११०	४८	१४	४
९—१०	४६	२५	१०	६
१०—११	१५	१७	७	११
११—१२	६	१०	५	१९
१२—१३	२	५	४	३०

(२०) निम्नलिखित सारणी में कुछ देशों के लिए थोक मूल्य देशनांक दिए गए हैं। इन्हें छेदा स्केल के अनुसार चित्रित करिये।

आधार वर्ष १९४८ = १००

मास और वर्ष		फ्रांस	भारत	यू० के०	संयुक्तराज्य अमरीका
१९५२	जनवरी	१७१	११७	१५३	१०८
	फरवरी	१७१	११३	१५०	१०८
	मार्च	१६७	१०३	१५२	१०८
	अप्रैल	१६५	१०३	१५०	१०७
	मई	१६२	१००	१४९	१०७
	जून	१६१	१०२	१४९	१०७
	जुलाई	१६२	१०५	१४९	१०७
	अगस्त	१६२	१०६	१४८	१०७
	सितम्बर	१६१	१०६	१४१	१०७
	अक्टूबर	१५७	१०६	१४९	१०६
	नवम्बर	१५७	१०४	१४८	१०६
	डिसम्बर	१५७	१०३	१४९	१०५
१९५३	जनवरी	१५८	१०३	१५०	१०५
	फरवरी	१५६	१०४	१४८	१०५
	मार्च	१५७	१०५	१५०	१०५
	अप्रैल	१५६	१०५	१५२	१०५
	मई	१५७	१०८	१५१	१०५
	जून	१५५	११०	१५०	१०५
	जुलाई	१५४	१११	१५०	१०६
	अगस्त	१५४	११२	१४९	१०६
	सितम्बर	१५२	११०	१४९	१०६
	अक्टूबर	१५३	१०७	१४८	१०६
	नवम्बर	१५४	१०६	१४९	१०५
	दिसम्बर	१५४	१०६	१४९	१०५

(२१) नीचे एक वस्तु के वार्षिक उत्पादन के देशनांक (१९०० = १००) दिए गए हैं।

वर्ष	वार्षिक माध्य	वर्ष	वार्षिक माध्य
१९२७	१६५	१९३९	२७०
२८	१७८	४०	३५१
२९	२३६	४१	३२०
३०	२१२	४२	३७०
३१	१८०	४३	३२५
३२	१६२	४४	३६६
३३	१८०	४५	२५६
३४	१८७	४६	३०४
३५	२१०	३७	२९१
३६	२३७	४८	२७७
३७	२०३	४९	२७४
३८	२१५	५०	२७२

इनको प्रांकित करिये (एम० ए०, इलाहाबाद, १८५४)

(२२) निम्नलिखित सामग्री को बिन्दुरेखीय रूप में प्रस्तुत करिये।

वर्ष	जन्मार्घ	वर्ष	जन्मार्घ
१९१७	३०.९	१९२८	२६·४
१८	३०.२	२९	२४·७
१९	२९.१	३०	२४·१
२०	३१.४	३१	२३·१
२१	३३.४	३२	२३·७
२२	३०.२	३३	२२·६
२३	३०.४	३४	२३.६
२४	३१·०	३५	२३·०
२५	२९.०	३६	२२.०
२६	२७.९	३७	२२·६
२७	२७.७	३८	२२·९

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९५१)

(२३) निम्नलिखित सारणी में भारतवर्ष (अविभाजित) के, १९२०–२१ तथा १९२१–२२ में, आयात और निर्यात का मूल्य (करोड़ रुपयों में) दिया हुआ है:—

माह	१९२०–२१		१९२१–२२	
	आयात	निर्यात	आयात	निर्यात
अप्रैल	२२	२८	२६	१८
मई	२४	२८	२१	२०
जून	२६	२३	१९	१७
जुलाई	२८	२१	१८	१७
अगस्त	३१	२०	२१	२०
सितम्बर	२९	२२	२०	२०
अक्टूबर	३२	२१	२३	१८
नवम्बर	३२	१९	२६	२०
दिसम्बर	३२	२०	२३	२२
जनवरी	३१	१९	२८	२३
फरवरी	२५	१८	२०	२२
मार्च	२४	१९	२१	२८

उक्त सामग्री का एक ग्राफ-पत्र में प्रांकण कीजिए तथा व्यापार आधिक्य (balance of trade) को दिखाइए। (बी० काम०, इलाहाबाद, १९३८)

(२४) निम्नलिखित सारणी का अध्ययन कीजिए, तथा भारतवर्ष (अविभाजित) में खाद्यान्नों के शुद्ध-प्रदाय (net supply) तथा वयस्क-जनसंख्या को दिखाते हुए छेदा स्केल पर एक विन्दु रेख खींचिए।

वर्ष	खाद्यानों का उत्पादन (००० टनों में)	बीज तथा क्षेप्यक (wastage) (०००, टनों में)	शुद्ध आयात (+) या शुद्ध निर्यात (–) (००० टनों में)	वयस्क जनसंख्या (०००में)
१९३५–३६	५४,१७७	६,३२२	+१,३९३	२९०,८४६
१९३६–३७	५९,५७८	७,६४५	+१,२४५	२९४,९१७
१९३७–३८	५८,७३९	७,३४७	+ ६३०	२९८,९८७
१९३८–३९	५४,४६८	६,८०९	+१०४४	३०३,०५८
१९३९–४०	५७,२४४	७,१५६	+ २२२१	३०७,१२८
१९४०–४१	५४,८०८	६,८५१	+ ९६३	३११,१९८
१९४१–४२	५६,५५०	७,०६९	+ ४३२	३१५,२६९
१९४२–४३	५८,७२६	७,३४१	+ २९२	३१९,३९१
१९४३–४४	६२,९२५	७,८६५	+ २९८	३२३,४१०
१९४४–४५	५९,५२७	७,४८१	+ ६९३	३२७,४८१

(बी० कॉम, इलाहाबाद, १९४६)

(२५) एक प्राकृत स्केल के ऊपर अनुपातिक स्केल के क्या लाभ हैं।
निम्नलिखित सामग्री का छेदा स्केल पर विन्दुरेखीय रूप में प्रांकण कीजिए।

वर्ष	कुल नोटों की संख्या (करोड़ रुपयों में)	नोट प्रचलन में (करोड़ रुपयों में)
१९३३–३४	१७७	१६७
१९३४–३५	१८६	१७२
१९३५–३६	१९६	१६७
१९३६–३७	२०८	१९२
१९३७–३८	२१४	१८५
१९३८–३९	२०७	१८७
१९३९–४०	२५२	२३७
१९४०–४१	२६९	२५८
१९४१–४२	४२१	४१०
१९४२–४३	६५०	६२५

(बी० कॉम०, नागपुर, १९४३)

(२६) निम्नलिखित सारणी में बैंक आफ इंगलैण्ड के द्वारा वैदेशिक-लेखे पर बेचे गये कुल सोने का मूल्य दिया हुआ है। सामग्री का प्रांकण छेदा-स्केल पर विन्दु रेखीय रूप में कीजिए।

वर्ष	(०००, पौंडों में)
१९१०	१४,४८८
१९११	८,२२८
१९१२	९,६७०
१९१३	७,९४३
१९१४	८,०२७
१९१५	४३,०७६
१९१६	२,३६०

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९३५)

(२७) भारतवर्ष (अविभाजित) में, नं० १ रेलवे के कर्मकरण (working) के परिणामों को विन्दु रेख द्वारा प्रदर्शित करिये। इस पर अपने विचार भी प्रकट करिये।

	(दस लाख पौंडों में)	
	लागत पूँजी	सकल आय
१९२३–२४	४६४	७०
१९२४–२५	४७३	७४
१९२५–२६	४८७	७३
१९२६–२७	५०५	७२
१९२७–२८	५०४	८६
१९२८–२९	५९९	८६
१९२९–३०	६१७	८४
१९३०–३१	६२७	७३
१९३१–३२	६३१	७१
१९३२–३३	६३८	७०
१९३३–३४	७३५	७२

(बी० कॉम०, आगरा, १९४०)

(२८) निम्नलिखित सारणी में विभिन्न वर्षों में भारत (अविभाजित) की जनसंख्या दी हुई हैं। जनसंख्या की एक अवधि से दूसरी अवधि में अनुपाती वृद्धि को एक विन्दुरेख द्वारा दिखाइए।

वर्ष	जन-संख्या (०००,०००, छोड़ दिए गए हैं)
१८७२	२१०
१८८१	२५०
१८९१	२९०
१९०१	२९५
१९११	३१५
१९२१	३२०
१९३१	३५०
१९४१	३९०

(बी० कॉम०, नागपुर, १९५२)

(३०) निम्नलिखित बंटन से जो कि मजदूरों के एक समूह की मासिक मजदूरी बतलाता है संचयी बारंबारता वक्र बनाइये और (अ) भूयिष्ठक (ब) मध्यका तथा (स) दोनों चतुर्थक का मूल्य ज्ञात कीजिये।

मजदूरी (रुपयों में)	मजदूरों की संख्या
२०–	८
२१–	१०
२२–	११
२३–	१६
२४–	२०
२५–	२५
२६–	१५
२७–	९
२८–२९	६

(आई० ए० एस० १९५०)

(३१) नीचे सामान्य अंग्रेजी के २० विद्यार्थियों द्वारा पाये गये अंक दिये हैं

३०, २६, ३१, २०, ३३, ४०, ७, ३६, २८, १५

१८, २४, २२, २१, २८, २२, २५, ४६, २९, २७

इस सामग्री का निरूपण संचयी बारंबारता वक्र द्वारा कीजिये। प्रथम तथा तृतीय चतुर्थक और मध्यका का मूल्य बिन्दुरेख से ज्ञात कीजिये,

(पी० सी० एस० १९५३)

(३२) उत्तर प्रदेश के तीन नगरों की पिछली सात जनगणनाओं के समय की जनसंख्या नीचे (हजारों) में दी गई है।

वर्ष	झांसी	सहारनपुर	बरेली
१८९१	५४	६३	१२३
१९०१	५६	६६	१३३
१९११	७६	६३	१२९
१९२१	७५	६२	१२९
१९३१	९३	७९	१४४
१९४१	१०३	१०८	१९३
१९५१	१०६	१४३	१९५

बिन्दुरेखीय विधि से इन नगरों की सन् १९५६ की जनसंख्या का अनुमान लगाइये

(पी० सी० एस० १९५५)

—o—

अध्याय १२

काल-श्रेणी का विश्लेषण

(Analysis of Time Series)

आर्थिक समस्याओं के वास्तविक अध्ययन में काल (time) का बहुत अधिक महत्व है। किसी चल के मूल्य में काल-परिवर्तन के कारण क्या परिवर्तन होते हैं, इसे जानने की आवश्यकता कई स्थलों में पड़ती है। इसका अध्ययन काल-श्रेणी (time series) के विश्लेषण के अन्तर्गत किया जाता है। काल-श्रेणी किसी चल का दूसरे चल-काल के साथ सम्बन्ध बताती है। जैसे, विभिन्न वर्षों में किसी वस्तु के मूल्य या अलग-अलग दिनों में किसी स्थान का तापमान, या विभिन्न महीनों में किसी वस्तु के उत्पादन की राशि आदि। सारणी संख्या १ में एक काल्पनिक काल-श्रेणी दी गई है जिसका चित्रण चित्र सं० १ में किया गया है।

इस प्रकार की जो सामग्री उपलब्ध है वह कई प्रकार के प्रभावों के कारण होती है। जैसे किसी वस्तु के मूल्यों में काल के साथ होने वाले परिवर्तन कई कारणों से हो सकते हैं। लोगों की रुचि बदल गई हो, जनसंख्या बढ़ गई हो, उत्पादन-लागत कम हो गई हो, लोगों की आय बढ़ गई हो आदि। इन प्रभावों की परस्पर-क्रिया (inter-action) के कारण चल के मूल्य में परिवर्तन होता है। अगर ये प्रभाव अपरिवर्ती होते तो चल के मूल्यों में भी किसी प्रकार का परिवर्तन न होता वह हमेशा एक-सा रहता। अगर इनके प्रभावों के संतुलन में किसी प्रकार से एकाएक परिवर्तन हो जाता और फिर किसी प्रकार का परिवर्तन न होता तो कुछ समय बाद जब इनकी परस्पर-क्रिया प्रतिक्रिया समाप्त हो जाती, चल के मूल्य में किसी प्रकार का परिवर्तन न होता। इस प्रकार चल के मूल्य में एकाएक परिवर्तन होता और फिर वह समान रहता। पर ऐसा होता नहीं है। वास्तविकता इससे कहीं अधिक जटिल है। इन प्रभावों में होने वाले परिवर्तन कभी रुकते नहीं हैं। वे होते रहते हैं और इनके परिणाम-स्वरूप चल के मूल्यों में भी परिवर्तन होते रहते हैं। इन प्रभावों के बारे में, उनकी महत्ता (magnitude) के बारे में, हम बहुधा कुछ भी नहीं जानते। इनके अस्तित्व का ज्ञान हमें चल के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों के कारण होता है। अब, अगर हम चाहें कि वस्तुस्थिति का व्यावहारिक रूप से अध्ययन करें तो हमें इस प्रकार के चल के मूल्यों में प्रभावों की महत्ता में होने वाले परिवर्तनों के कारण, होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन करना पड़ेगा। अर्थशास्त्र में इन दो प्रकार की दशाओं को—एक वह जिसमें

केवल उन स्थितियों का अध्ययन किया जाता है जिनमें प्रभावों की महत्ता में परि-वर्तन नहीं होता है और दूसरी वह जिसमें यह परिवर्तन होता रहता है—क्रमशः स्थैतिक (static) और प्रवैगिक (dynamic) दशाएँ कहते हैं। काल-श्रेणी का अध्ययन प्रवैगिक दशा को समझने के लिए किया जाता है।

जैसा कहा जा चुका है, हम इन प्रभावों को, और इनकी महत्ताओं को, पूर्णतः और ठीक-ठीक नहीं जानते । इसके अस्तित्व का विचार चल के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों के कारण आता है। इन परिवर्तनों को देखकर इन प्रभावों के परिवर्तनों को कुछ मुख्य भागों में रखा जा सकता है। ये भाग कुछ निश्चित स्वभाव वाले प्रभावों को बताते हैं। इन्हें काल-श्रेणी का संघटक (components) कहा जाता है क्योंकि इन सब में एक साथ होने वाले परिवर्तनों के कारण ही काल-श्रेणी बनती है।

ये संघटक निम्नलिखित हैं :—

(क) **दीर्घकालीन**—सुदीर्घकालीन उपनति (Secular Trend)।

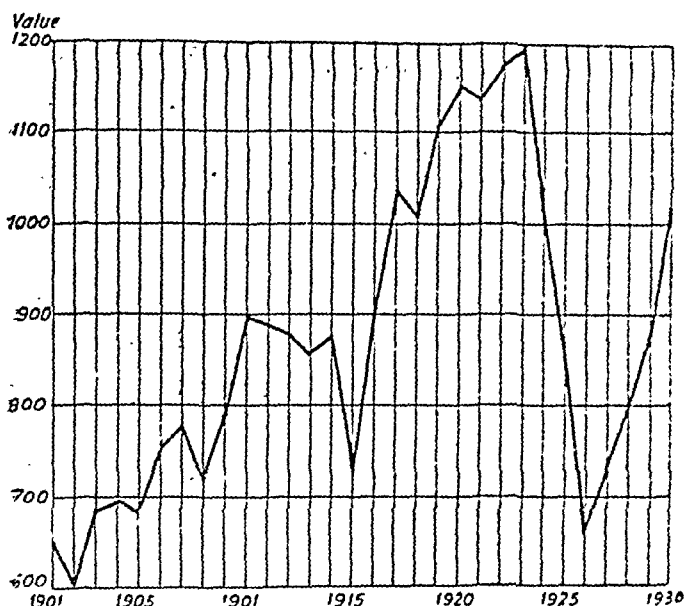
(ख) **अल्पकालीन**—(१) आर्तव विचरण (Seasonal Variation)।

(२) चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuation)।

(ग) दैव (या अनियमी) उच्चावचन (Random or irregular Fluctuations)।

आगामी अनुच्छेदों में इन पर विस्तारपूर्वक विचार किया गया है और इनमें क्या अन्तर है, यह बताया गया है।

सारणी संख्या १—विभिन्न वर्षों में चल य के मूल्य

वर्ष	य	वर्ष	य
१९०१	६५२	१९१६	९०१
०२	६०३	१७	१०४२
०३	६८४	१८	१००२
०४	६९४	१९	१११३
०५	६७९	२०	११५३
०६	७५६	२१	११३९
०७	७७६	२२	११८४
०८	७२२	२३	११९५
०९	७८१	२४	१००८
१०	८९८	२५	८४७
११	८८९	२६	६५८
१२	८७८	२७	७३५
१३	८५४	२८	७८६
१४	८७९	२९	८६७
१५	७३५	३०	१०२०

चित्र १

(१) सुदीर्घकालीन उपनति (Secular Trend)—सारणी नं० १ की पूरा सामग्री का अध्ययन करने से यह मालूम होगा कि चल य के मूल्य सामान्यतः बढ़ते हैं। वैसे अगर इस सारणी का छोटे-छोटे भागों में अध्ययन किया जाय तो मूल्य घटते भी हैं और बढ़ते भी हैं। इसलिए यह कहा जा सकता है कि य के मूल्यों की बढ़ने की उपनति या प्रवृत्ति है। सामान्यतः बढ़ने की प्रवृत्ति को दिखाने वाले संघटक को सुदीर्घकालीन उपनति कहा जाता है। जिस प्रकार किसी चल के मूल्यों के दीर्घ काल में बढ़ने की प्रवृत्ति हो सकती है उसी प्रकार कुछ में घटने की प्रवृत्ति दिखाने वाले संघटक को भी सुदीर्घकालीन उपनति कहा जाता है। सुदीर्घकालीन उपनति ऐसे प्रभावों के कारण होती है जो पर्याप्त समय तक एक ही प्रकार के रहते हैं। जैसे जन-संख्या के बढ़ते रहने का प्रभाव वस्तुओं के मूल्यों पर पड़ता है। जनसंख्या का बढ़ना या घटना काफी लम्बी अवधि तक चलती रहती है।

(२) आर्तव विचरण (Seasonal Variations)—ये विचरण ऐसे प्रभावों के कारण होते हैं जिनकी महत्ताएँ नियमित रूप से बढ़ती और घटती रहती हैं। ये विचरण प्रति घण्टे, प्रति दिन, प्रति मास हो सकते हैं, जैसे, फसल कटने के समय अन्न सस्ते हो जाते हैं। इनके कारण श्रेणी में ऊपर-नीचे होने वाले परिवर्तन होते हैं।

(३) **चक्रीय उच्चावचन** (Cyclical Fluctuations)—ये परिवर्तन भी आर्वातिक होते हैं, पर ये एक वर्ष से अधिक के अन्तर में आते हैं। पर चूँकि इनकी अवधि (period) निश्चित नहीं होती इसलिए इन्हें आर्वातिक उच्चावचन न कह कर चक्रीय उच्चावचन कहा जाता है।

(४) **दैव या अनियमी उच्चावचन** (Random or Irregular Fluctuations)–ऐसे सब प्रभावों को जो उपर्युक्त वर्गों के अन्तर नहीं आते अनियमी या दैव उच्चावचन कहा जाता है। चूँकि इनके प्रकट होने की कोई निश्चित अवधि नहीं होती और इनका होना आकस्मिक होता है इसलिए इन्हें अनियमी या दैव उच्चावचन कहा जाता है। ऐसे आकस्मिक प्रभाव कई हो सकते हैं जैसे युद्ध, बाढ़ आदि। कभी-कभी ये बहुत महत्वपूर्ण हो सकते हैं और चक्रीय उच्चावचनों को जन्म भी दे सकते हैं। पर चूँकि ये आकस्मिक और अनियमी होते हैं, इसलिए इन्हें बहुधा काल-श्रेणी से अलग नहीं किया जा सकता। इसलिए इनपर कम ध्यान दिया जाता है।

काल-श्रेणी के इन संघटकों का अध्ययन अलग-अलग करने के महत्व को कम नहीं किया जा सकता। उद्योगियों को न केवल अल्पकालीन परिवर्तनों पर ही विचार करना पड़ता है बल्कि दीर्घकालीन प्रवृत्ति को भी ध्यान में रखना पड़ता है। पर ऐसा करने में कई कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है। अगर यह संभव हो सका होता कि प्रत्येक प्रकार के संघटक के कारणों का अलग-अलग, बिना अन्य संघटकों के प्रभाव पड़े ही, अध्ययन किया जाय, तो कोई कठिनाई नहीं होती क्योंकि तब सांख्यिक, अन्य वैज्ञानिकों की भाँति ऐसे प्रयोग कर सका होता जिसमें अन्य प्रभावों को नियन्त्रण में रखकर केवल उन प्रभावों को लगाया जाता जिनके कारण एक निश्चित प्रकार का संघटक बनता है। पर साँख्यिक यहाँ पर असहाय है—वह नियंत्रित प्रयोग कर ही नहीं सकता। अतएव उसे निरसन (elimination) के द्वारा संघटकों का अध्ययन करना पड़ता है। आगामी अनुच्छेदों में इसी रीति के द्वारा विभिन्न संघटकों को ज्ञात करने की रीतियाँ बताई गई हैं।

सुदीर्घकालीन उपनति
(Secular Trend)

सुदीर्घकालीन उपनति का अध्ययन करने के दो कारण हो सकते हैं। पहला यह कि हम यह जान सकें कि चल के मूल्य दीर्घ-काल में किस प्रकार व्यवहार करते हैं। इसमें उद्देश्य यह रहता है कि अन्य प्रकार के संघटकों का जहाँ तक हो सके निरसन (elimination) कर दिया जाय। दूसरा उद्देश्य यह है कि इस संघटक से, जो चल के मूल्य की सामान्य प्रवृत्ति बताता है, चल के मूल्यों में होने वाले विच-

रणों को नापा जा सके, अर्थात् चक्रों (cycles) का अध्ययन किया जा सके। सुदीर्घकालीन उपनति को जानने के लिए साधारणतः निम्नलिखित रीतियों का उपयोग किया जाता है।

(१) निरीक्षण द्वारा उपनति-अन्वायोजन (Trend fitting by inspection)।

(२) चल-माध्य की रीति (Moving Average Method)।

(३) अल्पतम-वर्ग-रीति (Method of Least Squares)।

निरीक्षण द्वारा उपनति अन्वायोजन
(Trend fitting by inspection)

इस रीति में सामग्री प्रांकित कर ली जाती है और सिर्फ हाथ से इन बिन्दुओं पर कोई वक्र अन्वयोजित कर लिया जाता है; इस वक्र के द्वारा अन्य संघटकों का निरसन किया जाता है।

सरलता के लिए यह रीति सबसे अच्छी है। साथ ही साथ इस प्रकार उपनति-रेखा शीघ्रतापूर्वक जानी जा सकती है। अन्य रीतियां में जटिल गणित का उपयोग करना पड़ता है पर इसमें गणना की कोई आवश्यकता नहीं रहती। पर इस रीति का सबसे बड़ा दोष, जो इस प्रकार की सब रीतियां में (जिनमें निर्णय व्यक्तिगत होता है) पाया जाता है, यह है कि उपनति रेखा सांख्यिक की अभिनति (bias) से प्रभावित हो सकती है। इसलिए एक ही सामग्री के लिए विभिन्न सांख्यिकों द्वारा प्राप्त किए गए परिणाम अलग-अलग हो सकते हैं।

चल-माध्य की रीति
(Method of Moving Averages)

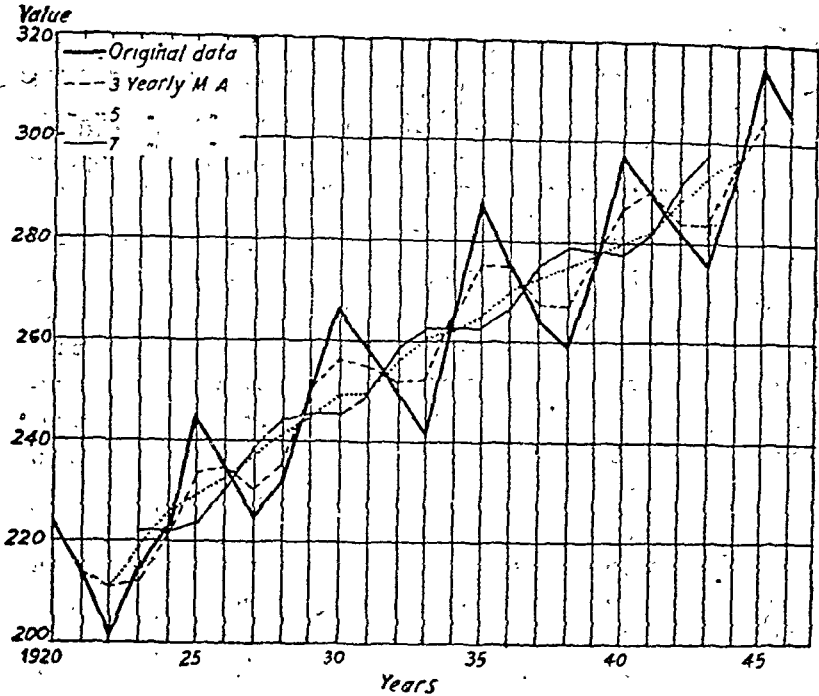
उपनति-अन्वायोजना की दूसरी सरल रीति चल-माध्य की है। चल-माध्य की गणना करने में सबसे पहले इसकी अवधि निकालनी पड़ती है। अवधि निकालने का अर्थ यह है कि कितने अनुगामी पदों का माध्य निकाला जायगा। मान लीजिए यह निश्चय किया गया कि पांच अनुगामी पदों का माध्य निकाला जायगा, अर्थात् चल-माध्य की अवधि पांच होगी, तो सर्वप्रथम पहले पांच (१ से ५ तक) पदों का समान्तर माध्य लिया जायगा और इसे तीसरे पद के आगे रख दिया जायगा; फिर २ से ६ तक के पदों का माध्य लिया जायगा जिसे चौथे पद के आगे रखा जायगा। इसी प्रकार तब तक चल-माध्य निकालते चले जाते हैं जब तक अन्तिम पांच पदों का चल-माध्य नहीं निकाल लिया जाता।

प्रश्न यह उठता है कि चल-माध्य की अवधि किस प्रकार निश्चित की जाय। अर्थात् यह कैसे जाना जाय कि दी हुई सामग्री के लिए तीन-वर्षीय चल-माध्य लिया जाय, या पाँच-वर्षीय चल-माध्य लिया जाय, या नौ-वर्षीय या अन्य कोई। यह समस्या वहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि इसी पर चल-माध्य की रीति द्वारा उपनति-अन्वायोजन की सफलता निर्भर रहती है। यहाँ पर यह ज्ञातव्य है कि उतनति रेखा निकालने में इस वात का ध्यान रखना पड़ता है कि अन्य प्रकार के विचरण या उच्चावचनों का निरसन कर दिया जाय या उन्हें न्यूनतम कर दिया जाय। वस्तुतः चल-माध्य की रीति में यही किया जाता है। अव ये उच्चावचन या विचरण केवल उसी दशा में न्यूनतम होंगे जब पूरी काल-श्रेणी की अवधि के बरावर चल-माध्य की अवधि ली जाय। ऐसा करने से उपनति से अधिक वाले मूल्य इससे कम वाले मूल्यों का निरसन कर देंगे और उपनति रेखा ज्ञात हो जायगी। काल-श्रेणी में किसी चक्र की अवधि निकाली जा सकती है। किसी चक्र की अवधि उसके दो प्रकार के अनुगामी (consecutive) विन्दुओं की दूरियों के वरावर होती है। जैसे अगर हम दो ऐसे अनुगामी विन्दुओं को जान लें जब काल-श्रेणी में चल का मूल्य अधिकतम था, तो इन विन्दुओं के कालान्तर को चल की अवधि कहा जाता है। इसी प्रकार काल-श्रेणी चल के मूल्य दिखाने वाले दो अनुगामी न्यूनतम मूल्यों के बीच के कालान्तर को भी काल-श्रेणी में चक्र की अवधि कहा जायगा। यह सच है कि किसी भी काल-श्रेणी में अवधि प्रत्येक वार ठीक-ठीक वरावर नहीं रहती। पर इसका उपयोग करने से वहुत वड़े अंश तक उच्चावचनों या विचरणों का निरसन किया जा सकता है। अगर काल-श्रेणी बहुत लम्बी हो तो दो या अधिक अवधियों का उपयोग भी किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरण में इस रीति का उपयोग करके उपनति-रेखा निकालने की रीति वताई गई है।

उदाहरण १

कॉलम १ और २ में दी गई सामग्री के लिए तीन-वर्षीय, पाँच-वर्षीय सात-वर्षीय चल-माध्य निकाले गए हैं। ये चल-माध्य कॉलम ३,४ और ५ में दिए गए हैं। चित्र संख्या २ में इनका प्रांकण किया गया है।

सारणी संख्या २

(१) वर्ष	(२) वार्षिक अंक	(३) तीन-वर्षीय चल-माध्य	(४) पांच वर्षीय चल-माध्य	(५) सात वर्षीय चल-माध्य
१९२०	२२५	—	—	—
२१	२१३	२१३	—	—
२२	२०१	२१०	२१३·५	—
२३	२१५	२१३	२१९	२२२
२४	२२३	२२१	२२४	२२२
२५	२४५	२३४	२२९	२२५
२६	२३५	२३५	२३२	२३२
२७	२२५	२३१	२३७	२३९
२८	२३३	३३६	२४१	२४८
२९	२४९	२४९	२४६	२४५
३०	२६५	२५७	२५१	२४६
३१	२५९	२५७	२५२	२५२
३२	२४९	२५०	२५६	२५९
३३	२४१	२५२	२६०	२६३
३४	२६५	२६४	२६३	२६३
३५	२८५	२७५	२६६	२६३
३६	२७५	२७५	२७०	२६६
३७	२६५	२६६	२७२	२७४
३८	२५९	२६६	२७४	२७८
३९	२७५	२७७	२७७	२७७
४०	२९७	२८७	२८०	२७३
४१	२८९	२८९	२८३	२८२
४२	२८१	२८२	२८७	२९०
४३	२७५	२८३	२९१	२९४
४४	२९५	२९५	२९४	—
४५	३१५	३०५	—	—
४६	३०५	—	—	—

चित्र २

उपर्युक्त सारणी में चल-माध्य निकालने के लिए सरल रीति का उपयोग किया गया है। जैसा बताया जा चुका है, अगर चल-माध्य की अवधि ७ वर्ष है तो सर्वप्रथम पहले सात पदों के मूल्यों को जोड़ा जाता है और इसे ७ से विभाजित किया जाता है। इस प्रकार प्राप्त संख्या चौथे पद के सम्मुख रखी जाती है। फिर दूसरे से आठवें तक के पदों का मूल्य लिया जाता है और इसे फिर सात से विभाजित किया जाता है। अगर इस प्रकार गणना की जाय तो चल-माध्य निकालना बहुत कठिन और असुविधाजनक हो जायगा। वास्तव में चल-माध्य की गणना इस प्रकार नहीं की जाती। इसकी गणना निम्नलिखित रीति से की जाती है।

जब हम पहले सात पदों का चल-माध्य लेते हैं तो सबको जोड़कर सात से विभाजित करना पड़ता है। पर दूसरे सात पदों (दूसरे से आठवें तक के पदों) का चल-माध्य लेने में इन्हें जोड़ना और फिर उसे सात से विभाजित करना आवश्यक नहीं है क्योंकि जब हम दूसरे सात पद लेते हैं तो वस्तुतः हम पहले सात पदों के समूह के पहले पद को छोड़ रहे हैं और एक नया, आठवाँ पद जोड़ रहे हैं। अब चल माध्य में इस छोड़ने और जोड़ने के कारण होने वाला परिवर्तन इन दो पदों के मूल्यों से हो

जाता है। रीति यह है कि आठवें पद के मूल्य में से पहले पद के मूल्य को घटाकर प्राप्त हुए अन्तर को सात से विभाजित कर दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त भागफल को अगर पहले समूह के चल-माध्य में जोड़ दिया जाय तो दूसरे समूह के लिए चल-माध्य के मूल्य का ज्ञान हो जायगा। यह बात निम्नलिखित उदाहरण में स्पष्ट की गई है।

उदाहरण २

सारणी संख्या २ में दी गई सामग्री के लिए सात-वर्षीय चल-माध्य ज्ञात करना है।

पहले सात पदों का योग = १५५७

$$\therefore \text{चल माध्य} = \frac{१५५७}{७} = २२२$$

दूसरे सात पदों का योग निकालने के पहले सात पदों के योग में से पहले पद को घटा दिया जाता है और आठवें पद को जोड़ दिया जाता है। इन दो पदों का अन्तर कुल जोड़ में होने वाले अन्तर को बताता है। इस अन्तर को ७ से विभाजित करने से माध्य में होने वाला अन्तर ज्ञात हो जाएगा।

अब आठवाँ पद−पहला पद = २२५ − २२५ = ०

$\therefore$ चल-माध्य = २२२ + $\frac{०}{७}$ = २२२

इसी प्रकार तीसरा चल-माध्य निकालने के लिए दूसरे चल-माध्य में नवें और दूसरे पदों के अन्तर को सात से विभाजित करके प्राप्त होने वाली राशि जोड़ दी जायगी।

$$\therefore \text{तीसरा चल-माध्य} = \text{दूसरा चल-माध्य} + \frac{२३३ - २१२}{७}$$

$$= २२२ + ३ = २२५$$

चल-माध्य निकालने में गुणोत्तर माध्य का भी उपयोग किया जाता है। जो बातें समान्तर माध्य के लिए सही हैं वे ही गुणोत्तर माध्य के लिए भी ठीक हैं। अन्तर केवल माध्य निकालने की रीति का है।

अगर चल-माध्य की गणना विषम-अवधि (odd period) के बदले सम-अवधि (even period) के लिए करनी हो तो चल-माध्यों को बीच के दो पदों के मध्य में रखना चाहिए। जैसे कि यदि चल-माध्य की अवधि ६ वर्ष है तो पहले ६ वर्षों का चल-माध्य तीसरे और चौथे वर्ष के बीच रखा जाएगा और दूसरे से सातवें वर्ष का चल-माध्य चौथे और पाँचवें वर्ष के मध्य में रखा जायगा।

इसके पश्चात् यदि इन चल-माध्यों का समान्तर माध्य निकाला जाय तो यह माध्य चौथे वर्ष के सामने रखा जायगा। इसी प्रकार अन्य वर्षों के लिए भी चल-माध्य निकाले जा सकते हैं।

चल माध्य रीति का सिद्धान्त

(Theory of Moving Average Method)

इस रीति के सिद्धान्तों और इसके लक्षणों को संक्षेपतः निम्नलिखित रूप में कहा जा सकता है :–

इसका सिद्धान्त यह है कि चल-माध्य उच्चावचनों का सरलन (smoothing) करता है। पर ऐसा तब ही होगा जब इसकी अवधि काल-श्रेणी की अवधि के बराबर या उसके और किसी पूर्णाङ्क के गुणनफल के बराबर हो। यह बात चित्र संख्या (२) से स्पष्ट हो जायगी। उदाहरण (२) में दी गई काल-श्रेणी के लिए अवधि ५ वर्ष है। जब चल-माध्य की अवधि काल-श्रेणी की अवधि से कम होगी तो चल-माध्य रेखा अपेक्षाकृत कम सरलित होगी। अगर यह अवधि काल-श्रेणी की अवधि से अधिक, पर उसके किसी पूर्णाङ्क बहुगुण (integral multiple) से कम हो (अर्थात् दो पूर्णांक बहुगुणों के बीच में हो), तो चल-माध्य रेखा में होने वाले परिवर्तन काल-श्रेणी में होने वाले उच्चावचन के विलोम-क्रम (inverse order) में होंगे। चित्र सं० २ में तीन-वर्षीय, पाँच-वर्षीय और सात-वर्षीय चल-माध्य-रेखाओं को देखकर यह स्पष्ट हो जायगा। पर चल-माध्य निकालने के लिए जितने अधिक संख्या में पद लिए जाएँगे, चल-माध्य-रेखा उतनी ही अधिक सरलित होगी (देखिए चित्र संख्या २)। अधिक संख्या में पदों को लेने का एक नुकसान यह है कि जितने अधिक पद लिए जाएँगे, उतने ही अधिक चरम-सीमाओं के पदों के लिए उपनति मूल्य (trend values) नहीं जाना जा सकेगा। जैसे पाँच-वर्षीय चल-माध्य में दो आरम्भ के तथा दो अन्त के पदों के उपनति मूल्य मालूम नहीं होंगे, सात-वर्षीय चल-माध्य में तीन आरम्भ के और तीन अन्त के पदों के उपनति मूल्य नहीं होंगे।

अल्पतम-वर्ग-रीति

(Method of Least Squares)

सुदीर्घकालीन-उपनति जानने की सबसे परिष्कृत रीति अल्पतम-वर्ग-रीति है। इस रीति में सर्वोत्तम अन्वायुक्त रेखा (line of best fit) निकाली जाती है,

जो उपनति बताती है। इस रीति द्वारा उपनति रेखा जानने के लिए निम्नलिखित बातों का ध्यान रखा जाता है :—

(१) उपनति-रेखा से अन्य बिन्दुओं की शीर्ष-दूरियों का योग शून्य हो। अर्थात् उपनति रेखा से बिन्दुओं के विचरणों का योग शून्य हो।

(२) उपनति रेखा से लिए गए विचरणों के वर्गों का योग न्यूनतम हो। चूँकि इसमें विचरणों के वर्गों का योग किया जाता है, इसीलिए इसे अल्पतम-वर्ग-रीति कहा जाता है।

इस रीति में पहले यह निश्चित कर लेना पड़ता है कि उपनति-रेखा कौन-सा वक्र होगा। वह सरल रेखा हो सकती है या कोई एकेन्द्रिक वक्र (parabolic curve) यह निश्चित करने के बाद उसके समीकार (equation) को जान लिया जाता है, जो उपनति रेखा को बताता है। इसके सैद्धान्तिक पक्ष को अच्छी तरह स्पष्ट करने के लिए, पहले निम्नलिखित उदाहरण द्वारा इसका उपयोग करने की रीति दी गई है।

उदाहरण ३

निम्नलिखित सारणी में विश्व का सोने का उत्पादन दिया गया है। इसकी उपनति-रेखा ज्ञात करनी है।

सारणी संख्या ३

वर्ष	उत्पादन (करोड़ रुपयों में)
१९४५	१२·७
१९४६	१०·१
१९४७	१३·०
१९४८	१३·२
१९४९	१२·६
१९५०	१४·२
१९५१	१३·७

अगर उपनति-रेखा एक सीधी रेखा मानी जाय, तो इसको इस रीति द्वारा निम्न-लिखित प्रक्रिया अपना कर जाना जाएगा।

वर्ष (year) (१)	उत्पादन (करोड़ औंसों में) (production in crore ounces) (२)	मध्य-वर्ग से विचलन (deviation from middle year) (३)	विचलनों का वर्ग (deviations squared) (४)	कॉलम २ × कॉलम ३ (col. 2 × col. 3) (५)	उपनति-कोटि (trend ordinate) (६)
१९४५	१२·७	—३	९	—३८·१	१२·८ — ३ × ·३८ = ११·६६
१९४६	१०·१	—२	४	—२०·२	१२·८ — २ × ·३८ = १२·०४
१९४७	१३·०	—१	१	—१३·०	१२·८ — १ × ·३८ = १२·४२
१९४८	१३·२	०	०	०	१२·८ + ० × ·३८ = १२·८०
१९४९	१२·६	+१	१	+१२·६	१२·८ + १ × ·३८ = १३·१८
१९५०	१४·२	+२	४	+२८·४	१२·८ + २ × ·३८ = १३·५६
१९५१	१३·७	+३	९	+४१·१	१२·८ + ३ × ·३८ = १३·९४
	८९·५		२८	+१०·८	

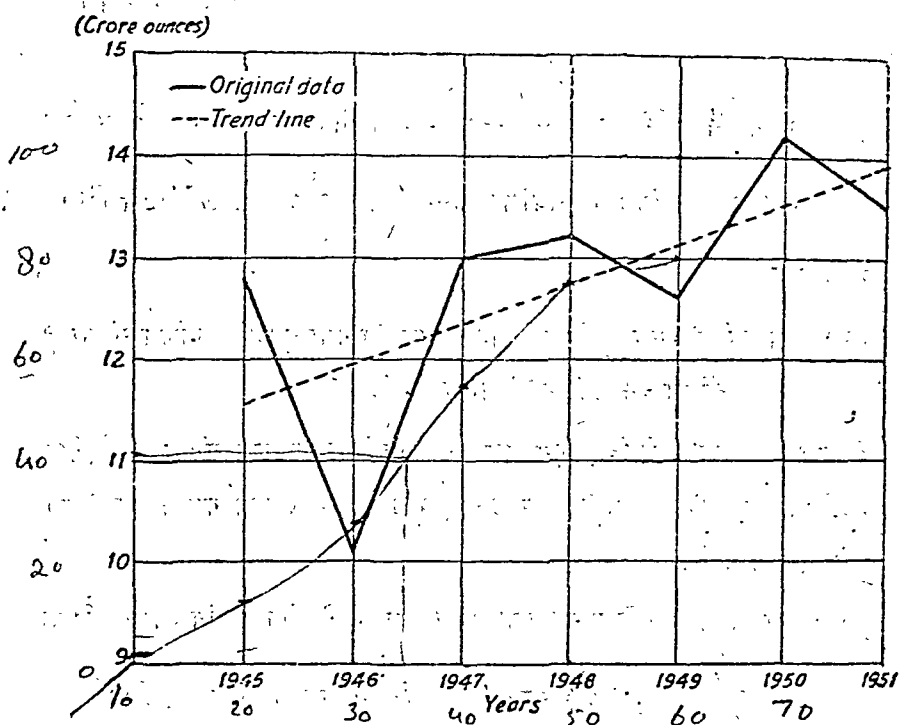
उपनति रेखा के कॉलम ६ में दिए गये मूल्य निम्नलिखित रूप से ज्ञात किए गये हैं।

(१) उत्पादन संख्याओं का समान्तर मध्यक निकाला गया। यह मध्यक $= \frac{८९\cdot५}{७} =$ १२·८ करोड़ औंस। यह सर्वोत्तम अन्वायुक्त रेखा (line of best fit) का मध्य विन्दु है।

(२) मध्य वर्ष से अन्य वर्षों का विचलन निकाला गया है। यह कॉलम संख्या ३ में है और इन विचलनों का वर्ग कॉलम संख्या ४ में दिया गया है।

(३) कॉलम संख्या २ में दिए गये उत्पादन अंकों को कॉलम संख्या ३ में दिए हुए विचलनों से गुणा किया गया है और उनका योग मालूम किया गया। यह कॉलम संख्या ५ में दिया गया है।

(४) कॉलम संख्या ५ के योग को कॉलम संख्या ४ के योग से विभाजित किया गया। यह संख्या $\left(\frac{१०\cdot८}{२८} = \cdot३८\right)$ उपनति की प्रति वर्ष माध्य वृद्धि (average increase) बताती है।

(५) कॉलम संख्या २ का समान्तर मध्यक (१२·८) मध्य वर्ष अर्थात् १९४८ के सामने कॉलम संख्या ६ में रखा गया है। उपनति की अन्य वर्षों की कोटि मालूम करने की रीति कॉलम संख्या ६ में स्पष्ट है। मध्य वर्ष से पहले वर्षों की उपनति कोटि १२·८ से कम और मध्य वर्ष से बाद वाले वर्षों की उपनति कोटि १२·८ से अधिक होगी और प्रति वर्ष इन संख्याओं में ·३८ (करोड़ औंस) का अन्तर होगा। यदि माध्य वार्षिक वृद्धि (annual average increase) जो कि इस उदाहरण में +·३८ है, ऋणात्मक होती तो मध्य-वर्ष से पहले वर्षों का उपनति मूल्य मध्य-वर्ष के मूल्य से अधिक होता और बाद वाले वर्षों का कम। इस श्रेणी और उपनति रेखा को चित्र-संख्या ३ में दिखाया गया है।

चित्र ३

अल्पकालीन उच्चावन

(Short-period fluctuations)

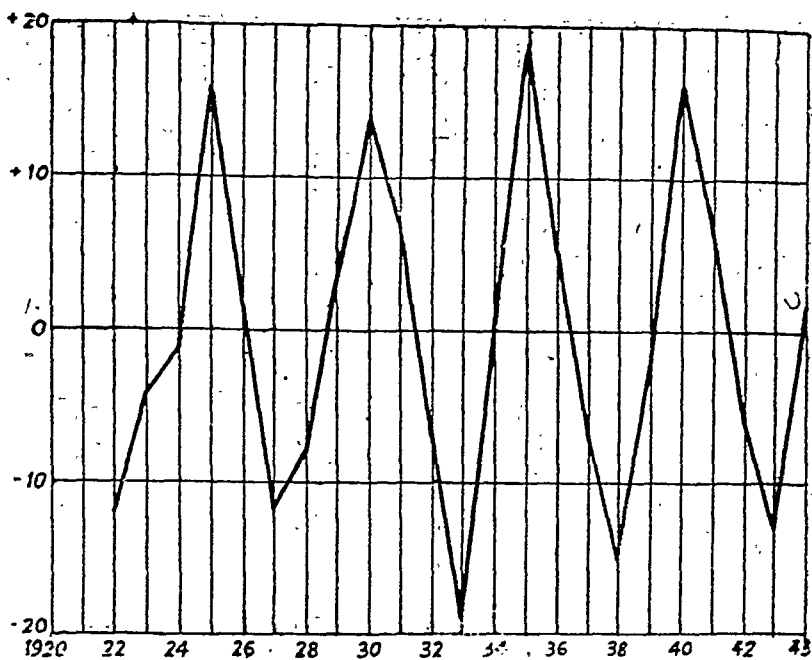
अल्पकालीन उच्चावचनों का पृथक्करण करने के लिए श्रेणी में से सुदीर्घकालीन-उपनति का निरसन कर दिया जाता है। जैसा बताया जा चुका है, प्रत्येक काल श्रेणी के चार संघटक हो सकते हैं, जिनके योग से वह बनती है। अगर इसमें से सुदीर्घ-कालीन उपनति-मूल्य घटा दिए जायँ तो जो बच जायगा इस उपनति मूल्य से सामग्री के अल्पकालीन उच्चावचनों को बताएगा।

सारणी सं० २ में दी गई सामग्री के लिए अल्पकालीन उच्चावचनों की गणना उदाहरण (४) में दी गई है।

निम्नलिखित सारणी में वर्षों, वार्षिक अंकों और संगत चल माध्यों को दिखाया गया है। (देखिए, सा० सं० २, कॉलम, १,२ और ४)

सारणी संख्या ४

वर्ष (१)	वार्षिक अंक (२)	पाँच वर्षीय चल-माध्य (३)	उपनति (चल-माध्य) से विचलन (कॉ २-कॉ ३) (४)
१९२०	२२५	—	—
२१	२१३	—	—
२२	२०१	२१३	—१२
२३	२०५	२१९	— ४
२४	२२३	२२४	— १
२५	२४५	२२९	+१६
२६	२३५	२३२	+ ३
२७	२२५	२३७	—१२
२८	२३३	२४१	— ८
२९	२४९	२४६	+ ३
३०	२६५	२५१	+१४
३१	२५९	२५२	+ ७
३२	२४८	२५६	— ७
३३	२४१	२६०	—१९
३४	२६५	२६३	+ २
३५	२८५	२६६	+१९
३६	२७५	२७०	+ ५
३७	२६५	२७२	— ७
३८	२५९	२७४	—१५
३९	२७५	२७७	— २
४०	२९७	२८०	+१७
४१	२८९	२८३	+६
४२	२८१	२८७	—६
४३	२७५	२९१	—१६
४४	२९५	२९४	+ १
४५	३१५	—	—
४६	३०५	—	—

कॉलम (४) में दी गई संख्याएँ कॉलम (२) में दी गई राशियों में से कॉलम (३) की राशियों को घटा कर मिली है। इनमें चिह्नों को भी रखा गया है। ये संख्याएँ अल्पकालीन प्रदोलों (oscillations) को बताती हैं। इनका चित्रण चित्र सं० (४) में किया गया है।

चित्र ४

यहाँ पर ज्ञातव्य है कि जो संख्याएँ कॉलम ४ में दी गई हैं या संलग्न चित्र में दिखाई गई हैं वे अल्पकालीन उच्चावचनों (short time fluctuations) (आर्तव और चक्रीय, दोनों), और अनियमी उच्चावचनों (irregular fluctuations) का मिश्रण है। इनमें केवल सुदीर्घकालीन उपनति (long-term trend) का निरसन किया गया है।

अल्पकालीन उच्चावचनों के विभिन्न संघटकों को काल श्रेणी का विश्लेपण करके नापने की रीतियाँ आगामी अनुच्छेदों में बतायी गयी है।

(क) आर्तव-उच्चावचन की माप (Measurement of Seasonal Fluctuations)

तीन मुख्य रीतियाँ जिनके द्वारा आर्तव उच्चावचनों की माप की जाती है, निम्नलिखित हैं :

(१) आर्तव-देशनांक की रचना करने की मासिक-माध्य रीति (method of monthly averages to compute a seasonal index)।

(२) आर्तव-देशनांक की रचना करने की चल माध्य-रीति (method of moving averages to compute a seasonal index)।

(३) शृंखलानुपातों की रीति (method of link relatives)।

(१) **पहली रीति**–इसकी प्रक्रिया के ४ भाग किए जा सकते हैं।

(अ) प्रत्येक वर्ष के लिए एक से महीनों के लिए दी गई संख्याओं का योग (मासिक योग) ज्ञात करिये। जैसे सारणी (५) में जनवरियों, फरवरियों आदि का योग कॉलम (७) में दिया गया है।

(आ) इन योगों को वर्षों की संख्या से विभाजित करिये, जिनसे जनवरी, फरवरी आदि के लिए माध्य (मासिक-माध्य) ज्ञात हो जायगा। सारणी ५ कॉलम (८)।

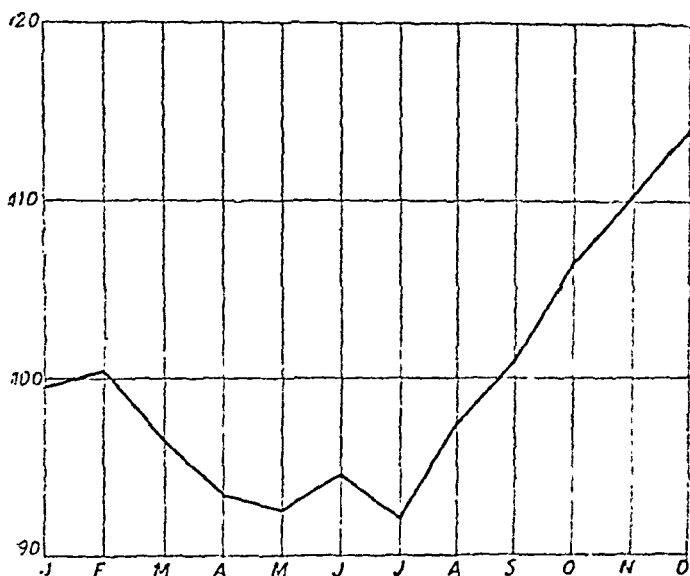
(इ) मासिक योगों के माध्य की गणना करिये। इसकी गणना या तो मासिक योगों को १२ से विभाजित करके की जा सकती है, या मासिक-माध्यों के योग को १२ से विभाजित करके। (सारणी ५ अंतिम पंक्ति)।

(ई) प्रत्येक मासिक माध्य या योग का मासिक माध्यों या योगों के माध्य से प्रतिशतता अनुपात ज्ञात करिये। मान लीजिए हमें जनवरी के लिए प्रतिशतता की गणना करनी है। यह प्रतिशतता $= \frac{\text{जनवरी के लिए मासिकमाध्य}}{\text{मासिक माध्यों का माध्य}} \times 100$

$$\text{अथवा} = \frac{\text{जनवरी के लिए मासिक योग}}{\text{मासिक योगों का माध्य}} \times 100$$

यही प्रतिशतता आर्तव-देशनांक है और आर्तव उच्चावचनों को नापती है। (सारणी ५, कॉलम ९)

सारणी संख्या ५

मास (१)	'क' का उत्पादन १९३६ (२)	१९३७ (३)	१९३८ (४)	१९३९ (५)	१९४० (६)	५ वर्षों के लिए मासिक योग (७)	पाँच वर्षीय माध्य (८)	प्रतिशतता (९)
जनवरी	१३१	१४५	२०८	२३८	२६३	९८५	१९७.०	९९.७
फरवरी	१२९	१५१	२११	२३७	२६१	९८९	१९७.८	१००.१
मार्च	१२१	१४९	२०७	२२५	२५०	९५२	१९०.४	९६.३
अप्रैल	११९	१४३	२०१	२१९	२४४	९२६	१८५.२	९३.७
मई	११३	१४९	२०१	२१२	२४०	९१५	१८३.०	९२.६
जून	११६	१५९	२०३	२०६	२५३	९३७	१८७.४	९४.८
जुलाई	११३	१५३	१९३	२०१	२५०	९१०	१८२.०	९२.१
अगस्त	१२३	१६५	२०५	२१०	२५५	९५८	१९१.६	९७.०
सितम्बर	१३०	१७३	२१०	२२०	२६९	१,००२	२००.४	१०१.४
अक्टूबर	१३३	१८३	२२१	२३७	२८५	१,०५९	२११.८	१०७.२
नवम्बर	१४५	१९७	२२३	२४१	२९०	१,०९६	२१९.२	११०.९
दिसम्बर	१४९	१९८	२२२	२६०	३००	१,१२९	२२५.८	११४.२
					योग	११,८५८	२,३७१.६	१२००.०
					माध्य	९८८	१९७.६	१००.०

चित्र ५

कॉलम ९ में दी गई संख्याएँ आर्तव उच्चावचनों के स्वभाव बताती हैं। इन्हें चित्र के रूप में रखने पर शीघ्रतापूर्वक और सरलता से आर्तव उच्चावचनों को जाना जा सकता है। अर्थात् यह जाना जा सकता है कि किस महीने में प्रदोलों की महत्ता कितनी है (देखिए चित्र सं० ५)

इस उदाहरण में केवल ५ वर्ष लिए गए हैं, पर व्यवहार में इनसे अधिक वर्ष लिए जाते हैं जिससे चक्रीय उच्चावचनों का प्रभाव आर्तव उच्चावचनों पर न पड़े।

(२) दूसरी रीति—इसकी प्रक्रिया निम्नलिखित है:

(अ) सामग्री के लिए चल माध्य ज्ञात करिये।

(आ) वास्तविक सामग्री के प्रत्येक पद को संगत माध्य की प्रतिशतता के रूप में रखिये।

(इ) इन प्रतिशतताओं को सारणी में विन्यसित करिये और प्रत्येक महीने के लिए मासिक-माध्य ज्ञात करिये।

(ई) इन मासिक माध्यों की गणना करिये।

(उ) मासिक माध्यों को, इनके माध्य को आधार मानकर बनाए गए प्रतिशतता-नुपातों के रूप में रखिये। ये प्रतिशततानुपात आर्तव-देशनांक हैं।

सारणी सं० (६) में इस रीति को स्पष्ट किया गया है:

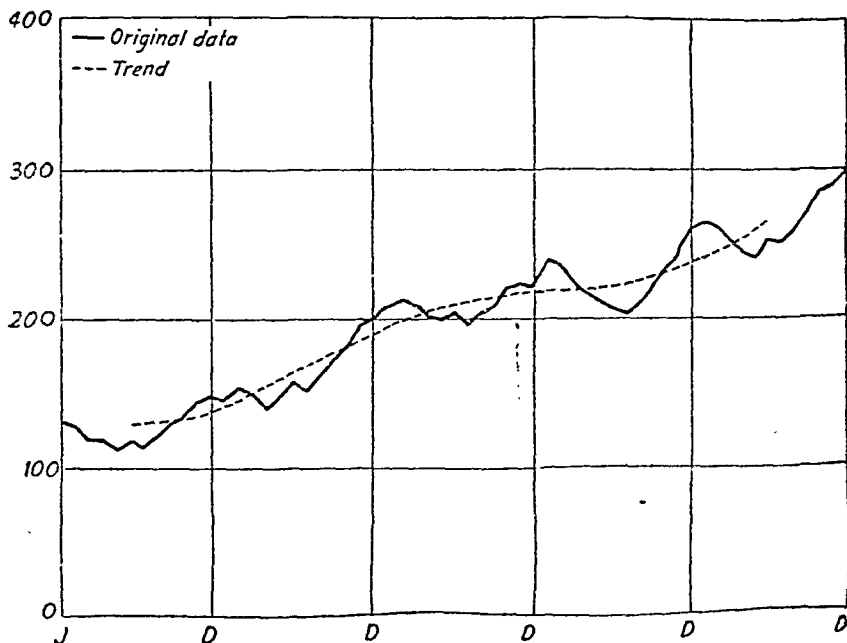
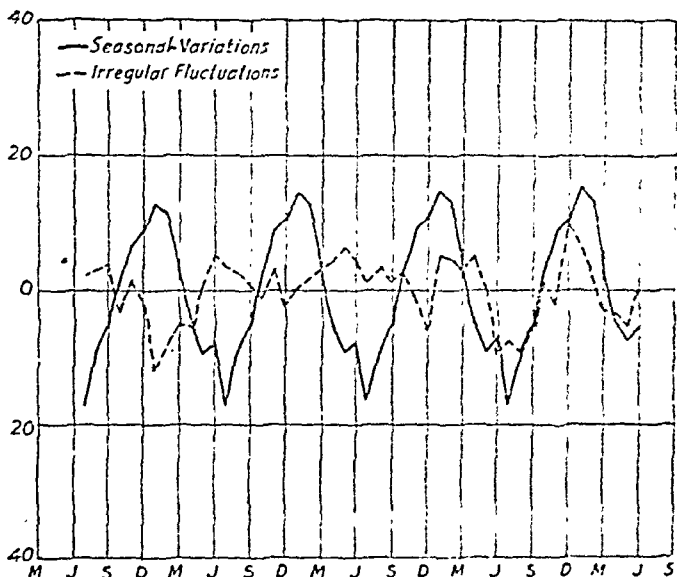
सारणी संख्या ६

वर्ष (year) मास (month) (१)	उत्पादन (Production) (२)	१२ मासीय चल माध्य (12 monthly moving-average) (३)	चल माध्य केन्द्रित (Movingaverage Centred) का (३) का २ मासीय चल माध्य (४)	अल्पकालीन उच्चावचन (Short-time fluctuation) (५)	आर्तव विचरण (Seasonal Variation) (६)	शेष उच्चावचन (Remaining Fluctuations) (७)
१९३६ ज.	१३१					
फ.	१२९					
मा.	१२१					
अ.	११९					
म.	११३					
जू.	११६	१२७				
जु.	११३	१२८	१२७.५	−१४.५	−१७.१	+२.६
अ.	१२३	१३०	१२९.०	−६.०	−९.१	+३.१
सि.	१३०	१३२	१३१.०	−१.०	−४.४	+२.४
अ.	१३३	१३४	१३३.०	+०.०	+३.३	−३.३
न.	१४५	१३७	१२५.५	+१०.५	+९.३	+१.२
दि.	१४९	१४१	१३९.०	+१०.०	+११.८	−१.८
१९३७ ज.	१४५	१४४	१४२.५	+३.२	+१५.२	−१२.
फ.	१५१	१४८	१४६.०	+५.०	+१३.९	−८.९
मा.	१४९	१५२	१५०.०	−१.०	+३.८	−४.८
अ.	१४३	१५६	१५४.०	−११.०	−५.४	−५.६
म.	१४९	१६०	१५८.०	−९.०	−९.६	+०.६
जू.	१५९	१६४	१६२.०	−३.०	−७.८	+४.८
जु.	१५३	१६८	१६६.५	−१३.५	−१७.१	+३.६
अ.	१६५	१७४	१७१.५	−६.५	−९.१	+२.६
सि.	१७३	१७९	१७६.५	−३.५	−४.४	+०.९
अ.	१८३	१८३	१८१.०	+२.०	+३.३	−१.३
न.	१९७	१८७	१८५.०	+१२.०	+९.३	+२.७
दि.	१९८	१९१	१८९.०	+९.०	+११.८	−२.८

१९३८ ज.	२०८	१९५	१९३.०	+१५.०	+१५.२	−०.२
फ.	२११	१९८	१९६.५	+१५.५	+१३.९	+१.६
मा.	२०९	२०१	१९९.५	+७.५	+३.८	+३.७
अ.	२०१	२०३	२०२.०	−१.०	−५.४	+४.४
म.	२०१	२०५	२०४.०	−३.०	−९.६	+६.६
जू.	२०३	२०७	२०६.०	−३.०	−७.८	+४.८
जु.	१९३	२१०	२०८.५	−१५.५	−१७.१	+१.६
अ.	२०५	२१२	२११.०	−६.०	−९.१	+३.१
सि.	२१०	२१४	२१३.०	−३.०	−४.४	+१.४
अ.	२२१	२१६	२१५.०	+६.०	+३.३	+२.७
न.	२२३	२१७	२१६.५	+७.५	+९.३	−१.८
दि.	२२२	२१७	२१७.०	+५.०	+११.७	−६.८
१९३९ ज.	२३८	२१८	२१७.५	+२०.५	+१५.२	+५.३
फ.	२३७	२१८	२१८.०	+१९.०	+१३.९	+५.१
मा.	२५५	२१९	२१८.५	+७.५	+३.८	+३.७
अ.	२१९	२२०	२१९.५	−०.५	−५.४	+४.९
म.	२१२	२२२	२२१.०	−९.०	−९.६	+०.६
जू.	२०६	२२५	२२३.५	−१७.५	−७.८	−९.७
जु.	२०१	२२७	२२६.०	−२५.०	−१७.१	−७.९
अ.	२१०	२२९	२२८.०	−१८.०	−९.१	−८.९
सि.	२२०	२३१	२३०.०	−१०.०	−४.४	−५.६
अ.	२३७	२३३	२३२.०	+५.०	+३.३	+१.७
न.	२४१	२३५	२३४.०	+७.०	+९.३	−२.३
दि.	२६०	२३९	२३७.०	+२३.०	+११.८	+११.२
१९४० ज.	२६३	२४३	२४१.०	+२२.०	+१५.२	+६.८
फ.	२६१	२४७	२४५.०	+१६.०	+१३.९	+२.१
मा.	२५०	२५१	२४९.०	+१.१०	+३.९	−२.९
अ.	२४४	२५५	२५३.०	−९.०	−५.४	−३.६
म.	२४०	२५९	२५७.०	−१७.५	−९.६	−७.९
जू.	२५३	२६२	२६०.५	−७.५	−७.८	+०.३
जु.	२५०					
अ.	२५५					
सि.	२६९					
अ.	२८५					
न.	२९०					
दि.	३००					

आर्तव विचरण जानने के लिए कॉलम (५) में दी गई सामग्री को निम्नलिखित रीति से विन्यसित करना पड़ता है :

सारणी संख्या ७

मास	उपनति से विचलन (Deviations from Trend)					आर्तव-विचरण (Seasonal Variation) (कॉ० २, ३, ४, ५, ६ का माध्य)
	१९३६	१९३७	१९३८	१९३९	१९४०	
(१)	(२)	(३)	(४)	(५)	(६)	(७)
जनवरी		+ ३·२	+१५·०	+२०·५	+२२·०	+१५·२
फरवरी		+ ५·०	+१५·५	+१९·०	+१६·०	+१३·९
मार्च		− १·०	+ ७·५	+ ७·५	+ १·०	+ ३·९
अप्रैल		−११·०	− १·०	− ०·५	− ९·०	− ५·४
मई		− ९·०	− ३·०	− ९·०	−१७·५	− ९·६
जून		− ३·०	− ३·०	−१७·५	− ७·५	− ७·८
जुलाई	− १४·५	−१३·५	−१५·५	−२५·०		−१७·१
अगस्त	− ६·०	− ६·५	− ६·०	−१८·०		− ९·१
सितम्बर	− १·०	− ३·५	− ३·०	−१०·०		− ४·४
अक्टूबर	०·०	+ २·०	+ ६·०	+ ५·०		+ ३·३
नवम्बर	+१०·५	+१२·०	+ ७·५	+ ७·०		+ ९·३
दिसम्बर	+१०·०	+ ९·०	+ ५·०	+ ३·०		+११·८

चित्र ६

चित्र ७

सारणी संख्या ६ में कॉलम ४, ६ और ७ में काल-श्रेणी के ३ संघटक दिए गये हैं। चित्र संख्या ६ में काल-श्रेणी और उसकी उपनति रेखा दिखाई गई है। चित्र संख्या ७ में इस काल-श्रेणी के आर्तव-विचरण (seasonal variation) और अनियमी उच्चावचन (irregular fluctuations) दिखाये गये हैं। इनमें आर्त्तव-श्रेणियों के आवर्त्तिक स्वभाव और शेष-उच्चावचन का स्वभाव स्पष्ट हो जाता है। आर्त्तव-देशनांक की गणना उसी प्रकार की जाती है जैसे पिछली रीति में। जैसे अगर हमें जनवरी के लिए आर्त्तव-देशनांक को ज्ञात करना है तो पहले जनवरियों के वास्तविक उत्पादन को जनवरियों के संगत चल-माध्य के प्रतिशत के रूप में रखा जायेगा।

यथा, जनवरी १९३७ के लिए यह प्रतिशतता $= \frac{१४५}{१४२\cdot५} \times १०० = १०१\cdot७$। इसी प्रकार अन्य जनवरियों और दूसरे महीनों के लिए भी ये प्रतिशतताएं निकाली जाती हैं। इन प्रतिशतताओं को सारणी संख्या ७ की भाँति विन्यसित कर दिया जाता है और प्रत्येक महीने की प्रतिशतताओं का माध्य निकाल लेते हैं। इन माध्यों को उनके माध्य की प्रतिशतता के रूप में रखने पर आर्त्तव-देशनांक मालूम हो जाता है।

(३) **तीसरी रीति** : इस रीति द्वारा आर्त्तव-देशनांक जानने की रीति निम्नलिखित है (साथ में सारणी संख्या ८ भी देखिये)।

(क) प्रत्येक कालावधि (मास, त्रिमास आदि) के अंक को उससे पहले की कालावधि के अंक से विभाजित करिये और इस भागफल को प्रतिशतता के रूप में रखिये। ये प्रतिशतताएँ ही *शृंखलानुपात* (link relatives) कहलाती हैं।

(ख) प्रत्येक कालावधि के लिए प्राप्त *शृंखलानुपातों* का माध्य निकालिए।

(ग) इन माध्यों के लिए फिर प्रथम कालावधि को आधार मान कर *शृंखलानुपात* (chain relative) निकालिए।

(घ) तत्पश्चात् अंतिम कालावधि को आधार मानकर प्रथम कालावधि का *शृंखलानुपात* निकालिये। इस प्रकार जो प्रथम कालावधि का *शृंखलानुपात* निकलेगा वह प्रथम प्रकार के *शृंखलानुपात* से भिन्न होगा। इसका कारण सुदीर्घकालीन परिवर्तन आदि हैं। अतएव, इन *शृंखलानुपातों* में कुछ संशोधन करना पड़ता है।

(ङ) संशोधन (correction) के लिए पहली प्रकार के, पहली कालावधि के *शृंखलानुपात* को दूसरी प्रकार के पहली कालावधि के *शृंखलानुपात* में से घटाया जाता है। घटाने से प्राप्त अङ्क को कालावधियों की संख्या से विभाजित किया जाता है और इस भजनफल को १ से गुणा करके दूसरी कालावधि में से, २ से गुणा करके तीसरी कालावधि से और इसी प्रकार अन्य कालावधियों से घटाया जाता है। यही संशोधित *शृंखलानुपात* हुए।

(च) संशोधित *शृंखलानुपातों* को इनके माध्य से विभाजित करके और १०० से गुणा करके आर्त्तव देशनांकों (seasonal indices) की गणना की जाती है।

निम्नलिखित उदाहरण से यह रीति स्पष्ट हो जाएगी।

त्रैमासिक अंक

सारणी संख्या ८

त्रिमास	१९४०	१९४१	१९४२	१९४३	१९४४
१	४.५	४.८	४.९	५.२	६.०
२	५.४	५.६	६.३	६.५	७.०
३	७.२	६.३	७.०	७.५	८.४
४	६.०	५.६	६.५	७.२	७.७

इसके श्रृंखलानुपात निम्नलिखित हुए।

वर्ष त्रिमास	१	२	३	४
१९४०	...	१२०	१३३	८३
१९४१	८०	११७	१३३	८९
१९४२	८८	१२१	१११	९२
१९४३	८०	१२५	११५	९६
१९४४	८३	११७	१२०	७९
समान्तर मध्यक	८२.८	१२१·६	११८·४	८८·०
श्रृंखलानुपात (chain relative)	१००	$\frac{१००\times१२१·६}{१००}$ = १२१·६	$\frac{१२१·६\times११८·४}{१००}$ = १४३·९	$\frac{१४३·९\times८८}{१००}$ = १२६·६
संशोधित श्रृंखलानुपात (corrected chain relatives)	१००	१२१·६ − १·२ = १२०·४	१४३·९ − २·४ = १४१·५	१२६·६ − ३·६ = १२३
आर्त्तव देशनांक (seasonal indices)	१००	$\frac{१२०·४}{१२१·२}\times१००$ = ९९·४	$\frac{१४१·५}{१२१·२}\times१००$ = ११६·७	$\frac{१२३·०}{१२१·२}\times१००$ = १०१·५

उपरोक्त सारणी में संशोधन के लिए प्राप्त संख्या निम्न प्रकार निकाली गई है:

प्रथम कालावधि के आधार पर :

प्रथम कालावधि का श्रृंखलानुपात = १००

अंतिम कालावधि के आधार पर :

प्रथम कालावधि का श्रृंखलानुपात $= \frac{८२.८\times१२६.६}{१००}$

= १०४.८

इस प्रकार इन दोनों श्रृंखलानुपातों का अंतर = (१०४.८ − १००) = ४.८

इनका त्रैमासिक अन्तर $= \left(\frac{४·८}{४}\right) = १·२$।

आर्त्तव देशनांक निम्न प्रकार निकाले गये हैं :

संशोधित श्रृंखलानुपातों का माध्य

$$= \frac{१०० + १२०·४ + १४१·५ + १२३·०}{४} = १२१·२$$

$$\text{आर्त्तव देशनांक} = \frac{\text{संशोधित श्रृंखलानुपात}\times१००}{१२१·२}$$

चक्रीय और अनियमी उच्चावचन
(Cyclical and irregular fluctuations)

चित्र सं० ७ में शेष उच्चावचन दिखाए गए हैं। ये उच्चावचन दो प्रकार के संघटकों से बने हैं: चक्रीय उच्चावचन और अनियमी उच्चावचन। इसलिए इन्हें चक्रीय-अनियमी उच्चावचन भी कहा जा सकता है। चक्रीय उच्चावचनों और आर्तव उच्चावचनों में यह अन्तर है कि पहले की अवधि अधिक (वर्षों में) होती है। जैसा चित्र संख्या २ में देखकर ज्ञात होगा, इसमें लगभग ५ वर्ष के बाद एक उच्चतम बिन्दु आता है। इस तरह यह जाना जा सकता है कि इस काल श्रेणी के लिए चक्र की अवधि पाँच वर्ष है। अगर इस काल श्रेणी के लिए मासिक अंक ज्ञात होते, तो इसमें से सुदीर्घ-कालीन उपनति और आर्तव उच्चावचनों का निरसन करके चक्रीय अनियमी उच्चावचन मिल जाते। इन चक्रीय-अनियमी उच्चावचनों में से चक्रीय उच्चावचनों को अलग करने की कोई भी सर्वमान्य रीति नहीं है। पर कुछ हद तक इस अनियमी उच्चावचनों को चक्रीय अनियमी श्रेणी का चल माध्य लेकर कम किया जा सकता है। ऐसा करने से चक्रीय-श्रेणी अधिक प्रधान हो जायगी। चल माध्य की अवधि दो बातों पर निर्भर रहेगी।: (१) इस सामग्री की अनियमिततता और (२) वक्र का सरलन कहाँ तक किया जाता है। सामग्री जितनी अधिक अनियमी होगी, चल माध्य की अवधि उतनी ही बड़ी होनी चाहिए। पर अगर यह अवधि बड़ी होगी तो वक्र बहुत सरलित हो जाएगा। समस्या इन दोनों के बीच उचित संतुलन स्थापित करने की है जिसको विषय वस्तु के अध्ययन के उद्देश्य से ही हल किया जा सकता है।

जहाँ तक अनियमी उच्चावचनों की बात है, इसका अध्ययन करने की कोई रीति नहीं है। स्वभावत: अनियमी होने के कारण इनके बारे में कुछ नहीं जाना जा सकता। काल-श्रेणी में से उपर्युक्त तीन प्रकार के संघटनों का निरसन करके जो कुछ शेष रहता है, वह अनियमी-उच्चावचन दिखाता है। चूँकि इनमें किसी भी प्रकार की निश्चितता नहीं इसलिये वास्तविक जीवन में महत्वपूर्ण होने पर भी (क्योंकि ये अन्य नियमी परिवर्तनों को जन्म दे सकते हैं) इनका सैद्धान्तिक अध्ययन नहीं किया जा सकता।

प्रश्नावली

(१) 'काल-श्रेणी विश्लेषण' के ऊपर एक संक्षिप्त निबन्ध लिखिए।

(एम० ए०, पटना, १९४४)

(२) काल श्रेणी के विश्लेषण से आप क्या समझते हैं, स्पष्टतः समझाइए। इस प्रकार के विश्लेषण का व्यापार के लिए क्या महत्व है?

(बी० कॉम, लखनऊ, १९४४)

(३) काल श्रेणी के विश्लेषण के लिए आप कौन-सी सांख्यिकीय रीति प्रयोग में लाएँगे तथा यह भी स्पष्ट कीजिए कि किस प्रकार आप सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति को अलग करेंगे।

(एम० ए०, पटना, १९४४)

(४) संक्षेप में बतलाइए कि आप ५० वर्षों से अधिक के मासिक उल्लेख-मालाओं का विश्लेषण किस प्रकार करेंगे।

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९४८)

(५) 'उपनति' से आप क्या समझते हैं? किसी माला के दीर्घकालीन उपनति पर आर्तव तथा चक्रीय उच्चावचनों का क्या प्रभाव पड़ता है?

(बी०, कॉम० बम्बई, १९३६)

(६) काल श्रेणी के विश्लेषण के लिए चल-मध्यों की पद्धति की विशेषताएँ तथा कमियाँ बतलाइए।

(एम० ए०, दिल्ली, १९५३)

(७) (अ) एक काल-माला में आये हुए नियमी तथा अनियमी उच्चावचनों में भेदकरण कीजिए।

(ब) काल-विचरण विश्लेषण (analysis of time variation) की महत्ता पर एक छोटी-सी टिप्पणी लिखिए।

(एम०, ए० पंजाब, १९५२)

(८) स्पष्ट कीजिए कि आप एक काल-माला पर किस प्रकार विचार करेंगे। अपने विचारों की पुष्टि निम्नलिखित माला, (जिसमें १९०१ से १९३० तक की अवधि के वार्षिक मूल्य दिए हुए हैं) से कीजिए।

अवधि	वार्षिक मूल्य
१९०१–१९१०	२०८,२२३,२२८,२२२,२३९,२४२,२३८,२५२,२५७,२५०
१९११–१९२०	२७३,२७०,२६८,२८८,२८४,२८२,३००,३०३,२९८,३१३
१९२१–१९३०	३१७,३०९,३२१,३३३,३२७,३४५,३४८,३४३,३६२,३६०

(आई० सी० एस०, १९३२)

(९) काल माला के विश्लेषण में चल माध्यों के प्रयोग को स्पष्ट कीजिए। निम्नलिखित काल माला का चल-माध्य निकालिए।

वर्ष	मूल्य	वर्ष	मूल्य
१०१	५०६	१११	११८९
१०२	६२०	११२	८१८
१०३	१०३६	११३	७४५
१०४	६७३	११४	८४५
१०५	५८८	११५	१२७६
१०६	६९६	११६	८९८
१०७	११११६	११७	८१४
१०८	७३८	११८	९२९
१०९	६६३	११९	१३६०
११०	७७७	१२०	९६१
		१२१	९२६

(१०) निम्नलिखित सारणी में इंगलैण्ड तथा वेल्स में बच्चों का मृत्यु-अर्घ (एक वर्ष से कम उम्र के, प्रति १००० जीवित पैदा हुए बच्चों में से मरने वाले बच्चे) दिया हुआ है। इनका पंचवर्षीय चल-माध्य निकालिए और इस प्रकार से प्राप्त चल माध्यों का फिर पंचवर्षीय चल-माध्य निकालिए।

वर्ष	मृत्यु अर्घ	वर्ष	मृत्यु अर्घ	वर्ष	मृत्यु अर्घ	वर्ष	मृत्यु अर्घ
१९२२	७७	१९२८	६५	१९३४	५९	१९४०	५७
१९२३	६९	१९२९	७४	१९३५	५७	१९४१	६०
१९२४	७५	१९३०	६०	१९३६	५९	१९४२	६१
१९२५	७५	१९३१	६६	१९३७	५८	१९४३	४९
१९२६	७०	१९३२	६५	१९३८	५३	१९४४	४५
२९२७	७०	१९३३	६४	१९३९	५१	१९४५	४६
						१९४६	४३

(११) निम्नलिखित सारणी में, बम्बई में सन् १९१६ से लेकर १९४० तक के अधिकोष-निष्कासन (bank clearings) दिए हुए हैं। उपनति बतलाइए।

वर्ष	अधिकोष निष्कासन (दस लाख रुपयों में)	वर्ष	अधिकोष निष्कासन (दस लाख रुपयों में)
१९१६	५२·७	१९२८	१००·७
१९१७	७९·४	१९२९	९४·६
१९१८	७६·३	१९३०	८३·०
१९१९	६६·०	१९३१	११०·६
१९२०	६८·६	१९३२	१५९·६
१९२१	९३·८	१९३३	१७७·४
१९२२	१०४·७	१९३४	१७८·६
१९२३	८७·२	१९३५	२३५·८
१९२४	७९·३	१९३६	२४३·२
१९२५	१०३·६	१९३७	१९८·४
१९२६	९७·३	१९३८	२१७·७
१९२७	९२·४	१९३९	२१८·०
		१९४०	२५६·७

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४३)

(१२) निम्नलिखित सारणी से जिनमें गेहूँ के मूल्य देशनांक (१८९३=१००) दिए हुए हैं, दस-वर्षीय चल-माध्य लेकर उपनति मूल्य निकालिए और उपनति से अलग किए गये अल्पकालीन उच्चावचनों को बिन्दुरेखीय रूप में प्रदर्शित कीजिए।

वर्ष	वार्षिक माध्य	वर्ष	वार्षिक माध्य
१९०६	१५५	१९१८	२७०
१९०७	१६८	१९१९	३४१
१९०८	२२६	१९२०	३१०
१९०९	२०३	१९२१	३६०
१९१०	१७०	१९२२	३१५
१९११	१५३	१९२३	३५६
१९१२	१७०	१९२४	२४६
१९१३	१७७	१९२५	२९४
१९१४	२००	१९२६	२८१
१९१५	२२७	१९२७	२६७
१९१६	१९३	१९२८	२६४
१९१७	२०५	१९२९	२६२

(एम० कॉम, इलाहाबाद, १९४८)

(१३) निम्न सारणी में चीनी के मिल का उत्पादन (हजारों मनों में) दिया हुआ है।

वर्ष	उत्पादन (हजार मनों में)
१९४१	८०
१९४२	९०
१९४३	९२
१९४४	८३
१९४५	९४
१९४६	९९
१९४७	९२

(अ) इन अंकों से अल्पतम वर्ग रीति से उपनति मूल्य ज्ञात करिये।

(ब) इन अंकों को विन्दुरेखीय रूप में प्रांकित कीजिए और उपनति रेखा भी दिखलाइए।

(स) रेखाओं की उपनति बढ़ती हुई है या घटती हुई ? आप निर्णय पर किस प्रकार पहुँचेगे ? (एम० कॉम०, लखनऊ, १९५०)

(१४) अल्पतम वर्ग रीति के द्वारा रिजर्व बैंक आफ इंडिया की पौंड सम्पत्ति (Sterling assets) का उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्ष	पौंड सम्पत्ति (हजार रुपयों में)
१९३६–३७	८३
१४३७–३८	९२
१९३८–३९	७१
१९३९–४०	९०
१९४०–४१	१६९
१९४१–४२	१९१

(१५) निम्नलिखित सारणी में एकानामिक एडवाइजर (Economic Adviser) के वस्तु-वर्ग (भोजन तथा तम्बाकू) का मासिक देशनांक दिया हुआ है। अल्पतम-वर्ग रीति के द्वारा उपनति ज्ञात कीजिए। १९ अगस्त, १९३९ के साप्ताहिक मूल्य = १००

माह	देशनांक	माह	देशनांक
१९४१		१९४२	
अक्टूबर	१२७·४	जुलाई	१५५·८
नवम्बर	१२७·९	अगस्त	१५८·३
दिसम्बर	१२७·५	सितम्बर	१६१·०
१९४२		अक्टूबर	१६७·२
जनवरी	१२८·४	नवम्बर	१७२·४
फरवरी	१३२·३	दिसम्बर	१७८·५
मार्च	१३०·५	१९४३	
अप्रैल	१३६·५	जनवरी	१९०·८
मई	१४४·७	फरवरी	२३०·०
जून	१५२·३		

अल्पतम वर्ग रीति द्वारा उपर्युक्त सामग्री का उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए तथा इस उपनति मूल्य को बिन्दुरेख में प्रदर्शित कीजिए ।

(एम० कॉम०, लखनऊ, १९४४)

(१६) निम्नलिखित तापमानों (फारेनहाइट में नापे गये) से अल्पकालीन उच्चावचनों का अध्ययन कीजिए ।

दिन	तापमान	दिन	तापमान
फरवरी १	४०	११	३८
२	५०	१२	८०
३	४४	१३	६०
४	७०	१४	६४
५	५२	१५	५२
६	४४	१६	६८
७	३६	१७	८६
८	४०	१८	९६
९	५६	१९	९४
१०	६८	२०	३८

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४३)

(१७) निम्नलिखित सामग्री का प्रयोग करते हुए स्पष्ट कीजिए कि आप किस प्रकार एक काल श्रेणी में आर्त्तव उच्चावचनों को ज्ञात करेंगे।

वर्ष	ग्रीष्म	मानसून	हेमन्त	जाड़ा
१	३०	८१	६२	११९
२	३३	१०४	८६	१७१
३	४२	१५३	९९	२२१
४	५६	१७२	१२९	२३५
५	६७	२०१	१३६	३०२

(आई० सी० एस०, १९४०)

(१८) नीचे सारणी में इंगलैंड में कोयले का उत्पादन-अंक दिए गये हैं। इनसे स्पष्ट कीजिए कि किस प्रकार आप (१) आर्त्तव विचरण (seasonal movement) तथा (२) अनियमी उच्चावचनों, को ज्ञात करेंगे।

कोयले के उत्पादन की मात्रा		उत्पादन (दस लाख टनों में)
वर्ष	त्रिमास	
१९२७	१	६८·३
	२	६२·६
	३	६१·१
	४	६३·३
१९२८	१	६५·४
	२	५७·९
	३	५६·४
	४	६१·५
१९२९	१	६८·१
	२	६२·७
	३	६२·८
	४	६७·०
१९३०	१	७०·१
	२	५९·१
	३	५६·३
	४	६१·६
१९३१	१	५९·५
	२	५४·८
	३	५१·१
	४	५८·०

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९४७)

(१९) निम्नलिखित सारणी में १९१९-२० से १९२३-२४ तक भारत से निर्यात की गई वस्तुओं का मूल्य दिया गया है। इस सामग्री से आर्त्तव-विचरण देशनांक की की गणना कीजिए ।

माह	१९१९—२०	१९२०—२१	१९२१—२२	१९२२—२३	१९२३—२४
अप्रैल	२०	२७	१७	२३	२९
मई	२०	२६	१८	२६	२८
जून	१९	२१	१५	२८	२९
जुलाई	२६	१९	१७	२३	२५
अगस्त	२५	१९	१८	२८	२२
सितम्बर	३०	२१	१९	२०	२३
अक्टूबर	२८	१९	१७	२१	२५
नवम्बर	२९	१७	१९	२७	२३
दिसम्बर	२६	१८	२१	२६	३०
जनवरी	२९	१८	२२	२८	३३
फरवरी	२६	१७	२१	३०	३५
मार्च	३०	१८	२६	३१	४०

(२०) एक वस्तु के वार्षिक उत्पादन के देशनांक (१९००=१००) नीचे दिए गए हैं :

वर्ष	वार्षिक माध्य	वर्ष	वार्षिक माध्य
१९२७	१६५	१९३९	२८०
२८	१७८	४०	३५१
२९	२३६	४१	३२०
३०	२१३	४२	३७०
३१	१८०	४३	३२५
३२	१६३	४४	३६६
३३	१८०	४५	३५६
३४	१८७	४६	३०४
३५	२१०	४७	२९१
३६	२३७	४८	२३७
३७	२०३	४९	२५४
३८	२१५	५०	२६२

इनका प्रांकण करिये। दस-वर्षीय चल माध्य की रीति से उपनति-मूल्य प्राप्त करिये।

(२१) निम्नलिखित सारणी पाँच वर्ष के लिए अमेरिका के लिए सीमेन्ट के माध्य दैनिक उत्पादन के शृंखलानुपातों को देती है :

मास	१९२५	१९२६	१९२७	१९२८	१९२९
जनवरी/दिसम्बर	८५	७४	७७	८१	८१
फरवरी/जनवरी	१०३	१०८	९९	९६	९६
मार्च/फरवरी	१२१	१२१	१४०	१०९	१०६
अप्रैल/मार्च	१२९	१२४	१२७	१३६	१४२
मई/अप्रैल	१०९	१२८	११५	१२४	११४
जून/मई	१०२	१०६	१०७	१०४	१०७
जुलाई/जून	९८	९८	९८	९७	१००
अगस्त/जुलाई	१०५	९९	१०५	१०७	१०७
सितम्वर/अगस्त	१००	१०१	९९	९९	९६
अक्तूवर/सितम्वर	९७	९७	९५	९५	९४
नवम्वर/अक्तूवर	८८	८८	८७	८९	८७
दिसम्वर/नवम्वर	७६	७३	८०	७५	७७

आर्तव देशनांकों की गणना करिये और उपलब्ध परिणामों का निवचन करिये।

(एम० ए०, इलाहावाद, १९४९)

(२२) निम्नलिखित सामग्री को विन्दुरेख के रूप में रखिये और तीन वर्षीय चल माध्य का उपयोग करके, श्रेणी की उपनति को विन्दुरेख में दिखाइये।

वर्ष	जन्मार्घ	वर्ष	जन्मार्घ
१९१७	३०·९	१९२८	२६·४
१८	३०.२	२९	२४·७
१९	२९.१	३०	२४·१
२०	३१.४	३१	२३·१
२१	३३·४	३२	२३·७
२२	३०·२	३३	२२·६
२३	३०·४	३४	२३·६
२४	३१·०	३५	२३·०
२५	२९·०	३६	२२·०
२६	२७·९	३७	२२·६
२७	२७·७	३८	२२·९

(एम० ए०, इलाहावाद, १९५१)

(२३) निम्नलिखित काल श्रेणी का बिन्दुरेख खींचिये और इसकी उपनति का अध्ययन करिये :

वर्ष	मूल्य	वर्ष	मूल्य
१९२०	५०५	१९३१	८२०
२१	६१०	३२	७४३
२२	६३०	३३	७९८
२३	६७०	३४	९९३
२४	५३५	३५	८८३
२५	६८०	३६	८०५
२६	८९५	३७	९००
२७	७३४	३८	१०५०
२८	६५२	३९	९२५
२९	७५०	४०	९३०
३०	९३०		

(इलाहाबाद, बी० काम०, १९४५)

(२४) अल्पतम - वर्ग रीति से निम्नलिखित समंकों में सरल रेखा उपनति समायोजना करिये ।

वर्ष	उत्पत्ति (१०००)
१९१०—११	४९९
११—१२	३६३
१२—१३	४८२
१३—१४	३७८
१४—१५	५९८
१५—१६	४६०
१६—१७	४८२
१७—१८	३६३
१८—१९	३३५
१९—२०	२२५

(एम० कॉम०, इलाहाबाद १९४८)

(२५) अच्छी तरह समझाइये कि सुदीर्घकालीन उपनति से आप क्या समझते हैं ?

भारत में गेहूँ के फुटकर मूल्यों के देशनांकों (१८७३ = १००) की श्रेणी के लिए दस-वर्षीय चल मानकर, उपनति मूल्यों को बतलाइये और उपनति को हटाकर अल्पकालीन उच्चावचनों को बिन्दुरेख के रूप में प्रस्तुत करिये।

वर्ष	वार्षिक माध्य	वर्ष	वार्षिक माध्य
१९०६	१५५	१९१७	२०५
०७	१६८	१८	२७०
०८	२२६	१९	३४१
०९	२०३	२०	३१०
१०	१७०	२१	३६०
११	१५३	२२	३१५
१२	१७०	२३	३५६
१३	१७७	२४	२४६
१४	२००	२५	२९४
१५	२२७	२६	२८१
१६	१९३	२७	२६७
		२८	२६४
		२९	२६२

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९४४)

अध्याय १२

सहसम्बन्ध का सिद्धान्त

(Theory of Correlation)

अब तक जिन समूहों पर विचार किया गया है उनके सदस्य केवल एक चल के विभिन्न मूल्य लेते थे। इन समूहों के माध्य (प्रतिनिधि-संख्या) और उनके अपकिरण (माध्य से विचलन) की माप की गणना करने की रीति का वर्णन किया जा चुका है। इस प्रकार ऐसे समूहों को उचित और सुविधाजनक रूप में समझा जा सकता है। पर समूह या श्रेणियाँ इस प्रकार की भी हो सकती हैं कि उनके प्रत्येक पद दो या अधिक चलों के मूल्य लें। जैसे यदि एक समूह के व्यक्तियों की लम्बाइयाँ और उनके वजन नापे जाएँ तो इस प्रकार प्राप्त सामग्री में प्रत्येक पद के दो मूल्य होंगे। यदि इनके साथ प्रत्येक व्यक्ति के सीने की चौड़ाई भी नापी जाय तो प्रत्येक पद तीन विभिन्न मूल्य लेगा। विभिन्न चलों के मूल्यों के रूप में तीन श्रेणियाँ प्राप्त होंगी जिनके लिए माध्यों और अपकिरण की मापों की गणना पिछले परिच्छेदों में बताई गई रीतियों के अनुसार की जा सकती है।

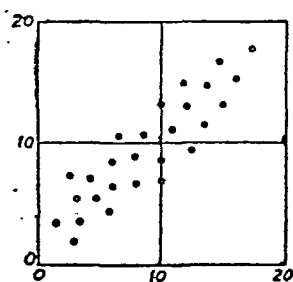
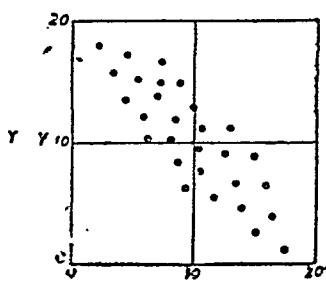
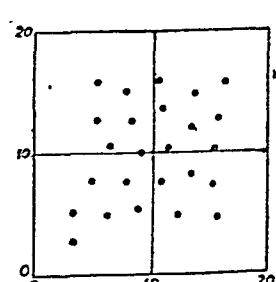
पर कभी-कभी ऐसा प्रतीत होता है कि ये चल (अर्थात् इनके विभिन्न मूल्यों वाली श्रेणियाँ) आपस में सम्बन्धित हैं। जैसे यदि किसी वस्तु के दाम और उसकी माँग की सामग्री संग्रहित की जाए तो दो श्रेणियाँ प्राप्त होंगी। एक के पद विभिन्न दाम (दाम यहाँ चल हैं) होंगे और दूसरी के उन दामों में खरीदी गई उस वस्तु की राशियाँ (यहाँ वस्तु की राशि चल है)। इन दो श्रेणियों के बारे में यह साधारण निरीक्षण से ही कहा जा सकता है कि जैसे-जैसे उस वस्तु के दाम बढ़ते हैं वैसे-वैसे उसकी मांग कम होती जाती है। अतः इस परिणाम में स्वभावतः पहुँचा जाएगा कि माँग और दाम सम्बन्धित हैं। इस प्रकार के सम्बन्ध कई चलों के बीच मिलते हैं, जैसे दाम और पूर्ति, व्यक्तियों की लम्बाइयाँ और उनके वजन, चीनी के दाम और रुई के दाम आदि।

यदि एक चल के मूल्यों में परिवर्तन होने पर दूसरे चल (या अन्य चलों) के मूल्यों में भी परिवर्तन होता है (या परिवर्तन की प्रवृत्ति होती है) तो इन चलों

के सम्बन्ध को **सहसम्बन्ध** (correlation) कहते हैं। यहाँ सम्बन्ध शब्द का उपयोग परस्पर-आश्रितता के अर्थ में किया गया है। अगर एक चल के परिवर्तन और दूसरे चल के मूल्यों के परिवर्तन एक ही दिशा में होते हैं, अर्थात् यदि एक के मूल्य बढ़ें तो दूसरे के भी बढ़ें, और यदि एक के घटें तो दूसरे के भी घटें तो उनके बीच के सहसम्बन्ध को **अनुलोम या घनात्मक सहसम्बन्ध** (Direct or positve correlation) कहा जाता है। इसके विपरीत यदि इन चलों के परिवर्तन विपरीत दिशाओं में होते हैं, अर्थात् यदि एक चल के मूल्य बढ़ें और दूसरे के घटें, तो इनके बीच के सहसम्बन्ध को **विलोम या ऋणात्मक** (Inverse or negative) सहसम्बन्ध कहते हैं। जैसे माँग और दाम के बीच का सहसम्बन्ध विलोम या ऋणात्मक है और दाम और पूर्ति के बीच का सहसम्बन्ध अनुलोम या घनात्मक है।

विक्षेप-चित्र (Scatter Diagram)

सहसम्बन्ध के विषय में अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए रेखाचित्रों का उपयोग किया जाता है। रेखाचित्र खींचने की रीति का वर्णन दसवें परिच्छेद में किया जा चुका है। मान लीजिये कि किसी समूह के पद दो चलों, य और र, के विभिन्न मूल्य लेते हैं। प्रत्येक पद के लिए चल य और चल र का मूल्य रेखाचित्र में एक विन्दु से दिखाया जा सकता है। इसी प्रकार समूह के प्रत्येक पद के मूल्य रेखाचित्र में विभिन्न विन्दुओं से दिखाए जाएँगे। यदि रेखाचित्र में अंकित इन विन्दुओं का झुण्ड किसी प्रकार की उपनति (trend) दिखाता है तो चल य और चल र के बीच में सहसम्बन्ध है अन्यथा नहीं। सहसम्बन्ध का अर्थ यह हुआ कि यदि एक चल का मूल्य ज्ञात हो तो दूसरे चल के मूल्य के बारे में जाना जा सकता है। यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि दूसरे चल के मूल्य को निश्चित रूप से जानना संभव नहीं है क्योंकि ये विन्दु किसी निश्चित सम्बन्ध के अनुसार नहीं हैं; केवल इनकी उपनति-रेखा (trend-

चित्र १

line) मात्र जानी जा सकती है। ऐसे चित्रों को विक्षेप चित्र (Scatter Diagram) कहते हैं इनके द्वारा यह जाना जा सकता है कि आया दो चलों में सहसम्बन्ध है या नहीं। चित्र सं० १ में इस प्रकार के विक्षेप चित्र दिखाए गए हैं।

चित्र १ (क) में जब य का मूल्य बढ़ता है तो र का भी बढ़ता है। इसलिए य और र के बीच अनुलोम सहसम्बन्ध (positive correlation) है। चित्र १ ख में य के मूल्य के घटने पर र का मूल्य बढ़ता है। इसलिए इनके बीच विलोम सहसम्बन्ध (negative correlation) है। चित्र १ (ग) में कोई भी उपनति रेखा नहीं खींची जा सकती। इसलिए य और र के बीच सहसम्बन्ध नहीं है। इन चित्रों से यह स्पष्ट हो जाता है कि जब दो चलों के बीच सहसम्बन्ध अनुलोम होता है तो उपनति रेखा (trend line) बाएँ से दाहिनी ओर को उठती चली जाती है। इसके विपरीत यदि सहसम्बन्ध विलोम होता है तो उपनति रेखा (trend line) बाएँ से दाहिनी ओर को गिरती चली जाती है।

विक्षेप चित्रों द्वारा केवल बिन्दुओं को अंकित करके सहसम्बन्ध का अन्दाज लगाया जा सकता है। इसके साथ-साथ इसका एक लाभ यह है कि सामग्री में न दिए हुए किसी चल के मूल्य के लिए दूसरे चल का संगत मूल्य निकालना हो तो उपनति रेखा द्वारा इसकी गणना की जा सकती है।

सहसम्बन्ध-बिन्दुरेख
(Correlation Graph)

सहसम्बन्ध के विषय में ज्ञान प्राप्त करने के लिए बिन्दुरेख का भी उपयोग किया जाता है। बिन्दुरेख से यह मालूम पड़ सकता है कि दो श्रेणियों में यदि सहसम्बन्ध है तो वह धनात्मक है या ऋणात्मक। यदि दोनों श्रेणियां के बिन्दुरेख समान प्रवृत्ति प्रदर्शित करते हैं तो सहसम्बन्ध धनात्मक होता है और यदि दोनों वक्र विपरीत दिशाओं में जाते हैं तो सहसम्बन्ध ऋणात्मक होता है। निम्नलिखित सारणी संख्या १ में दी गई सामग्री चित्र संख्या २ में अंकित की गई है।

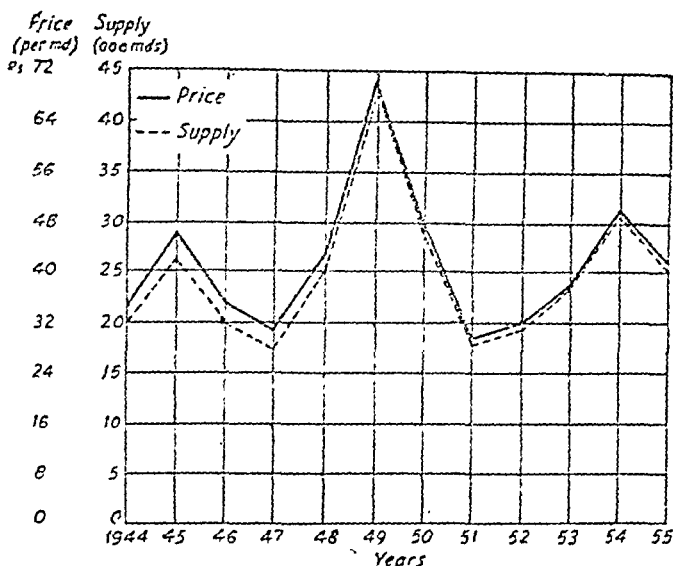
सारिणी संख्या १

क वस्तु का मूल्य प्रति मन तथा पूर्ति

वर्ष	मूल्य प्रति मन (रुपये में)	क वस्तु की पूर्ति (मनों में)
१९३८	३२	२२,०००
१९३९	४५	२९,०००
१९४०	३२	२२,०००
१९४१	२९	१९,०००
१९४२	४४	२७,०००
१९४३	६९	४३,०००
१९४४	४०	२४०००
१९४५	२९	१८,०००
१९४६	३१	२०,०००
१९४७	३७	२३,०००
१९४८	५३	३२,०००
१९४९	४३	२६,०००
माध्य	४०.३	२५,४००

विन्दुरेखीय चित्र बनाने में शीर्ष रेखा पर दो प्रकार के स्केल होंगे। एक तो वह जो उत्पादन प्रति मन दिखलाएगा और दूसरा जो कि मूल्य प्रति मन। दोनों श्रेणियों के स्केल लेते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि शीर्ष रेखा पर इन दोनों के माध्य लगभग एक ही स्थान पर होंगे। इसके लिए यदि कूट-आधार रेखा (false base line) लेनी पड़े तो कोई नुकसान नहीं।

चित्र संख्या २ को देखने से यह स्पष्ट हो जाता है, कि पूर्ति की मात्रा तथा मूल्य प्रति मन में बहुत घनिष्ठ सम्बन्ध है और यह सम्बन्ध धनात्मक है क्योंकि दोनों वक्रों के परिवर्तन की प्रवृत्ति समान है। यदि एक बढ़ता है तो दूसरा भी और यदि एक घटती है तो दूसरा भी। इसी प्रकार यदि दो श्रेणियों में ऋणात्मक सह-सम्बन्ध होता तो दोनों वक्र विभिन्न प्रवृत्ति प्रदर्शित करते ।

चित्र संख्या २ में दिया गया विन्दु रेख निरपेक्ष परिवर्तन (absolute changes) नापता है। यदि दो श्रेणियों में वास्तव में सह-सम्बन्ध है तो एक के सापेक्ष बढ़ाव और सापेक्ष घटावों का सम्बन्ध दूसरी श्रेणी के सापेक्ष बढ़ाव व घटावों से होना चाहिए। इस प्रकार की विवेचना करने के लिए या तो अनुपातिक स्केल

चित्र संख्या २

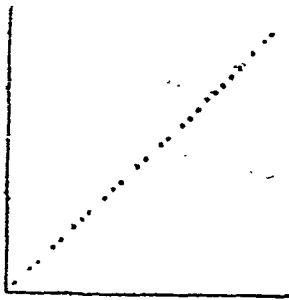
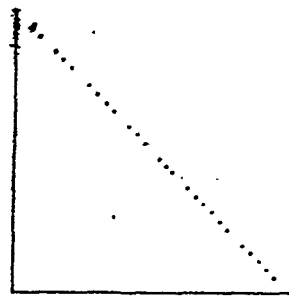
(ratio scale) का प्रयोग किया जा सकता है और या दोनों श्रेणियों को देशनांकों के रूप में परिवर्तित कर प्राकृत स्केल (natural scale) पर उनका प्रांकण किया जा सकता है।

विन्दुरेख से सहसम्बन्ध का अध्ययन करने में इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि इस प्रकार से हम केवल सहसम्बन्ध की दिशा का ही अनुमान लगा सकते हैं, उसकी मात्रा का नहीं।

सहसम्बन्ध गुणक (Coefficient of Correlation)

दो चलों के बीच के सम्बन्ध का परिमाण (degree) जानने के लिए सहसम्बन्ध गुणक की गणना की जाती है। जैसा बताया जा चुका है, दो चलों के बीच में सहसम्बन्ध होने का अर्थ यह नहीं है कि उनके बीच में हमेशा एक निश्चित सम्बन्ध है (अर्थात् एक चल का मूल्य जानने पर दूसरे चल का उस मूल्य के संगत मूल्य को निश्चित रूप से हमेशा जाना जा सकना संभव नहीं है।) चलों के बीच यदि इस प्रकार का सम्बन्ध हो कि एक के मूल्य और दूसरे के मूल्य में एक निश्चित अनुपात है तो इन दो चलों के बीच का सहसम्बन्ध पूर्ण है। यदि इन चलों में एक के मूल्य घटने पर दूसरे का मूल्य बढ़े तो इनके बीच का सहसम्बन्ध पूर्ण-विलोम

सहसम्बन्ध (perfect negative correlation) हुआ और यदि परिवर्तन एक ही दिशा में हों तो सहसम्वन्ध पूर्ण-अनुलोम सहसम्बन्ध (perfect positive correlation) हुआ। ऐसा भी हो सकता है कि दो चलों के मूल्यों में कोई परस्पर-सम्वन्ध न हो। ऐसी-दशाओं में इनके वीच कोई सहसम्वन्ध नहीं हुआ।

पिछले अनुच्छेद में वर्णित दशाएँ साधारणतया आर्थिक और सामाजिक सांख्यिकी में नहीं मिलतीं। प्रायः सहसम्वन्ध अंशों में मिला करता है। जैसे, यदि किसी वस्तु के दाम वढ़ें तो उसकी माँग घटेगी। पर यह निश्चित रूप से नहीं कहा जा सकता कि यह माँग ठीक कितनी घटेगी। इस दशा में सहसम्वन्ध तो है पर दोनों चल पूर्ण रूप से परस्पर-निर्भर नहीं है। वस्तुतः पूर्ण सहसम्वन्ध और गणित में प्रयुक्त परस्पराधीन सम्वन्ध एक ही चीज है। चित्र संख्या ३ में दिखाये गये विक्षेप-चित्र

चित्र ३

(scatter diagram) क्रमशः पूर्ण अनुलोम सहसम्वन्ध और पूर्ण-विलोम सह-सम्वन्ध दिखाते हैं। इन चित्रों को ध्यान से देखने पर विदित होगा कि सब विन्दु उपनति (trend line) रेखा में स्थित हैं।

इस तथ्य को जानने के वाद इस वात का प्रयत्न करना उचित ही होगा कि हम सहसम्वन्ध की ऐसी माप वना सकें जो इन दशाओं को ठीक रूप से परिमाणात्मक ढंग में व्यक्त कर सके। इस माप के दोनों चरम कोनों द्वारा क्रमशः पूर्ण-अनुलोम सहसम्वन्ध और पूर्ण विलोम सहसम्वन्ध व्यक्त किए जा सकें और इनके मध्य में एक ऐसा परिणाम हो जो सहसम्वन्ध के अभाव का द्योतक हो। ऐसी माप सहसम्वन्ध गुणक द्वारा दी जाती है।

आगामी अनुच्छेदों में जिस सहसम्वन्ध गुणक का वर्णन किया जा रहा है। उसका मूल्य +१ और −१ के वीच में रहता है। जव पूर्ण-अनुलोम सहसम्वन्ध होता है तो इसका मूल्य +१ हो जाता है। इसके विपरीत पूर्ण-विलोम सहसम्वन्ध होने पर इसका मूल्य −१ होता है। इसके मध्य में शून्य आता है। जव इसका मूल्य शून्य होता

है तो चलों के बीच कोई सहसम्बन्ध नहीं होता। जैसे-जैसे इस गुणक का मूल्य +१ से कम होता जाता है वैसे-वैसे दो चलों के बीच अनुलोम सहसम्बन्ध कम होता जाता है। जब इसका मूल्य शून्य हो जाता है तो चलों के बीच में किसी भी प्रकार का सहसम्बन्ध नहीं रहता। फिर जैसे-जैसे इसका मूल्य शून्य से कम होता जाता है (अर्थात् ऋणात्मक होता जाता है) वैसे-वैसे चलों के बीच विलोम-सहसम्बन्ध बढ़ता जाता है और अन्त में, इसका मूल्य–१ होने पर, दोनों चलों में पूर्ण-विलोम सहसम्बन्ध हो जाता है।

इस तथ्य को चित्रों के रूप में देखा जा सकता । जब पदों के मूल्यों के विन्दु विक्षेप चित्र में ३ (क) की भाँति रहते हैं तो इसके बीच में पूर्ण-अनुलोम सहसम्बन्ध होता है (इस समय सहसम्बन्ध गुणक=+१)। यदि सहसम्बन्ध गुणक १ से कम कोई धनात्मक भिन्न (positive fraction) होता है, तो विक्षेप-चित्र का रूप चि० सं० १ (क) सा होगा। सहसम्बन्ध गुणक के शून्य होने पर विक्षेप - चित्र चि० सं० १ (ग) की भाँति होगा। सहसम्बन्ध गुणक का मान यदि कोई ऋणात्मक भिन्न (negative fraction) है तो विक्षेप चित्र चि० सं० १ (ख) के रूप में होगा और पूर्ण-विलोम सहसम्बन्ध होने पर (सहसम्बन्ध गुणक=–१) विक्षेप चित्र चि० सं० ३ (ख) के रूप में होगा।

सहसम्बन्ध गुणक की गणना (Calculation of the Coefficient of Correlation)

कार्ल पियरसन का सूत्र (Karl Pearson's Formula)—सहसम्बन्ध का परिमाण मालूम करने के लिए कार्ल पियरसन ने एक सूत्र दिया । इसके अनुसार दो चलों का सहसम्बन्ध गुणक उनके माध्यों से लिए गये विचलनों के गुणनफलों के योग को उनके अवलोक युग्मों (pairs of observations) की संख्या और उनके प्रमाप विचलनों के गुणनफल से विभाजन करके प्राप्त होने वाली संख्या है।

इस प्रकार यदि $य_1, य_2 \cdots य_स$ ($x_1, x_2 \ldots x_n$) प्रथम चल के विभिन्न पदों से मध्यक के विलचन हैं और $र_1, र_2 \ldots र_स$ ($y_1, y_2 \cdots y_n$) द्वितीय चल के विभिन्न-पदों के मध्यक से विचलन हैं और यदि $यो_{यर}$ (Σxy) दोनों चलों के माध्य से विचलनों के गुणनफल का योग है और यदि $चा_1$ और $चा_2$ (σ_1, σ_2) क्रमशः उनके प्रमाप विचलन हैं और स (n) अवलोक युग्मों की संख्या है तो कार्ल पियरसन का सहसम्बन्ध गुणक व (r)

$$व = \frac{यो_{यर}}{स \times चा_1 \times चा_2} \qquad r = \frac{\Sigma xy}{n \times \sigma_1 \times \sigma_2}$$

इस सूत्र से यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि सहसम्बन्ध का अनुलोम (positive) होना या विलोम (negative) होना $यो_{यर}$ (Σxy) के धनात्मक या ऋणात्मक होने पर निर्भर रहता है। क्योंकि इस सूत्र का हर सदैव धनात्मक ही रहेगा ।

साधारण श्रेणी में पियरसन का सहसम्बन्ध गुणक निकालना

उदाहरण १

पिता और पुत्र की ऊँचाई के बीच सहसम्बन्ध की गणना कीजिए।

सारणी संख्या २

पिता की ऊँचाई	६५"	६६"	६७"	६७"	६८"	६९"	७०"	७२"
पुत्र की ऊँचाई	६७"	६८"	६५"	६८"	७२"	७२"	६९"	७१"

हल

पिता और पुत्र की ऊँचाइयों का कार्ल पियरसन से सहसम्बन्ध गुणक निकालना:

ऋजु रीति (Direct Method)

सारणी संख्या ३

पिता की ऊँचाई			पुत्र की ऊँचाई			विचलनों का गुणनफल (Product of Deviations)
पिता की ऊँचाई क१ (m_1)	माध्य (६८") से विचलन Dev from a.a.(68") य (x)	विचलनों का वर्ग Square of Deviations य२ (x^2)	पुत्र की ऊँचाई क२ (m_2)	माध्य (६९") से विचलन Dev. from a.a. (69") र (y)	विचलनों का वर्ग Square of Deviations र२ (y^2)	य र (xy)
६५	−३	९	६७	−२	४	+६
६६	−२	४	६८	−१	१	+२
६७	−१	१	६५	−४	१६	+४
६७	−१	१	६८	−१	१	+१
६८	०	०	७२	+३	९	०
६९	+१	१	७२	+३	९	+३
७०	+२	४	६९	०	०	०
७२	+४	१६	७१	+२	४	+८
योक१ =५४४ (Σm_1) स (n)=८		योय२ =३६ (Σx^2)	योक२ =५५२ (Σm_2) स (n)=८		योर२ =४४ (Σy^2)	योयर =+२४ (Σxy)

क₁ का समान्तर मध्यक $=\frac{५४४}{८}=६८''$

क₂ " " " $=\frac{५५२}{८}=६९''$

क₁ का प्रमाप विचलन

$$चा = \sqrt{\frac{यो_{य^२}}{स}}$$

$$= \sqrt{\frac{३६}{८}} = २\cdot१२$$

क₂ का प्रमाप विचलन

$$चा_२ = \sqrt{\frac{यो_{र^२}}{स}}$$

$$= \sqrt{\frac{४४}{८}} = २\cdot३४$$

सहसम्बन्ध गुणक

$$(१)\ व = \frac{यो_{य\ र}}{स \times चा_१ \times चा_२}$$

$$= \frac{+२४}{८ \times २\cdot१२ \times २\cdot३४}$$

$$= +\cdot६$$

Arithmetic average of m_1

$$= \frac{544}{8} = 68''$$

Arithmetic average of m_2

$$= \frac{552}{8} = 69''$$

Standard deviation of m_1

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}} = \sqrt{\frac{36}{8}}$$

$$= 2\cdot12$$

Standard deviation of m_2

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n}} = \sqrt{\frac{44}{8}}$$

$$= 2\cdot34$$

Coefficient of correlation

$$(1)\ r = \frac{\Sigma xy}{n \times \sigma_1 \times \sigma_2}$$

$$= \frac{+24}{8 \times 2\cdot12 \times 2\cdot34}$$

$$= +\cdot6$$

उपरोक्त उदाहरण में दोनों श्रेणियों का प्रमाप विचलन निकाला गया है। यदि सहसम्बन्ध गुणक के सूत्र में प्रमाप विचलन के स्थान पर प्रमाप विचलन निकालने का सूत्र समावेशित कर दिया जाय तो गणना सरल हो जाती है। ऐसा करने पर सहसम्बन्ध गुणक का सूत्र निम्नलिखित होगा :

$$(२)\ व = \frac{यो_{य\ र}}{स\sqrt{\frac{यो_{य^२}}{स}} \times \sqrt{\frac{यो_{र^२}}{स}}}$$

$$(2)\ r = \frac{\Sigma xy}{n\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}} \times \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n}}}$$

इस सूत्र के अनुसार उपरोक्त उदाहरण में

$$व = \frac{+२४}{८ \times \sqrt{\frac{३६}{८}} \times \sqrt{\frac{४४}{८}}}$$

$= +·६$

वास्तव में इस सूत्र को लघुरूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$(३)\ व = \frac{यो_{य र}}{\sqrt{यो_{य^२} \times यो_{र^२}}}$$

$$व = \frac{+२४}{\sqrt{३६ \times ४४}}$$

$= +·६$

According to this formula

$$r = \frac{+24}{8 \times \sqrt{\frac{36}{8}} \times \sqrt{\frac{44}{8}}}$$

$= +·6$

The above formula can be reduced as follows

$$(3)\ r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}}$$

$$r = \frac{+24}{\sqrt{36 \times 44}}$$

$= +·6$

उपरोक्त तीनों रीतियाँ सहसम्वन्ध गुणक की एक ही संख्या देती हैं। यह तीनों ऋजु रीतियाँ हैं और इनमें एक बहुत बड़ी कठिनाई है वह यह कि यदि समान्तर मध्यक पूर्णांक न हो कर भिन्नों में आए तो गणना में बहुत कठिनाई होगी क्योंकि ऐसी परिस्थिति में विचलन और उनके वर्ग दोनों ही भिन्नों में आएँगे। इस कठिनाई को दूर करने के लिए लघु रीति का प्रयोग किया जाता है।

लघु रीति (Short-cut Method)

इस रीति से यह सम्बन्ध गुणक निकालने के लिए कल्पित माध्य का उपयोग होता है। दोनों श्रेणियों में समान्तर मध्यक से विचलन निकालने के स्थान पर कल्पित माध्यों से विचलन निकाले जाते हैं। दोनों श्रेणियों के विचलनों के गुणनफलों को जोड़ने से $यो_{य र}$ ($\Sigma x y$) निकाला जाता है और इस संख्या को संशोधित करने के लिए इसमें से दोनों श्रेणियों के समान्तर मध्यक और कल्पित माध्यों के अन्तर के गुणनफल को पद-संख्या से गुणा कर घटाया जाता है। इस सूत्र में दोनों श्रेणियों का प्रमाप विचलन भी लघु रीति से निकाला जाता है। इस प्रकार से

$$(१)\ व = \frac{यो_{यर} - स[(म_१ - य_१)(म_२ - य_२)]}{स \times चा_१ \times चा_२}$$

जब कि, $म_१$ = प्रथम चल का वास्तविक माध्य

$य_१$ = प्रथम चल का कल्पित माध्य

$म_२$ = द्वितीय चल का वास्तविक माध्य

$य_२$ = द्वितीय चल का कल्पित माध्य

और शेष चिन्ह उन्हीं चीजों के लिए हैं जिनके लिए वे प्रथम सूत्र में हैं।

अथवा

$$(२)\ व = \frac{यो_{यर} - स\left(\frac{यो_य}{स}\right)\left(\frac{यो_र}{स}\right)}{स\sqrt{\frac{यो_{य^२}}{स} - \left(\frac{यो_य}{स}\right)^२}\sqrt{\frac{यो_{र^२}}{स} - \left(\frac{यो_र}{स}\right)^२}}$$

अथवा

$$(३)\ व = \frac{यो_{यर} - \left(\frac{यो_य \times यो_र}{स}\right)}{\sqrt{\left(यो_{य^२} - \frac{(यो_य)^२}{स}\right)\left(यो_{र^२} - \frac{(यो_र)^२}{स}\right)}}$$

$$(1)\ r = \frac{\Sigma xy - n(a_1 - x_1)(a_2 - x_2)}{n \times \sigma_1 \times \sigma_2}$$

where, a_1 = true average of first variable

x_1 = assumed averge of first variable

a_2 = true average of second variable

x_2 = assumed average of second variable

and the other symbols stand for the same things as in the first formula.

or

$$r = \frac{\Sigma xy - n\left(\frac{\Sigma x}{n}\right)\left(\frac{\Sigma y}{n}\right)}{n\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}\sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n} - \left(\frac{\Sigma y}{n}\right)^2}}$$

or

$$(3)\ r = \frac{\Sigma xy - \left(\frac{\Sigma x \times \Sigma y}{n}\right)}{\sqrt{\left(\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right)\left(\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}\right)}}$$

अथवा

$$(४)\ व = \frac{\text{यो}_{य र} \times स - (\text{यो}_{य} \times \text{यो}_{र})}{\sqrt{\text{यो}_{य^२} \times स - (\text{यो}_{य})^२}\ \sqrt{\text{यो}_{र^२} \times स - (\text{यो}_{र})^२}}$$

or

$$(4)\ r = \frac{\Sigma xy \times n - (\Sigma x \times \Sigma y)}{\sqrt{\Sigma x^2 \times n - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{\Sigma y^2 \times n - (\Sigma y)^2}}$$

इन चारों रीतियों से सहसम्बन्ध गुणक एक ही आएगा। निम्नलिखित उदाहरण से यह रीतियाँ स्पष्ट हो जाएँगी।

उदाहरण २

निम्नलिखित सामग्री से कार्ल पियरसन का सहसम्बन्ध गुणक निकालिए।

सारणी संख्या ४

वर्ष	मजदूरों की संख्या (प्रति दिन) (हजारों)	कपास की खपत (लाख गाँठों)
१९२५	३६८	२२
१९२६	३८४	२१
१९२७	३८६	२४
१९२८	३६१	२०
१९२९	३४७	२२
१९३०	३८४	२६
१९३१	३९५	२६
१९३२	४०३	२९
१९३३	४००	२८
१९३४	३८५	२७

उपरोक्त उदाहरण को ऊपर दी हुई चारों लघुरीतियों से ही हल किया गया है

हल

कार्ल पियरसन का सह सम्बन्ध गुणक निकालना

सारणी संख्या ५

वर्ष (year)	मजदूरों की प्रति दिन संख्या: मजदूरों की संख्या (हजारों में) क$_1$ (m_1)	कल्पित माध्य (३८०) से विचलन य (x)	विचलनों का वर्ग य^2 (x^2)	कपास की खपत: गाँठों की संख्या (लाखों में) क$_2$ (m_2)	कल्पित माध्य (२५ से) विचलन र (y)	विचलनों का वर्ग र^2 (y^2)	विचलनों का गुणन फल यर (xy)
१९२५	३६८	−१२	१४४	२२	−३	९	+३६
१९२६	३८४	+४	१६	२१	−४	१६	−१६
१९२७	३८५	+५	२५	२४	−१	१	−५
१९२८	३६१	−१९	३६१	२०	−५	२५	+९५
१९२९	३४७	−३३	१०८९	२२	−३	९	+९९
१९३०	३८४	+४	१६	२६	+१	१	+४
१९३१	३९५	+१५	२२५	२६	+१	१	+१५
१९३२	४०३	+२३	५२९	२९	+४	१६	+९२
१९३३	४००	+२०	४००	२८	+३	९	+६०
१९३४	३८५	+५	२५	२७	+२	४	+१०
स (n) = १०	३४ ०२ ३८०	यो$_य$ = १२ (Σx)	यो$_य$ = २८३० (Σx^2)	२५	यो$_र$ = −५ (Σy)	यो$_{र^2}$ = ९१ (Σy^2)	यो$_{यर}$ = +३९० (Σxy)

पहली रीति

समान्तर मध्यक क$_1$ का

$म_1 = ३८० + \frac{१२}{१०} = ३८१\cdot२$

समान्तर मध्यक क$_2$ का

$म_2 = २५ + \frac{-५}{१०} = २४\cdot५$

क$_1$ का प्रमाप विचलन

$चा_1 = \sqrt{\frac{२८३०}{१०} - \left(\frac{१२}{१०}\right)^2} = १६\cdot७९$

क$_2$ का प्रमाप विचलन

$चा_2 = \sqrt{\frac{९१}{१०} - \left(\frac{-५}{१०}\right)^2} = २\cdot९७$

सहसम्बन्ध गुणक

$$= \frac{३९० - १० \; [(३८१\cdot२ - ३८०)(२४\cdot५ - २५)]}{१०\times१६\cdot७९\times२\cdot९७}$$

$+\cdot८$

First Method:

Arithmetic average of m_1

$a_1 = 380 + \frac{12}{10} = 381\cdot2$

Arithmetic average of m_2

$a_2 = 25 + \frac{-5}{10} = 24\cdot5$

Standard deviation of m_1

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2830}{10} - \left(\frac{12}{10}\right)^2} = 16\cdot79$

Standard deviation of m_2

$\sigma_2 = \sqrt{\frac{91}{10} - \left(\frac{-5}{10}\right)^2} = 2\cdot97$

Coefficient of correlation

$$r = \frac{390 - 10[(381\cdot2 - 380)(24\cdot5 - 25)]}{10\times16\cdot79\times2\cdot97} = +\cdot8$$

दूसरी रीति :

दूसरी, तीसरी और चौथी रीतियों में समान्तर मध्यक तथा प्रमाप विलन निकालने की आवश्यकता नहीं है।

$$व = \frac{३९० - १० \left(\frac{१२}{१०}\right)\left(\frac{-५}{१०}\right)}{१० \sqrt{\frac{२८३०}{१०} - \left(\frac{१२}{१०}\right)^2} \; \sqrt{\frac{९१}{१०} - \left(\frac{-५}{१०}\right)^2}}$$

$$= \frac{३९६}{१०\times१६\cdot७९\times२\cdot९७}$$

$$= +\cdot८$$

Second Method :

In the second, third and fourth methods there is no need to calculate the actual arithmetic average and the standard deviation.

$$r = \frac{390 - 10\left(\frac{12}{10}\right)\left(\frac{-5}{10}\right)}{10\sqrt{\frac{2830}{10} - \left(\frac{12}{10}\right)^2}\sqrt{\frac{91}{10} - \left(\frac{-5}{10}\right)^2}}$$

$$= \frac{396}{13 \times 16{\cdot}79 \times 2{\cdot}91}$$

$$= +{\cdot}8$$

तीसरी रीति :

$$व = \frac{३९० - \left(\frac{+१२ \times -५}{१०}\right)}{\sqrt{\left(२८३० - \frac{(+१२)^2}{१०}\right)}\sqrt{\left(९१ - \frac{(-५)^2}{१०}\right)}}$$

$$= \frac{३९६}{\sqrt{२८१५{\cdot}६ \times ८८{\cdot}५}}$$

$$= +{\cdot}८$$

Third Method :

$$r = \frac{390 - \left(\frac{+12 \times -5}{10}\right)}{\sqrt{\left(2830 - \frac{(+12)^2}{10}\right)}\sqrt{\left(91 - \frac{(-5)^2}{10}\right)}}$$

$$= \frac{396}{\sqrt{2815{\cdot}6 \times 88{\cdot}5}}$$

$$= +{\cdot}8$$

चौथी रीति :

$$व = \frac{३९० \times १० (+१२ \times -५)}{\sqrt{२८३० \times १० - (+१२)^२} \sqrt{९१ \times १० - (-५)^२}}$$

$$= \frac{३९६०}{\sqrt{२८१५६ \times ८८५}}$$

$$= +.८$$

Fourth Method :

$$r = \frac{390 \times 10 (+12 \times -5)}{\sqrt{2830 \times 10 - (+12)^2} \sqrt{91 \times 10 - (-5)^2}}$$

$$= \frac{3960}{\sqrt{28156 \times 885}}$$

$$= +\cdot 8$$

+.८ से यह मालूम पड़ता है कि मजदूरों की संख्या और रुई की खपत में काफी घनिष्ठ सह सम्बन्ध है। यह सम्बन्ध धनात्मक (positive) है। क्योंकि इसमें यों यर(Σxy) धनात्मक संख्या है। इसका अर्थ यह हुआ मजदूरों की संख्या में वृद्धि के साथ-साथ कपास की खपत में भी वृद्धि होती है और मजदूरों की संख्या कम होने पर कपास की खपत भी कम हो जाती है।

काल-श्रेणी में सहसम्बन्ध का अध्ययन (Study of correlation in a time series)

पिछले अध्याय में यह बतलाया जा चुका है कि काल-श्रेणी में मुख्यतः दो प्रकार के परिवर्तन प्रधान होते हैं। एक तो दीर्घकालीन परिवर्तन और दूसरे अल्पकालीन परिवर्तन। दो काल-श्रेणियों में जब परस्पर सहसम्बन्ध का अध्ययन करना होता है तब यह आवश्यक है कि इनके विभिन्न संघटकों के सहसम्बन्ध का अलग-अलग अध्ययन किया जाय। इसका कारण यह है कि यह सम्भव है कि दो काल-श्रेणियों के दीर्घकालीन परिवर्तनों में धनात्मक सहसम्बन्ध हो और उनके अल्पकालीन परिवर्तनों में सहसम्बन्ध ऋणात्मक हो या इसके विपरीत दीर्घकालीन परिवर्तनों में ऋणात्मक सहसम्बन्ध और

अल्पकालीन परिवर्तनों में धनात्मक सहसम्बन्ध हो। ऐसी परिस्थिति में यदि काल-श्रेणी का विश्लेषण किए बिना सहसम्बन्ध का अध्ययन किया गया तो भ्रमात्मक परिणाम निकल सकते हैं। इसलिए यथासम्भव पहले दोनों काल-श्रेणियों में दीर्घकालीन परिवर्तन अथवा उपनति और अल्पकालीन परिवर्तनों को अलग-अलग कर लिया जाय, इसके पश्चात् दोनों श्रेणियों के दीर्घकालीन परिवर्तनों का सहसम्बन्ध और अल्पकालीन परिवर्तनों का सहसम्बन्ध अलग-अलग अध्ययन करना चाहिए।

दीर्घकालीन परिवर्तनों का सहसम्बन्ध (Correlation of long time changes)

दीर्घकालीन परिवर्तनों का सहसम्बन्ध अध्ययन करने के लिए सर्व प्रथम दोनों श्रेणियों के उपनति मूल्य (trend values) मालूम कर लिए जाते हैं। उपनति मूल्य या तो चल-माध्य की रीति से या अल्पतम-वर्ग-रीति (method of least squares) से निकाले जा सकते हैं। इसके पश्चात् दोनों श्रेणियों के उपनति मूल्यों का सह-सम्बन्ध गुणक निकाला जाता है। सहसम्बन्ध गुणक निकालने के लिए किसी विशेष रीति की आवश्यकता नहीं पड़ती। जिन रीतियों का अब तक वर्णन किया जा चुका है, उनमें से किसी भी रीति से सहसम्बन्ध गुणक की गणना की जा सकती है।

अल्पकालीन प्रदोलों का सहसम्बन्ध (Correlation of short time oscillations)

दो काल-श्रेणियों के अल्पकालीन प्रदोलों का सहसम्बन्ध अध्ययन करने के लिए आवश्यक है कि दोनों श्रेणियों से उपनति-मूल्य घटा कर अल्पकालीन प्रदोल मालूम कर लिए जायँ। ऐसा करने से हमारे पास दो ऐसी श्रेणियाँ बन जाएँगी जिनमें केवल अल्पकालीन प्रदोल ही हैं, उपनति नहीं; इन प्रदोलों को आपस में गुणा करने से जो संख्याएँ मिलती हैं उन्हीं का योग यो य यर (Σxy) होता है। अतएव साधारण श्रेणी और ऐसी श्रेणियों के सहसम्बन्ध गुणक निकालने के सूत्र में यह अन्तर हुआ कि ऐसी श्रेणियों में विचलन माध्य से न लेकर चल-माध्य या उपनतिमूल्यों से लिया जाता है। इन्हीं विचलनों के वर्ग को पद-संख्याओं से विभाजित कर, वर्गमूल निकालकर जो संख्या प्राप्त होती है वही इस श्रेणी का प्रमाप विचलन होता है। निम्नलिखित उदाहरण से यह रीति स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण ३

निम्नलिखित सारणी से पंचवर्षीय चल-माध्य लेते हुए अल्पकालीन प्रदोलों का सहसम्बन्ध गुणक निकालिए (दशमलवों को छोड़ दीजिए)

उदाहरण ६

वर्ष	माँग देशनांक	मूल्य देशनांक
१९३७	१०१	११७
१९३८	१०८	९७
१९३९	१०५	१०२
१९४०	१४५	११८
१९४१	१५३	२०५
११४२	१८६	१९६
११४३	२०२	१७७
१९४४	२०७	१६८
१९४५	२०४	१७७
१९४६	१९८	१७०
१९४७	२००	१६५
१९४८	२०८	१७०
१९४९	२३२	१७५
१९५०	२२८	१८०
१९५१	२२२	१९०

(यह संख्याएँ काल्पनिक हैं ।)

हल : गारणी संख्या ७ माँग और मूल्य के अल्पकालीन प्रदोलों का सहसम्बन्ध गुणक निकालना

वर्ष	माँग				मूल्य				
	माँग देशनांक	पंच वर्षीय चल माध्य	चल माध्य से विचलन य (x)	विचलनों का वर्ग $य^2$ (x^2)	मूल्य देशनांक	पंच वर्षीय चल माध्य	चल माध्य से विचलन र (y)	विचलनों का वर्ग $र^2$ (y^2)	विचलनों का गुणनफल य र (xy)
१९३७	१०१				११७				
१९३८	१०८				९७				
१९३९	१०५	१२२	−१७	२८९	१०२	१२८	−२६	६७६	+४४२
१९४०	१४५	१३९	+६	३६	११८	१४४	−२६	६७६	−१५६
१९४१	१५३	१५८	−५	२५	२०५	१६०	+४५	२०२५	−२२५
१९४२	१८६	१७७	+९	८१	१९६	१७३	+२३	५२९	+२०७
१९४३	२०२	१९०	+१२	१४४	१७७	१८५	−८	६४	−९६
१९४४	२०७	१९९	+८	६४	१६८	१७८	−१०	१००	−८०
१९४५	२०४	२०२	+२	४	१७७	१७१	+६	३६	+१२
१९४६	१९८	२०२	−४	१६	१७०	१७०	०	०	०
१९४७	२००	२०८	−८	६४	१६५	१७१	−६	३६	+४८
१९४८	२०८	२१३	−५	२५	१७०	१७२	−२	४	+१०
१९४९	२३२	२१८	+१४	१९६	१७५	१७६	−१	१	−१४
१९५०	२२८				१८०				
१९५१	२२२				१९०				
				$यो_{य^2}$ = ९४४ (Σx^2)				$यो_{र^2}$ (Σy^2) = ४१४७	$यो_{यर}$ (Σxy) = +१४८

सहसम्बन्ध गुणक
(ऋजुरीति सूत्र नं० ३)

$$व = \frac{यो_{यर}}{\sqrt{यो_{य^2} \times यो_{र^2}}}$$

$$= \frac{१४८}{\sqrt{९४४ \times ४१४७}}$$

$= +\cdot ०७$

Coefficient of correlation
direct method
(formula no. 3)

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}}$$

$$= \frac{148}{\sqrt{944 \times 4147}}$$

$= +\cdot 07$

+·०७ से यह परिणाम निकाला जा सकता है कि दोनों श्रेणियों के अल्पकालीन प्रदोलों में सहसम्बन्ध लगभग नहीं के बराबर है। क्योंकि सारणी सं० ६ में दी गई संख्याएँ काल्पनिक हैं इसीलिए ऐसा परिणाम निकला है अन्यथा माँग और मूल्य देशनांकों के अल्पकालीन प्रदोलों में साधारणतः घनिष्ठ धनात्मक सहसम्बन्ध की आशा की जा सकती है।

वर्गित श्रेणियों में सहसम्बन्ध गुणक निकालना (Calculation of coefficient of correlation in a grouped series)

यदि चल के मूल्य वर्गित किये गये हों और प्रत्येक वर्ग के लिए बारंबारता दी गई हो तो सामग्री का द्विगुण-सारणीयन (double tabulation) किया जाता है। मान लीजिए दो चलों य और र को क्रमशः ५ और १० वर्गान्तर लेकर वर्गित किया गया है और उनसे प्राप्त सारणी निम्न प्रकार की है:

सारणी संख्या ८

पुत्रियों की आयु य—श्रेणी (x—series)

वर्ष	पुत्रियों की संख्या
५–१०	९
१०–१५	२९
१५–२०	३२
२०–२५	२१
२५–३०	९
योग	१००

सारणी संख्या ९

मातात्रों की आयु र–श्रेणी (y–series)

वर्ष	मातात्रों की संख्या
१५–२५	९
२५–३५	२९
३५–४५	३२
४५–५५	२१
५५–६५	९
योग	१००

इन सारणियों में दी गई सूचनाओं को द्विगुण-सारणी में रखने के लिए यह जानना भी आवश्यक है कि समूह का एक पद चलों के इन मूल्यों में किस-किस मूल्य को लेता है। मान लीजिए कोई तीन पद, चल य का मूल्य ५–१० वर्ग में और चल र का मूल्य २५–३५ वर्ग में लेते हैं। इन पदों की बारंबारता ३ हुई। मान लीजिए ४५-५५ आयु की १० माताओं की पुत्रियों की आयु २०–२५ वर्ष है तो द्विगुण सारणी में इन वर्गों की बारंबारता १० होगी। इस प्रकार हम यह जान सकते हैं कि इन चलों के मूल्यों में से दो निश्चित मूल्य लेने वाले पदों की संख्या कितनी है। मान लीजिए हमें सूचनाएँ प्राप्त हैं तो इनको द्विगुण-सारणी के रुप में दिखाया जा सकता है। इस प्रकार की सारणी को सहसम्बन्ध सारणी (Correlation table) भी कहते हैं।

सारणी संख्या १०

मातात्रों और पुत्रियों की आयु

मातात्रों की आयु वर्षों में र	पुत्रियों की आयु वर्षों में-य (x)					योग
	५—१०	१०—१५	१५—२०	२०—२५	२५—३०	
१५—२५	६	३	—	—	—	९
२५—३५	३	१६	१०	—	—	२९
३५—४५	—	१०	१५	७	—	३२
४५—५५	—	—	७	१०	४	२१
५५—६५	—	—	—	४	५	९
योग	९	२९	३२	२१	९	१००

इस सारणी में पिछली दो सारणियों की अपेक्षाकृत अधिक सूचना दी गई है। पिछली सारणियों में केवल यह बताया गया था कि चलों के विभिन्न मूल्यों की वारंवारता कितनी है। इसमें यह भी बताया गया है कि चलों के निश्चित मूल्य लेने वाले पदों की संख्या कितनी है, जैसे य चल के १५–२० मूल्य और र चल के २५–३५ मूल्य लेने वाले पदों की संख्या १० है। इसी प्रकार य चल के २५–३० और र चल ४५–५५ मूल्य लेने वाले पदों की संख्या ४ है। चलों के कुछ मूल्यों को लेने वाले पदों की संख्या शून्य है, अर्थात् ऐसे पद समूह में नहीं हैं। उपर्युक्त सारणी संख्या १० में यह मूल्य प्रास (dash) से दिखाए गये हैं।

द्विगुण-सारणी में वर्गित श्रेणियों के लिए भी सहसम्बन्ध गुणक पिछले पृष्ठों में दी गई रीति के अनुसार निकाला जा सकता है। सूत्र में कोई विशेष अन्तर की आवश्यकता नहीं होती। केवल ^यो^ यर (Σxy) निकालते समय वारंवारताओं का भी ध्यान रखना पड़ता है। अतः ^यो^ यर के स्थान पर ^यो^ वयर (Σfxy) का प्रयोग करना पड़ता है। निम्नलिखित उदाहरण से यह स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण ४ :

ऊपर सारणी संख्या १० में दी गई सामग्री से माताओं और पुत्रियों की आयु का कार्ल-पियरसन-सहसम्बन्ध गुणक निकालिए।

हल :

सारणी संख्या ११ :

य श्रेणी का प्रमाप विचलन निकालना

पुत्रियों की आयु	मध्य-मूल्य (mid-values) य (x)	वारंवारता (frequency) व (f)	कल्पित माध्य (१७.५) से विचलन च (d)	विचलनों का वर्ग च² (d²)	कुल विचलन (total dev.) व च (fd)	विचलनों का कुल वर्ग व×च² (fd²)
५–१०	७.५	९	—१०	१००	— ९०	९००
१०–१५	१२.५	२९	— ५	२५	—१४५	७२५
१५–२०	१७.५	३२	०	०	०	०
२०–२५	२२.५	२१	+ ५	२५	+१०५	५२५
२५–३०	२५.७	९	+१०	१००	+ ९०	९००
		स(n) =१००			^यो^ व च = —४० (Σfd)	^यो^ व च² =३०५० (Σfd²)

समान्तर मध्यक

$$म_1 = १७.५ + \left(\frac{४०}{१००}\right)$$

$$= १७.१ \text{ वर्ष}$$

प्रमाप विचलन

$$चा_1 = \sqrt{\frac{यो_{वच^२}}{स} - \left(\frac{यो_{वच}}{स}\right)^२}$$

$$= \sqrt{\frac{३०५०}{१००} - \left(\frac{-४०}{१००}\right)^२}$$

$$= \sqrt{३०.३४}$$

$$= ५.५ \text{ वर्ष}$$

Arithmetic average

$$a_1 = 17.5 + \left(\frac{-40}{100}\right)$$

17.1 years

Standard deviation

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3050}{100} - \left(\frac{-40}{100}\right)^2}$$

$$= \sqrt{30.34}$$

$$= 5.5 \text{ years.}$$

सारणी संख्या १२

र श्रेणी का प्रमाप विचलन निकालना

माताओं की आयु	मध्य-मूल्य (mid-value) य (x)	वारंवारता (frequency) व (f)	कल्पित माध्य (४०) से विचलन च (d)	विचलनों का वर्ग $च^2$ (d^2)	कुल विचलन (total dev.) व × च (fd)	विचलनों का कुल वर्ग व × $च^2$ (fd^2)
१५–२५	२०	९	−२०	४००	−१८०	३६००
२५–३५	३०	२९	−१०	१००	−२९०	२९००
३५–४५	४०	३२	०	०	०	०
४५–५५	५०	२१	+१०	१००	+२१०	२१००
५५–६५	६०	९	+२०	४००	+१८०	३६००
		स(n) = १००			$यो_{वच}$ = −८० (Σfd)	$यो_{वच^2}$ = १२२०० (Σfd^2)

समान्तर मध्यक:

$$म_२ = ४० + \left(\frac{-८०}{१००}\right) = ३९.२ \text{ वर्ष}$$

प्रमाप विचलन

$$चा_२ = \sqrt{\frac{यो \; वच^२}{स} - \left(\frac{यो \; वच}{स}\right)^२}$$

$$= \sqrt{\frac{१२२००}{१००} - \left(\frac{-८०}{१००}\right)^२}$$

$$\sqrt{१२१.३६}$$

$$= ११ \text{ वर्ष}$$

Arithmetic average :

$$\sigma_2 = 40 + \left(\frac{-80}{100}\right) = 39.2 \text{years}$$

Standard deviation

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{12200}{100} - \left(\frac{-80}{100}\right)^2}$$

$$= \sqrt{121.36}$$

$$= 11 \text{ years}$$

अब सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात करने के लिये दोनों श्रेणियों के विचलनों के गुणनफल का योग अथवा यो य र (Σxy) मालूम करना है। इसके लिए सारणी संख्या ११ और १२ में कल्पित माध्यों से लिए हुए विचलनों को सारणी संख्या १३ में लाया गया है।

सारणी संख्या १३ :

विचलनों के गुणनफल का योग निकालना

आयु–पुत्री→ माता ↓	विचलन र य→ ↓	५–१०	१०–१५	१५–२०	२०–२५	२५–३०	
		−१०	−५	०	+५	+१०	
१५–२५	−२०	१२०० ६	३०० ३				१५००
२५–३५	−१०	३०० ३	८०० १६	० १०			११००
३५–४५	०		० १०	० १५	० ७		
४५–५५	+१०			० ७	५०० १०	४०० ४	९००
५५–६५	+२०				४०० ४	१००० ५	१४००
		१५००	११००	०	९००	१४००	४९०० योचयर (Σfxy)

उपर्युक्त सारणी में जो संख्याएँ प्रत्येक खाने के बाईं ओर ऊपर के सिरे में मोटे अंकों में दी गई हैं वे य और र श्रेणी के कल्पित माध्यों से विचलनों और वारंवारताओं के गुणनफल के बराबर हैं, जैसे य श्रेणी के ५–१० वर्ग के मध्य-मूल्य का कल्पित माध्य से विचलन –१० है। और इसी प्रकार र श्रेणी के १५–२० वर्ग के मध्य मूल्य का विचलन –२० है। इन दोनों वर्गों में आने वाले पदों की संख्या ६ है। अब दोनों विचलनों और इस वारंवारता का गुणनफल (–१०×–२०×६) १२०० हुआ। यही संख्या सारणी में दिखाई गई है। इसी प्रकार प्रत्येक खाने में विचलनों और वारंवारता का गुणनफल दिया हुआ है। इस प्रकार के कुल गुणनफलों का योग ४९०० हुआ। यही कल्पित माध्य से $^{यो}$व य र (Σfxy) का मूल्य हुआ।

सहसम्बन्ध गुणक

$$स = \frac{^{यो}वयर - स[(म_१ - य_१)(म_२ - य_२)]}{स \times चा_१ \times चा_२}$$

$$स = \frac{४९०० - १००[(१७.१ - १७.५)(३९.२ - ४०)]}{१०० \times ५.५ \times ११}$$

$$= \frac{४८६८}{६०५०}$$

$$= +.८$$

Coefficient of correlation

$$r = \frac{\Sigma fxy - n[(a_1 - x_1)(a_2 - x_2)]}{n \times \sigma_1 \times \sigma_2}$$

$$r = \frac{4900 - 100[(17.1 - 17.5)(39.2 - 40)]}{100 \times 5.5 \times 11}$$

$$= \frac{4868}{6050}$$

$$= +.8$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि माताओं और पुत्रियों की आयु में घनिष्ठ धनात्मक सहसम्बन्ध है।

लघु रीति :

उपरोक्त रीति से सहसम्बन्ध गुणक निकालने में बहुत समय लगता है, क्योंकि इस रीति के अनुसार दोनों श्रेणियों का समान्तर मध्यक तथा प्रमाप विचलन निकालना पड़ता है। यह संख्याएँ अधिकतर भिन्नों में आती हैं और इसलिए गणना में कठिनाई होती है। इन कठिनाइयों को दूर करने के लिए लघु रीति का प्रयोग किया जाता है। इसमें कल्पित माध्य से लिए गये विचलनों को वर्ग विस्तार से विभाजित कर दिया जाता है और सहसम्बन्ध निकालने में इन्हीं का प्रयोग किया जाता है। इसके सहसम्बन्ध गुणक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि इससे अंश (numerator)

माताओं और पुत्रियों की आयु का सहसम्बन्ध गुणक निकालना

(बाईं ओर: माताओं की आयु-वर्षों में)

				पुत्रियों की आयु वर्षों में								
				५–१०	१०–१५	१५–२०	२०–२५	२५–३०				
				मध्य मूल्य ७·५	१२·५	१७·५	२२·५	२७·५				
		विचलन य (x)		–१०	–५	०	+५	+१०	योग (Total)	व×र	व×र²	व×य×र
		र (y) विचलन		–२	–१	०	+१	+२	व (f)	(fy)	(fy²)	(f×x×y)
१५–२५	मध्य-मूल्य २०	–२०	–२	२४ ९	६ ३				९	–१८	३६	३०
२५–३५	३०	–१०	–१	६ ३	१६ १६	० १०			२९	–२९	२९	२२
३५–४५	४०	०	०		० १०	० १५	० ७		३२	०	०	०
४५–५५	५०	+१०	+१			० ७	१० १०	८ ४	२१	+२१	२१	१८
५५–६५	६०	+२०	+२				८ ४	२० ५	९	+१८	३६	२८
योग व (Total f)				९	२९	३२	२१	९	१००	योवर (Σfy) = –८	यो वर² (Σfy²) = १२२	
व×य (fx)				–१८	–२९	०	+२१	+१८	यो वय (Σfx) = –८			
व×य² (fx²)				३६	२९	०	२१	३६	यो वय² (Σfx²) = १२२			
व×य×र (f×x×y)				३०	२२	०	१८	२८			यो वयर (Σfxy) = ९८	

और हर (denominator) दोनों एक ही अनुपात में कम होते हैं। इस नीति के अनुसार केवल एक सारणी से ही सहसम्बन्ध गुणक निकाला जा सकता है। पिछली रीति की तरह सारणियों की आवश्यकता नहीं पड़ती। सहसम्बन्ध गुणक के सूत्र वही रहते हैं जिनका पिछले पृष्ठों में वर्णन किया जा चुका है। सारणी संख्या १४ में ऊपर दिए हुए उदाहरण नं० ४ को लघु रीति से हल किया गया है।

उपरोक्त सारणी में सहसम्बन्ध गुणक मालूम करने के लिए जिन-जिन पद-मूल्यों की आवश्यकता पड़ती है वे सब निकाल लिए गये हैं। क्योंकि इस प्रश्न में य और र श्रेणी के विभिन्न वर्गों की बारंबारता समान है, इसलिए सारणी संख्या १४ में $^{यो}$वय (Σfx) और $^{यो}$वर (Σfy) का और $^{यो}$वय (Σfx^2) और $^{यो}$वर^2 (Σfy^2) मूल्य बराबर हैं। यह कोई आवश्यक नहीं कि सदैव ऐसा ही हो।

अब पहले दिए गये लघु रीति के दूसरे, तीसरे या चौथे किसी भी सूत्र का उपयोग कर सहसम्बन्ध गुणक निकाला जा सकता है। उत्तर एक ही आयगा। नीचे चौथे सूत्र का उपयोग किया गया है। गणना में सरलता के लिए छेदा तथा प्रतिच्छेदा का प्रयोग भी किया जा सकता है।

सहसम्बन्ध गुणक

$$व = \frac{^{यो}वयर \times स - (^{यो}वय \times ^{यो}वर)}{\sqrt{^{यो}वय^2 \times स - (^{यो}वय)^2} \quad \sqrt{^{यो}वर \times स - (^{यो}वर)^2}}$$

$$= \frac{९८ \times १०० - (-८ \times -८)}{\sqrt{१२२ \times १०० - (-८)^2} \quad \sqrt{१२२ \times १०० - (-८)^2}}$$

$$= \frac{९८०० - ६४}{\sqrt{१२१३६ \times १२१३६}}$$

$$= \frac{९७३६}{१२१३६}$$

$$= +.८$$

Coefficient of correlation

$$r = \frac{\Sigma fxy \times n - (\Sigma fx \times \Sigma fy)}{\sqrt{\Sigma fx^2 \times n - (\Sigma fx)^2} \quad \sqrt{\Sigma fy^2 \times n - (\Sigma fy)^2}}$$

$$= \frac{98 \times 100 - (-8 \times -8)}{\sqrt{122 \times 100 - (-8)} \quad \sqrt{122 \times 100 - (-8)^2}}$$

$$= \frac{9800 - 64}{\sqrt{12136 \times 12136}}$$

$$= \frac{9736}{12136}$$

$$= +\cdot 8$$

इस प्रकार यह स्पष्ट हो गया कि माताओं और पुत्रियों की आयुओं में घनिष्ठ धनात्मक सहसम्बन्ध है। यह बात ध्यान रखनी चाहिए कि यदि पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध होता है तो कार्ल पियरसन का गुणक+१ होता है और इसी प्रकार पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध में इसका गुणक–१ होता है।

सहसम्बन्ध गुणक का संभाव्य विभ्रम

(Probable error of the coefficient of correlation)

सहसम्बन्ध गुणक की गणना करने के बाद इस पर भी विचार करना होता है कि यह किस अंश तक विश्वसनीय है। इसको जानने के लिए सहसम्बन्ध गुणक के संभाव्य विभ्रम की गणना की जाती है। संभाव्य विभ्रम (probable error) का सिद्धान्त निदर्शन सिद्धान्त (theory of sampling) के अन्तर्गत आता है, अतएव इस पर यहाँ विचार नहीं किया जायगा। यहाँ इतना ही जानना पर्याप्त होगा कि संभाव्य विभ्रम को संगणित सहसम्बन्ध-गुणक में जोड़ने से और घटाने से प्राप्त संख्याएँ, सहसम्बन्ध गुणक के लिए वे सीमाएँ हैं जिनके बीच (यदि एक समग्र (universe) से निदर्शन (sample) लिए जाय) सहसम्बन्ध-गुणक के मूल्य हो सकते है अर्थात् इस सीमाओं से बाहर समग्र से लिए गए निदर्शनों के सहसम्बन्धों का मूल्य नहीं जा सकता। सहसम्बन्ध गुणक के संभाव्य-विभ्रम की गणना करने के लिए निम्न-लिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है :

सहसम्बन्ध गुणक व का सम्भाव्य विभ्रम

$$= ०\cdot६७४५ \frac{१ - व^2}{\sqrt{स}}$$

जबकि, व = सहसम्बन्ध गुणक
स = पदों की संख्या

Probable error of the cofficient of correlation

$$= 0\cdot6745 \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$$

where, r = coefficient of correlation
n = number of items

सहसम्बन्ध गुणक में सम्भाव्य विभ्रम को जोड़ने से एक सीमा और घटाने से दूसरी सीमा ज्ञात हो जाती है। उपरोक्त उदाहरण नं० ४ में दी गई सामग्री से संभाव्य विभ्रम निम्न प्रकार निकलेगा :

सम्भाव्य विभ्रम

$$= ०\cdot६७४५ \frac{१ - (\cdot८)^२}{\sqrt{१००}}$$
$$= ०\cdot६७४५ \times \cdot०३६$$
$$= \cdot०२४$$

Probable error

$$= 0\cdot6745 \frac{1 - (\cdot8)^2}{\sqrt{100}}$$
$$= 0\cdot6745 \times \cdot036$$
$$= \cdot024$$

अब उपरोक्त उदाहरण का सहसम्बन्ध गुणक निम्न प्रकार लिखा जाना चाहिए;

व = ·८ ± ·०२४ $\qquad$ r = ·8 ± ·024

उपरोक्त सहसम्बन्ध गुणक की सीमाएँ ·८ + ·०२४ या ·८२४ और ·८ − ·०२४ या ·७७६ हुईं। माताओं और पुत्रियों का यदि एक अन्य समूह दैव निदर्शन (random sampling) से लिया जाय तो यह आशा की जा सकती है कि उस समूह में माताओं और पुत्रियों की आयु का सहसम्बन्ध गुणक इन दो सीमाओं के बीच होगा।

यह जानने के लिए कि सहसम्बन्ध गुणक सर्थपूर्ण (significant) है या नहीं निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना चाहिए।

(१) यदि सहसम्बन्ध गुणक अपने सम्भाव्य विभ्रम से कम है तो सहसम्बन्ध बिल्कुल भी अर्थपूर्ण नहीं है।

(२) यदि सहसम्बन्ध गुणक सम्भाव्य विभ्रम के ६ गुने से अधिक है तो वह अर्थपूर्ण समझा जाता है।

(३) साधारणतः यदि सम्भाव्य विभ्रम अधिक न हो और सहसम्बन्ध गुणक ·५ या उससे अधिक हो तो अर्थपूर्ण माना जाता है।

उपरोक्त उदाहरण में सहसम्बन्ध गुणक सम्भाव्य विभ्रम के ३० गुने से भी अधिक है, इसलिए यह अर्थपूर्ण है। इसका यह अर्थ हुआ कि साधारणतः अधिक आयु वाली माताओं की पुत्रियों की भी आयु अधिक है, और कम आयु वाली माताओं की पुत्रियों की भी आयु कम। इसका यह अर्थ नहीं कि प्रत्येक अधिक आयु वाली माता की पुत्री की आयु भी अधिक होगी। यह हो सकता है कि किसी अधिक आयु वाली माता की पुत्री की आयु सापेक्षतः कम हो या किसी कम आयु वाली माता की पुत्री की आयु सापेक्षतः अधिक हो। यह याद रखना चाहिए कि सहसम्बन्ध दो समूहों के सम्बन्ध को प्रदर्शित करता है, उनके विभिन्न पदों के सम्बन्ध को नहीं।

क्रमान्तर-रीति द्वारा सहसंबंध-गुणक की गणना
(Calculation of coefficient of correlation by Rank method)

कभी-कभी ऐसी समस्याओं का सामना करना पड़ता है जिनमें समूह के विभिन्न पदों को एक निश्चित क्रमानुसार तो रखा जा सकता है पर उन्हें परिमाणात्मक (quantitative) रूप में नापना संभव नहीं होता, जैसे कोई अध्यापक कक्षा के विद्यार्थियों की योग्यता को क्रमानुसार रख सकता है अर्थात् वह यह कह सकता है कि एक विद्यार्थी दूसरे से अधिक योग्य है या कम, पर वह यह नहीं बता सकता कि पहला दूसरे से कितना अधिक योग्य है, वैसे विद्यार्थियों की परीक्षा लेकर उनके प्राप्तांकों के अनुसार योग्यता मानी जा सकती है। पर इस विधि को सही नहीं माना जा सकता। ऐसे कई गुण (qualities) हैं जिनके लिए निश्चित परिमाणात्मक माप नहीं हैं—उदाहरणार्थ योग्यता, कुशल ईमानदारी, सच्चरित्रता आदि। इसके साथ-साथ उन स्थानों में भी क्रमानुसार विन्यस्त सामग्री का उपयोग करना पड़ता है, जहाँ समय, द्रव्य या उपादानों (instruments) के अभाव के कारण बिल्कुल सही परिमाणात्मक माप लेना संभव नहीं होता। संगणना (computation) के श्रम से बचने के लिए भी इस विधि का उपयोग किया जाता है। जैसे यदि समूह के प्रत्येक सदस्य की लम्बाई नापी जाय तो श्रम अधिक करना पड़ेगा। पर सदस्यों को क्रमानुसार आसानी से रखा जा सकता है।

मान लीजिए किसी समूह में एक चल (लम्बाई) के मूल्य ७०", ६६", ६५", ६३", ७३" हैं। इन्हें यदि क्रमानुसार रखा जाय तो पहली क्रम-संख्या ७३ की होगी

और इसका क्रम-स्थान (rank) १ होगा, दूसरी ७०" होगी, इसका क्रम स्थान २ होगा, इस प्रकार ६६, ६५ और ६३ के क्रम-स्थान क्रमशः ३,४ और ५ होंगे। इसी रीति से दूसरे समूह के सदस्यों का भी क्रम-स्थान निर्धारित किया जा सकता है। अधिकतम मान वाले पद का क्रम-स्थान १ है, इससे कम वाले का २ और इसी प्रकार प्रत्येक पद के लिए। यदि किसी क्रम-स्थान के लिए दो पद एक साथ हों तब उन दोनों के क्रम-स्थान निकालने में साधारण-सी कठिनाई होती है। मान लीजिए दो पदों का मूल्य समान है और उनकी क्रम-संख्या तीसरी है तो उन्हें उन क्रम-संख्याओं की माध्य-क्रम संख्या दी जाएगी जो कि उन्हें तब मिलती जब कि उनमें थोड़ा-सा अन्तर होता। इस नियम के अनुसार इन दोनों पदों की क्रम-संख्या $\frac{३+४}{२}$ या ३.५ होगी और अगले पद की क्रम-संख्या ५ होगी।

इस प्रकार दोनों श्रेणियों की कुल सामग्री की क्रम-संख्यायें निर्धारित करने के पश्चात् क्रम संख्याओं का अन्तर मालूम किया जाता है। सहसम्बन्ध गुणक निकालने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$व_र = १ - \frac{६(यो\ च^२)}{स(स^२ - १)}$$

जब कि, $व_र$ = सहसम्बन्ध गुणक

$यो\ च^२$ = क्रम-संख्याओं के अन्तर के वर्ग का योग

स = पद-संख्या

$$r_r = 1 - \frac{6(\Sigma d^2)}{n(n^2 - 1)}$$

where rr = Coefficient of correlation

Σd^2 = the total of the differences of the ranks squared up

n = number of items

निम्नलिखित उदाहरण से यह रीति स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण ५

निम्नलिखित श्रेणियों के लिए क्रम-स्थान निर्धारण रीति (ranking-method) से सहसम्बन्ध गुणक की गणना कीजिए।

सारणी संख्या १५

य	६०	३४	४०	५०	२५	४१	२२	४३	४२	६६	६४	४६
र	७५	३२	३४	४०	४५	३३	१२	३०	३६	७२	४१	५७

हल :

क्रम-स्थान निर्धारण रीति से सहसम्बन्ध गुणक निकालना

सारणी संख्या १६

य (x)	क्रम-स्थान (Rank)	र (y)	क्रम-स्थान (Rank)	क्रम-स्थानों का अन्तर च (d)	च² (d²)
६०	३	७५	१	२	४
३४	११	३२	१०	१	१
४०	१०	३४	८	२	४
५०	४	४०	६	−२	४
४५	६	४५	४	२	४
४१	९	३३	९	०	०
२२	१२	१२	१२	०	०
४३	७	३०	११	−४	१६
४२	८	३६	७	१	१
६६	१	७२	२	−१	१
६४	२	४१	५	−३	९
४६	५	५७	३	२	४
स (n)=१२				यो$_{च}$ = ० (Σd)	यो$_{च^२}$ = ४८ (Σd²)

सहसम्बन्ध गुणक :

$$(१)\quad ब_र = १ - \frac{६ (यो_{च^२})}{स(स^२ - १)}$$

$$= १ - \frac{६(४८)}{१२(१२^२ - १)}$$

$$= १ - \frac{२८८}{१७१६}$$

$$= \frac{१४२८}{१७१६}$$

$$= \cdot ८२$$

Coefficient of Correlation

$$(1)\quad r_r = 1 - \frac{6\,(\Sigma d^2)}{n\,(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\,(48)}{12\,(12^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{288}{1716}$$

$$= \frac{1428}{1716}$$

$$= \cdot 82$$

अथवा

(२) $व_र = १ - \frac{६ (\text{यो } च^२)}{स^३ - स}$

$= १ - \frac{६ \ (४८)}{१२^३ - १२}$

$= १ - \frac{२८८}{१७१६}$

$= + \cdot ८$

(2) $r_r = 1 - \frac{6 \ (\Sigma d^2)}{n^3 - n}$

$= 1 - \frac{6 \ (48)}{12^3 - 12}$

$= 1 - \frac{288}{1716}$

$= + \cdot 8$

कभी-कभी एक श्रेणी के दो या अधिक पदों को एक ही क्रम स्थान दिया जाता है। ऐसे स्थानों में उन पदों को दिए गए क्रम स्थान माध्य क्रम स्थान होते हैं। जैसे यदि एक श्रेणी में दो पदों के क्रम स्थान ५ हैं तो प्रत्येक को ५ और ६ की माध्य संख्या क्रम-स्थान के रूप में दी जाएगी अर्थात् प्रत्येक का क्रम-स्थान ५½ होगा और इसके बाद आने वाली संख्या का क्रम-स्थान ७ होगा। ऐसी दशाओं में क्रम-स्थान सहसंबंध गुणक के मूल्य में कुछ संशोधन करना पड़ता है क्योंकि इसका सूत्र इस कल्पना (assumption) पर आधारित है कि किसी समूह या श्रेणी के दो पदों का एक ही क्रम-स्थान नहीं हो सकता।

यदि किसी समूह में इस प्रकार संयुक्त की हुई संख्याओं के एक वर्ग (group) में 'म' (m) सदस्य हैं तो यो$च^२$ के मूल्य में $\frac{१}{१२}$ $(म^३ - म)$, $[\frac{1}{12} (m^3 - m)]$ दिया जाता है और फिर पिछली रीति से सहसम्बन्ध गुणक की गणना कर ली जाती है। अगर इस प्रकार संयुक्त वर्ग एक से अधिक है तो सूत्र (अर्थात् $\frac{१}{१२}$ $(म^३ - म)$ को उतनी ही बार जोड़ना पड़ेगा।

उदाहरण ६

निम्नलिखित श्रेणियों का क्रमसंख्या निर्धारण रीति से सहसम्बन्ध गुणक निकालिए।

सारणी संख्या १७

य	४८	३३	४०	९	१६	१६	६५	२४	१६	५७
र	१३	१३	२४	६	१५	४	२०	९	६	१९

हल :

क्रम-संख्या निर्वारण रीति से सहसम्बन्ध गुणक निकालना ।

सारणी संख्या १८

य (x)	क्रम-स्थान (Rank)	र (y)	क्रम-स्थान (Rank)	क्रम स्थानों का अन्तर च (d)	च² (d²)
४८	३	१३	५.५	−२·५	६·२५
३३	५	१३	५.५	−०·५	·२५
४०	४	२४	१	+३·०	९.००
९	१०	६	८.५	+१·५	२.२५
१६	८	१५	४	+४·०	१६.००
१६	८	४	१०	−२·०	४.००
६५	१	२०	२	−१·०	१.००
२४	६	९	७	−१·०	१.००
१६	८	६	८.५	−०·५	.२५
५७	२	१९	३	−१·०	१.००
स (n)=१०				यो च = ० (Σd)	यो च² = ४१.०० (Σd²)

य श्रेणी में १६ तीन बार आता है इसलिए इनके क्रम-स्थान ८ लिखे गये हैं $\left(\frac{७+८+९}{३}\right)$। र श्रेणी में १३ और ६ दो-दो बार आते हैं। इनके क्रम-स्थान क्रमशः ५.५ और ८.५ लिखे गये हैं $\left(\frac{५+६}{२} \text{ और } \frac{८+९}{२}\right)$ इनके कारण सहसम्बन्ध गुणक निकालने में संशोधित सूत्र का उपयोग करना पड़ेगा।

संशोधन के लिए यो च² (Σd²) में $\frac{१}{१२}$ (म³ − म) $[\frac{1}{12}(m^3-m)]$ के मूल्य जोड़ने पड़ेंगे। य श्रेणी के लिए $\frac{१}{१२}$ (म³ − म) बराबर $\frac{१}{१२}$(३³ − ३) हुआ, (क्योंकि इस श्रेणी में १६ तीन बार आया है। र श्रेणी में दो संयुक्त वर्ग आये हैं। पहले के लिये इसका मूल्य $\frac{१}{१२}$(२³ − २) हुआ (क्योंकि १३ दो बार आया है।(और दूसरे के लिए भी इसका मूल्य $\frac{१}{१२}$(२³ − २) हुआ (क्योंकि ६ भी दो बार आया है)।

अत्र

$$व_{र} = १ - \frac{६[यो च^२ + \frac{१}{१२}(म^३ - म)]}{स^३ - स}$$

$$= १ - \frac{६[४१ + \frac{१}{१२}(३^३ - ३) + \frac{१}{१२}(२^३ - २) + \frac{१}{१२}(२^३ - २)]}{१०^३ - १०}$$

$$= १ - \frac{६(४१ + २ + ·५ + ·५)}{९९०}$$

$$= १ - \frac{११}{१५}$$

$$= + ·७३$$

$$r_{r} = 1 - \frac{6[\Sigma d^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m)]}{n^3 - n}$$

$$= 1 - \frac{6[41 + \frac{1}{12}(3^3 - 3) + \frac{1}{12}(2^3 - 2) + \frac{1}{12}(2^3 - 2)]}{10^3 - 10}$$

$$= 1 - \frac{6(41 + 2 + ·5 + ·5)}{990}$$

$$= 1 - \frac{11}{15}$$

$$= + 73$$

संगामी विचलन गुणक
(Coefficient of Concurrent Deviations)

कभी-कभी दो श्रेणियों के मध्य सहसम्बन्ध की एक बहुत साधारण सी गणना की आवश्यकता पड़ जाती है, जहां पर कि मुलभ्यता और परिशुद्धता का विशेष ध्यान रखना आवश्यक नहीं होता। ऐसी परिस्थिति में संगामी विचलन गुणक निकाल लेना पर्याप्त होता है। इसके द्वारा दो श्रेणियों में विचलनों की दिशाओं का सहसम्बन्ध निकाला जाता है। इसमें विचलनों की मात्रा की गणना नहीं की जाती केवल उनकी दिशा ही का ध्यान रखा जाता है।

यह पहले बताया जा चुका है कि यदि दो काल-श्रेणियों के अल्पकालीन परिवर्तन में धनात्मक सहसम्बन्ध है, अर्थात् यदि उनके विचलन संगामी (concurrent) हैं तो उनके वक्र एक ही दिशा में होंगे और यदि उनके विचलन संगामी नहीं हैं तो उनके वक्र विभिन्न दिशाओं में होंगे और इस बात का संकेत करेंगे कि उनमें ऋणात्मक सहसम्बन्ध है, संगामी विचलन गुणक इसी आधार पर निकाला जाता है और साधारणतः यह अल्पकालीन परिवर्तनों का ही सहसम्बन्ध बतलाता है।

संगामी विचलन गुणक निकालने के लिए विचलन, माध्य या चल-माध्य की रीति से नहीं निकाले जाते, विचलन पिछली कालावधि से लिए जाते हैं। यह ध्यान रहे कि विचलनों की मात्रा नहीं लिखी जाती केवल दिशा ही लिखी जाती है। संगामी विचलन गुणक का जो सूत्र नीचे दिया जा रहा है उसका अधिकतम मूल्य ± 1 ही होता है।

संगामी विचलन गुणक

$$\text{वि} \pm \sqrt{\pm \left(\frac{२\,\text{गा} - \text{स}}{\text{स}}\right)}$$

जबकि, वि = संगामी विचलन गुणक

गा = संगामी विचलन युग्मों की संख्या

स = अवलोक युग्मों की संख्या

Coefficient of Concurrent Deviations

$$r = \pm \sqrt{\pm \left(\frac{2c - n}{n}\right)}$$

where, r = coefficient of concurrent deviations

c = number of pairs of concurrent diviations

n = number of pairs

निम्नलिखित उदाहरण से उपरोक्त सूत्र स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण ७

निम्नलिखित सामग्री से संगामी विचलन गुणक निकालिए।

सारणी संख्या १९

वर्ष	पूर्ति-देशनांक	मूल्य-देशनांक
१९४३	१६०	२९२
१९४४	१६४	२८०
१९४५	१७२	२६०
१९४६	१८२	२३४
१९४७	१६६	२६६
१९४८	१७०	२५४
१९४९	१७८	२३०
१९५०	१९२	१९०
१९५१	१८६	२००

हल :

पूर्ति और मूल्य देशनांकों का संगामी विचलन गुणक निकालना

सारणी संख्या २०

वर्ष (year)	पूर्ति		मूल्य		य × र (x × y)
	पूर्ति देशनांक	पिछले वर्ष से विचलन य (x)	मूल्य देशनांक	पिछले वर्ष से विचलन र (y)	
१९४३	१६०		२९२		
१९४४	१६४	+	२८०	−	−
१९४५	१७२	+	२६०	−	−
१९४६	१८२	+	२३४	−	−
१९४७	१६६	−	२६६	+	−
१९४८	१७०	+	२५४	−	−
१९४९	१७८	+	२३०	−	−
१९५०	१९२	+	१९०	−	−
१९५१	१८६	−	२००	+	−

संगामी विचलन गुणक

$$वि = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{२ गा - स}{स}\right)}$$

उपरोक्त उदाहरण में;

स = ८ (क्योंकि सन् १९४४ से १९५१ तक के विचलन ही लिए जा सकते हैं।)

गा = ० (क्योंकि किसी भी अवलोक युग्म के विचलन संगामी नहीं हैं)

$$वि = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{० - ८}{८}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{-(-१)}$$

$$= -\sqrt{१}$$

$$= -१$$

Coefficient of Concurrent Deviations

$$r = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c - n}{n}\right)}$$

In the above example

n = 8 (as only years 1944 to 1951 can be taken into account)

$$r = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{0 - 8}{8}\right)}$$

$$r = \pm\sqrt{-(-1)}$$

$$= -\sqrt{1}$$

$$= -1$$

उपरोक्त उदाहरण में संगामी विचलन गुणक – १ आया है, इसका अर्थ यह हुआ कि इन दोनों श्रेणियों में पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध (perfect negative correlation) है। जब-जब पूर्ति देशनांक बढ़ा है तब-तब मूल्य देशनांक घटा है, इसलिए य × र (x × y) सदैव ऋणात्मक रहा है। यदि दो श्रेणियों में संगामी विचलन होते हैं (चाहे वे धनात्मक) हों या ऋणात्मक तब य × र (x × y) धनात्मक होता है और जितनी बार ऐसा होता है वही गा (c) का मूल्य होता है।

प्रश्नावली

(१) आप सहसम्बन्ध से क्या समझते हैं ? क्या यह दो विचरणों (variables) के मध्य कारण-प्रभाव की घनिष्ठता को प्रकट करता है ?

(एम० काम०, राजपूताना, १९५२)

(२) सहसम्बन्ध का क्या अर्थ है ? इसकें गुणक के निर्वचन के साधारण नियम बतलाइए। (एम० काम०, इलाहाबाद, १९४४)

(३) सहसम्बन्ध से आप क्या समझते हैं ? उसकी अर्थ सूचकता को स्पष्ट कीजिए। सांख्यिकीय दृष्टि से इसकी गणना आप किस प्रकार करेंगे ?

(एम० काम०, आगरा, १९४५)

(४) सहसम्बन्ध किसे कहते हैं ? स्पष्ट कीजिए कि सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिए आप निम्नरीतियों का प्रयोग किस प्रकार करेंगे :

(१) विन्दु रेख (२) सहसम्बन्ध सारणी (३) कार्ल पियरसन का सहसम्बन्ध गुणक। (बी० काम०, आगरा (१९४०)

(५) निम्नलिखित सारणी से सहसम्बन्ध गुणक निकालिए।

य	+१२००	−१०००	−८००	−४००	+१२००	+१४००	−६००	−१०००
र	−३६००	+३३००	+२४००	+१२००	−३६००	−२१००	+१८००	+३०००

(६) निम्नलिखित सारणी में १९२४ से १९३१ तक इंगलैंड के औद्योगिक उत्पादन तथा पंजीकृत (registered) वेकारों की संख्या के देशनांक दिये गये हैं।

वर्ष	औद्योगिक-उत्पादन देशनांक	पंजीकृत वेकार व्यक्तियों की संख्या (लाखों में)
१९२४	१००	११·३
१९२५	१०२	१२·४
१९२६	१०४	१४·०
१९२७	१०७	११·१
१९२८	१०५	१२·३
१९२९	११२	१२·२
१९३०	१०३	१९·९
१९३१	९४	२६·४

उत्पादन तथा वेकारों की संख्या का सहसम्बन्ध गुणक निकालिए।

(बी० काम०, लखनऊ, १९४४)

(७) निम्नलिखित सारणी में सन् १९१३-१४ से १९३१-३२ तक भारत से कच्चे कपास का निर्यात तथा सूती कपड़ों के आयात का मूल्य दिया हुआ है :

वर्ष	कच्चे कपास के निर्यात	सूती कपड़ों के आयात
१९१३–१४	४२	५६
१९१७–१८	४४	४९
१९१९–२०	५८	५३
१९२१–२२	५५	५८
१९२३–२४	८९	६५
१९२९–३०	९८	७६
१९३१–३२	६६	५८

कच्चे कपास के निर्यात तथा सूती कपड़ों के आयात का सहसम्बन्ध गुणक निकालिए। (बी० काम०, नागपुर, १९४४)

(८) निम्नलिखित सामग्री से निर्वाह-व्यय तथा साप्ताहिक मजदूरी का सह-सम्बन्ध गुणक निकालिए।

तिथि	निर्वाह-व्यय देशनांक	साप्ताहिक मजदूरी-देशनांक
१९२०	१५१	१५५
१९२१	११०	१२०
१९२२	१०२	९९
१९२३	१०१	९८
१९२४	१०३	१०१
१९२५	१००	१०१
१९२६	१००	१०२
१९२७	९६	१००
१९२८	९५	९९
१९२९	९५	९९
१९३०	८७	९८
१९३१	८४	९६
१९३२	८१	९४

(एम० ए०, इलाहाबाद १९३८)

(९) निम्नलिखित सारणी से यह मालूम कीजिए कि भारत में, कहाँ तक, मूल्यों में उच्चावचनों का द्रव्य-प्रचलन की मात्रा से सम्बन्ध है :

वर्ष	रुपया तथा नोट प्रचलन में (करोड़ों में)	मूल्यों के देशनांक (१८७३=१००)
१९१२	२४८	१३७
१९१३	२५६	१४३
१९१४	२४८	१४७
१९१५	२६६	१५२
१९१६	२९७	१८४
१९१७	३३८	१९६
१९१८	४०७	२२५
१९१९	४६३	२७६
१९२०	४११	२८१
१९२१	३९३	२६०

(१०) निम्नलिखित सारणी में कलकत्ता तथा कराची में १९२७–१९४१ की अवधि के लिए थोक-मूल्य देशनांक दिए हुए हैं।

वर्ष	कलकत्ता देशनांक (आधार : जुलाई, १९१४)	कराची देशनांक (आधार : जुलाई, १९१४)
१९२७	१४८	१३७
१९२८	१४५	१३७
१९२९	१४१	१३३
१९३०	११६	१०८
१९३१	९३	९५
१९३२	९१	९९
१९३३	८७	९७
१९३४	८९	९६
१९३५	९१	९९
१९३६	९१	१०२
१९३७	१०२	१०८
१९३८	९५	१०४
१९३९	१०८	१०८
१९४०	१२०	११६
१९४१	१३९	१२०

(अ) उपरोक्त दो श्रेणियों से सहसम्बन्ध गुणक की गणना कीजिए तथा स्पष्ट कीजिए कि यह क्या दिखाता है।

(ब) मालूम कीजिये कि क्या कलकत्ता देशनांकों में करांची-देशनांकों से अधिक विचरण है ? (बी० काम०, इलाहाबाद १९४४)

(११) निम्न सारणी में सन् १९३६ में हुई हाई स्कूल परीक्षा के परिणाम दिये हुए हैं। ।6८२

परीक्षार्थियों की आयु	१३—१४	१४—१५	१५—१६	१६—१७	१७—१८
असफल होने वालों का प्रतिशत	३९.२	४०.६	४३.४	३४.२	३६.६
परीक्षार्थियों की आयु	१८—१९	१९—२०	२०—२१	२१—२२	
असफल होने वालों का प्रतिशत	३९.२	४८.९	४७.१	५४.५	

सहसम्बन्ध गुणक की गणना कीजिए तथा सम्भाव्य विभ्रम भी निकालिए। अपने परिणामों से क्या आप निश्चयरूप से कह सकते हैं कि असफलता का आयु से सहसम्बन्ध है ? (पी०सी० एस, १९४०)

(१२) बम्बई और कलकत्ता में सब वस्तुओं के मूल्य-देशनांक निम्न प्रकार से हैं।

माह		वस्तु मूल्यों के देशनांक (कलकत्ता में)	वस्तु मूल्यों के देशनांक (बम्बई में)
मई,	१९४२	१६९	२०४
जून,	१९४२	१८२	२२५
जुलाई,	१९४२	१८२	२२५
अगस्त,	१९४२	१९२	२२८
सितम्बर	१९४२	१९८	२२९
अक्टूबर	१९४२	२०९	२३३
नवम्बर,	१९४२	२२७	२४९
दिसम्बर	१९४२	२३८	२६६
जनवरी,	१९४३	२५०	२५५
फरवरी,	१९४३	२५३	२५५

क्या आप सोचते हैं कि बम्बई तथा कलकत्ता के मूल्यों में सहसम्बन्ध है ?

(एम० ए०, आगरा, १९४४)

(१३) निम्नलिखित सारणी में कुल जनसंख्या, तथा उनमें से वे जो पूर्णतः या कुछ हद तक अन्धे हैं, का वंटन दिया हुआ है। क्या आयु तथा अन्धेपन में कोई सम्बन्ध है ? बतलाइए। (बी० काम०, आगरा, १९२९)

आयु	व्यक्तियों की संख्या (हजारों में)	अन्धे
०—१०	१००	५५
१०—२०	६०	४०
२०—३०	४०	४०
३०—४०	३६	४०
४०—५०	२४	३६
५०—६०	११	२२
६०—७०	६	१८
७०—८०	३	१५

(१४) निम्नलिखित सारणी से सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात कीजिए।

र = \ य =	५	१०	१५	२०	२५	३०	योग
१०	...	१	१	२	८	१२	२४
१५	१	२	५	९	८०	११	१०८
२०	२	१५	४२	९८	३६	८	२०१
२५	५	२०	५१	३७	१०	२	१२५
३०	८	१६	८	५	४	१	४[illegible]
योग	१६	५४	१०७	१५१	१३८	३४	५०[illegible]

(एम० ए०, कलकत्ता, १९३७)

(१५) निम्नलिखित सारणी से पति तथा पत्नियों की आयुओं के मध्य सहसम्बन्ध गुणक की गणना कीजिए तथा सम्भाव्य-विभ्रम निकालिए।

पत्नी की आयु	पति की आयु					
	२०—३०	३०—४०	४०—५०	५०—६०	६०—७०	योग
१५—२५	५	९	३	०	०	१७
२५—३५	०	१०	२५	२	०	३७
३५—४५	०	१	१२	२	०	१५
४५—५५	०	०	४	१६	५	२५
५५—६५	०	०	०	४	२	६
	५	२०	४४	२४	७	१००

(पी० सी० एस०, १९२८)

(१६) निम्नलिखित सारणी में प्राप्तांकों का वंटन दिया हुआ है। सहसम्बन्ध गुणक तथा उसके सम्भाव्य विभ्रम की गणना कीजिए।

भूगोल में प्राप्तांक

	प्राप्तांकों का विस्तार	०—२०	२०—४०	४०—६०	६०—८०	योग
गणित में प्राप्तांक	०—२०	३२	९८	१५	...	३१५
	२०—४०	४५	४३६	२००	४	६८५
	४०—६०	१६	५००	३९८	२५	९३९
	६०—८०	...	१०५	५३२	४०	६७७
	८०—१००	...	८	४०	१६	६४
	योग	९३	१,१३७	१,१८५	८५	२,५००

(एम० ए०, कलकत्ता, १९३५)

२६

(१७) निम्नलिखित सारणी में विद्यार्थियों के विभिन्न ऊँचाइयों तथा वजनों की मात्रा दी गई है: .०९५५

ऊँचाइयाँ इंचों में	वजन पौंडों में					योग
	८०—९०	९०—१००	१००—११०	११०—१२०	१२०—१३०	
५०–५५	१	३	७	५	२	१८
५५–६०	२	४	१०	७	४	२७
६०–६५	१	५	१२	१०	७	३५
६५–७०	.....	३	८	६	३	२०
योग	४	१५	३७	२८	१६	१००

क्या आप ऊँचाइयों और वजनों में कोई सम्बन्ध पाते हैं।

(बी० काम०, इलाहाबाद १९४०)

(१८) निम्नलिखित सारणी में ६७ विद्यार्थियों द्वारा एक बुद्धि-परीक्षा में प्राप्त अंक, उनके आयु-वर्गों के अनुसार दिए हुए हैं।

परीक्षा में प्राप्तांक	आयु वर्षों में				योग
	१८	१९	२०	२१	
२००—२५०	४	४	२	१	११
२५०—३००	३	५	४	२	१४
३००—३५०	२	६	८	५	२१
३५०—४००	१	४	६	१०	२१
योग	१०	१९	२०	१८	६७

क्या आयु तथा बुद्धि में कोई सम्बन्ध है ? (बी० काम० आगरा, १९४२)

(१९) निम्नलिखित सारणी में मेरठ जिले के ६६ चुने हुए ग्रामों की कुल खेती-योग्य भूमि तथा वह भूमि जिसमें गेहूँ बोया है, दी हुई है। सहसम्बन्ध गुणक की गणना कीजिए।

भूमि जिसमें गेहूँ बोया गया है।	कुल खेती योग्य भूमि (बीघों में)					योग
	०—५००	५००—१०००	१०००—१५००	१५००—२०००	२०००—२५००	
०—२००	१२	६	...	...	...	१८
२००—४००	२	१८	४	२	१	२७
४००—६००	...	४	७	३	...	१४
६००—८००	...	१	...	२	१	४
८००—१०००	...	...	...	१	२	३
योग	१४	२९	११	८	४	६६

(आई० ए० एस०, १९४९)

(२०) निम्नलिखित सारणी में विवाहित स्त्री-पुरुषों के ५३ जोड़ों की आयु दी हुई है। पतियों तथा पत्नियों की आयु में सहसम्बन्ध गुणक की गणना कीजिए।

पति की आयु	पत्नी की आयु						योग
	१५–२५	२५–३५	३५–४५	४५–५५	५५–६५	६५–७५	
१५—२५	१	१	...	...	...	...	२
२५—३५	२	१२	१	...	...	...	१५
३५—४५	...	४	१०	१	...	...	१५
४५—५५	...	...	३	६	१	...	१०
५५—६५	...	...	...	२	४	२	८
६५—७५	...	...	...	...	१	२	३
योग	३	१७	१४	९	६	४	५३

(आई० ए० एस०, १९५०)

(२१) निम्न सामग्री से, परिक्षार्थियों के एक वर्ग द्वारा एक परीक्षा के विषय अ तथा ब में प्राप्तांकों का सहसम्बन्ध गुणक निकालिए :

विषय अ—अविकतम प्राप्तांक ५०	विषय व—अधिकतम प्राप्तांक ५०					योग
	११—१५	१६—२०	२१—५	२६—३०	३१—३५	
१—५					१	१
६—१०	१	१	८	७	१	१८
११—१५	१	२	४	१४	४	२५
१६—२०			७	१३	६	२६
२१—२५			२	४	१	७
२६—३०			१			१
३१—३५				१		१
	२	३	२२	३९	१३	७९

(वी० काम०, वम्वई, १९३६)

(२२) निम्नलिखित सारणी में विद्यार्थियों की आयु तथा प्राप्तांक दिए हुए हैं। सहसम्वन्ध गुणक निकालिए।

य श्रेणी→ आयु वर्षों में र श्रेणी (प्राप्तांक)↓	१६—१८	१८—२०	२०—२२	२२—२४	य श्रेणी की वारंवारताओं का योग
१०—२०	२	१	१	...	४
२०—३०	३	२	३	२	१०
३०—४०	३	४	५	६	१८
४०—५०	२	२	३	४	११
५०—६०	...	१	२	२	५
६०—७०	...	१	२	१	४
र श्रेणी की वारंवारताओं का योग	१०	११	१६	१५	५२

(एम० ए०, अलीगढ़, १९४१)
(पी० सी० एस०, १९५२)

(२३) निम्नलिखित सारणी, (जिनमें पिताओं तथा पुत्रों की आयु दी हुई हैं), से सम्बन्ध गुणक की गणना कीजिए और साथ सम्भाव्य विभ्रम भी निकालिए।

पिताओं की आयु	पुत्रों की आयु								
वर्ष	२	६	१०	१४	१८	२२	२६	३०	योग
५५—६०						६	५	३	१४
५०—५५					८	१०	६	२	२६
४५—५०				२	१३	८	४		२७
४०—४५				१४	१८	३			३५
३५—४०			१५	२०	८				४३
३०—३५	६	१२	२५	१६					५९
२५—३०	१५	२६	२०	१					६२
२०—२५	२२	१०	२						३४
योग	४३	४८	६२	५३	४७	२७	१५	५	३००

(२४) निम्नलिखित सारणी से कच्चे कोयले के उत्पादन (उपनति प्रतिशत, १८९७–१९१३) तथा औद्योगिक उत्पादन (उपनति-प्रतिशत, १८९७) में सहसम्बन्ध गुणक की गणना कीजिए।

व्यावसायिक उत्पादन	कच्चे लोहे का उत्पादन								योग
	५०—६०	६०—७०	७०—८०	८०—९०	९०—१००	१००—११०	११०—१२०	१२०—१३०	
१२०—१३०								१५	१५
११०—१२०						६	३४	१	४१
१००—११०					५	५१	६		६२
९०—१००				३	३३	१			३७
८०—९०			२	२४	३				२९
७०—८०			७	२					९
६०—७०		२	१						३
५०—६०	६	२							८
योग	६	४	१०	२९	४१	५८	४०	१६	२०४

(एम० ए०, कलकत्ता, १९३६)

(२५) निम्नलिखित सामग्री से संगामी विचलन गुणक निकालिए :—
स अथवा अवलोक-युग्मों की संख्या = ९६
गा अथवा संगामी विचलन-युग्मों की संख्या = ३२

(२६) निम्नलिखित सारणी में १२ विद्यार्थियों के इतिहास तथा भूगोल में क्रमशः प्राप्तांक दिए हुए हैं। संगामी विचलन की रीति से सहसम्बन्ध गुणक निकालिए।

विद्यार्थी	इतिहास में प्राप्तांक	भूगोल में प्राप्तांक
क	६५	३०
ख	४०	५५
ग	३५	६८
घ	७५	२८
ङ	६३	७६
च	८०	२५
छ	३५	८०
ज	२०	८५
झ	८५	२०
ञ	६५	३५
ट	५५	४५
ठ	३३	६५

(२७) निम्नलिखित सारणी, (जिसमें इस्पात व्यवसाय में १२ महीनों के इस्पात उत्पादन तथा बेरोजगार व्यक्तियों की संख्या दी हुई है) से संगामी विचलन गुणक निकालिए।

माह	इस्पात का उत्पादन (हजार टनों में)	बेरोजगारों की संख्या (हजारों में)
जनवरी	८.५	६०
फरवरी	९.२	६५
मार्च	९.३	६१
अप्रैल	८.५	७४
मई	७.२	९२
जून	५.९	१५७
जुलाई	५.१	१३०
अगस्त	६.६	१०६
सितम्बर	७.९	५८
अक्टूबर	७.६	८०
नवम्बर	८.२	५०
दिसम्बर	९.३	४५

(२८) संगामी विचलन रीति से चावल के मूल्य तथा वर्षा में सहसम्बन्ध गुणक निकालिए ।

वर्ष	चावल का मूल्य (प्रति मन रुपयों में)	वार्षिक वर्षा (इंचों में)
१९३९	२५.५	१२७
१९४०	२३.६	१३६
१९४१	२२.६	१३९
१९४२	३३.४	१३९
१९४३	३३.१	१३२
१९४४	३२.७	१३५
१९४५	३३.०	१४०
१९४६	३२.०	१३३
१९४७	३२.३	१५९
१९४८	३३.१	१३६
१९४९	३२.२	१४४
१९५०	३३.८	१३६

(२९) निम्नलिखित सारणी से अल्पकालीन प्रदोलों का सहसम्बन्ध गुणक निकालिए । दशमलवों को आप छोड़ सकते हैं ।

वर्ष	पूर्ति	मूल्य
१९२१	८०	१४६
१९२२	८२	१४०
१९२३	८६	१३०
१९२४	९१	११७
१९२५	८३	१३३
१९२६	८५	१२७
१९२७	८९	११५
१९२८	९६	९५
१९२९	९३	१००

(बी० काम०, इलाहाबाद, १९४३)

(२०) निम्नलिखित सारणी में १९२७-४१ की अवधि के लिए कलकत्ता तथा कराँची के थोक मूल्य देशनांक दिए हुए हैं।

वर्ष	कलकत्ता देशनांक आधार : (जुलाई १९१४)	कराँची देशनांक (आधार : जुलाई १९१४)
१९२७	१४८	१३७
१९२८	१४५	१३७
१९२९	१४१	१३३
१९३०	११६	१०८
१९३१	९६	९५
१९३२	९१	९९
१९३३	८७	९७
१९३४	८९	९६
१९३५	९१	९९
१९३६	९१	१०२
१९३७	१०२	१०८
१९३८	९५	१०४
१९३९	१०८	१०८
१९४०	१२०	११६
१९४१	१२९	१२०

पंच वर्षीय चलमाध्य लेते हुए उपरोक्त देशनांकों में अल्पकालीन प्रदोलों का सहसम्बन्ध गुणक निकालिए। दशमलवों को आप छोड़ सकते हैं।

(३१) निम्नलिखित सामग्री से निर्वाह व्यय तथा साप्ताहिक मजदूरियों में अल्पकालीन प्रदोलों का सहसम्बन्ध गुणक निकालिए।

तिथि	निर्वाह व्यय देशनांक	साप्ताहिक मजदूरी देशनांक
१९२०	१५१	१५५
१९२१	११०	१२०
१९२२	१०२	९९
१९२३	१०१	९८
१९२४	१०३	१०१
१९२५	१००	१०१
१९२६	१००	१०२
१९२७	९६	१००
१९२८	९५	९९
१९२९	९५	९९
१९३०	८७	९८
१९३१	८४	९६
१९३२	८१	९४

(कल्पना कीजिए कि इसमें पंचवर्षीय चक्र हैं। दशमलवों को आप छोड़ सकते हैं।)

(३२) परीक्षार्थियों के दो परीक्षाओं में प्राप्तांकों के क्रमस्थान (rank) इस प्रकार हैं।

(१.१), (२.१०), (३.३), (४.४), (५.५), (६.७) (७.२), (८.६), (९.८), (१०.११), (११.१५), (१२.९), (१३.१४), (१४.१२), (१५.१६), (१६.१३).

क्रमस्थान सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात कीजिए

(३३) बारह परीक्षार्थियों के अंकगणित व बीजगणित में प्राप्तांक इस प्रकार हैं,

अंक गणित (य)	बीज गणित (र)
६०	७५
३४	३२
४०	३३
५०	४०
४५	४५
४०	३३
२२	१२
४३	३०
४२	३४
६६	७२
६४	४१
४६	५७

क्रमस्थान सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात कीजिए।

(३४) नीचे दिए हुए य और र चलराशियों में क्रमस्थान सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात कीजिए।

य	र
७८	१२५
८९	१३७
९७	१५६
६९	११२
५९	१०७
७९	१३६
६८	१२३
५७	१०८

(३५) निम्नलिखित सामग्री से राष्ट्रीय आय व अखबारों की बिक्री में क्रमस्थान सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात कीजिए।

वर्ष	अखबारों की विक्री (दश लाख अंकों में)	राष्ट्रीय आय (दश लाख अंकों में)
१९३०	३९·६	६८·९
१९३१	३८·८	५४·५
१९३२	३६·४	४०·०
१९३३	३५·२	४२·३
१९३४	३६·७	४९·५
१९३५	३८·२	५५·७
१९३६	४०·३	६४·९
१९३७	४१·४	७१·५
१९३८	३९·६	६४·२
१९३९	३९·७	७०·८
१९४०	४१·१	७७·५

(३६) निम्नलिखित सामग्री में क्रमस्थान सहसम्बन्ध गुणक निकालिए :

य	७५	८८	९५	७०	६०	८०	८१	५०
र	१२०	१३४	१५०	११५	११०	१४०	१४२	१००

(३७) निम्नलिखित सामग्री से क्रमस्थान सहसम्बन्ध गुणक निकालिए :

य	८७	२२	३३	७५	३७
र	२९	६३	५२	४६	४८

(३८) निम्नलिखित सामग्री से क्रमस्थान सहसम्बन्ध गुणक निकालिए :

य	८०	७८	७५	७५	६८	६७	६०	५९
र	१२	१३	१४	१४	१४	१६	१५	१७

(३९) सुन्दरता प्रतियोगिता में भाग लेने वाले १० प्रतियोगियों को तीन निर्णायकों ने निम्न क्रमस्थान दिए :

प्रथम निर्णायक	१	६	५	१०	३	२	४	९	७	८
द्वितीय निर्णायक	३	५	८	४	७	१०	२	४	६	९
तृतीय निर्णायक	६	४	९	८	१	२	३	१०	५	७

क्रमस्थान सहसम्बन्ध गुणक से ज्ञात कीजिए कि कौन से दो निर्णायकों के विचार सुन्दरता के बारे में सबसे अधिक समान हैं।

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९५२)

(४०) यह सिद्ध करिये कि सहसम्बन्ध गुणक का मूल्य +१ तथा −१ के अन्दर ही रहता है।

निम्नलिखित से सहसम्बन्ध गुणक निकालिए।

	१७·५	२२·५	२७·५	३२·५	३७·५	४२·५	४७·५	५२·५	५७·५
१७·५	११	६२	१९	३	१				
२२·५	६	२२०	१९०	३४	६	२			
२७·५		४६	१६५	५९	१३	५	२	१	
३२·५		३	२५	३३	१४	६	३	२	
३७·५		१	३	८	९	६	४	३	१
४२·५				१	३	५	४	३	२
४७·५					१	२	३	३	२
५२·५							१	२	२

(पी० सी० एस०, १९५४)

—o—

अध्याय १४

अन्तर्गणन

(Interpolation)

अन्तर्गणन का अर्थ

दो परस्पर-सम्वन्धित चलों के विभिन्न मूल्यों की सामग्री एक संतत श्रेणी के रूप में नहीं दी जाती और न ही ऐसे मिलती है, वल्कि खंडित श्रेणी के रूप में दी जाती है। अर्थात् किसी एक चल, य, (x) के कुछ चुने हुए मूल्यों के संगत एक दूसरे र (y) चल के मूल्य दे दिए जाते हैं। कभी-कभी इस वात की आवश्यकता प्रतीत होती है कि पहले चल के किसी ऐसे मूल्य के, जो सामग्री में नहीं दिया गया है, संगत र (y) चल का मूल्य निकाला जाय। इस प्रकार मूल्य निकालने को अन्तर्गणन (interpolation) कहते हैं। जैसे, मान लीजिए दो चल, य और र के, जो परस्पर-सम्वन्धित हैं, विभिन्न मूल्य निम्नलिखित हैं :

य (x)	र (y)
१	३.२
२	४.१
३	५.६
४	६.८
५	७.३
६	७.९

इस सारणी में य (x) के कुछ मूल्यों, १,२,......, ६, के संगत र (y) के मूल्य दिए गए हैं। इस सामग्री से य (x) के ३.५ वाले मूल्य के संगत र (y) के मूल्य को निकालने को अन्तर्गणन कहा जायगा। अतएव कुछ **मान्यताओं** (assumptions) **के अनुसार अन्तर्गणन का अर्थ सवसे अधिक संभावित मूल्य का आगणन करना है।** अन्तर्गणन में जिस मूल्य के संगत मूल्य का आगणन करना होता है वह सामग्री की चरम-सीमाओं के भीतर ही रहता है। उपर्युक्त उदाहरण में आगणन को केवल तभी अन्तर्गणन कहा जायगा जब य (x) चल का मूल्य १ से अधिक और ६ से

कम हो। इस सीमाओं के बाहर के मूल्य के लिए संगत मूल्य का आगणन करना वाह्यगणन (extrapolation) कहा जाता है।

अन्तर्गणन का उपयोग

अन्तर्गणन की रीति का उपयोग मध्यका और भूमिष्ठक की गणना करने में किया जा चुका है। जब वर्गान्तर और वर्ग-बारंबारताएँ दी रहती हैं तो इनका मूल्य निकालने में अन्तर्गणन का उपयोग अनिवार्य है। पर इसका उपयोग इतना ही नहीं है। जहां कहीं भी रिक्तस्थानों की पूर्ति करनी होती है, अन्तर्गणन का उपयोग आवश्यक है। ये रिक्त-स्थान कई कारणों से हो सकते हैं। पहला कारण यह है कि सब विषयों के बारे में पूरी सामग्री का संग्रहण करना संभव नहीं है। ऐसा करने में न केवल प्रबन्ध-संबन्धी कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है, बल्कि, साथ ही साथ, बहुत अधिक परिमाण में द्रव्य का व्यय भी करना पड़ता है, इनको सामने रख कर अगर पर्याप्त और परिशुद्ध सामग्री की उप-योगिता पर विचार किया जाय तो यह स्पष्ट हो जाता है कि ऐसा करना लाभप्रद नहीं है। इस कारण प्रायः सामग्री अपर्याप्त रहती है। इस संबंध में जनसंख्या का उदाहरण दिया जा सकता है। जनगणना प्रति दसवें वर्ष की जाती है, पर दशक के बीच के वर्षों की जन-संख्या जानने की आवश्यकता पड़ सकती है। इसके लिए जनगणना करना संभव नहीं है। ऐसी दशा में अन्तर्गणना का उपयोग करना पड़ता है। फिर, यह भी संभव हो सकता है कि कुछ कारण वश किसी वर्ष या मास या सप्ताह विशेष के लिए सामग्री-संग्रहण न किया गया हो या संग्रहित सामग्री नष्ट हो गई हो। उस सामग्री के बारे में केवल कल्पना की जा सकती है। पर इस प्रकार की हवाई कल्पना करने की अपेक्षा यह कहीं अधिक अच्छा और विश्वसनीय है कि उस सामग्री का अन्तर्गणन द्वारा अनुमान या आगणन किया जाय। इसी प्रकार भविष्य के लिए या ऐसे अतीत के लिए जब सामग्री संग्रहण नहीं किया जाता रहा हो, बाह्यगणन (extrapolation) का उपयोग करना पड़ता है।

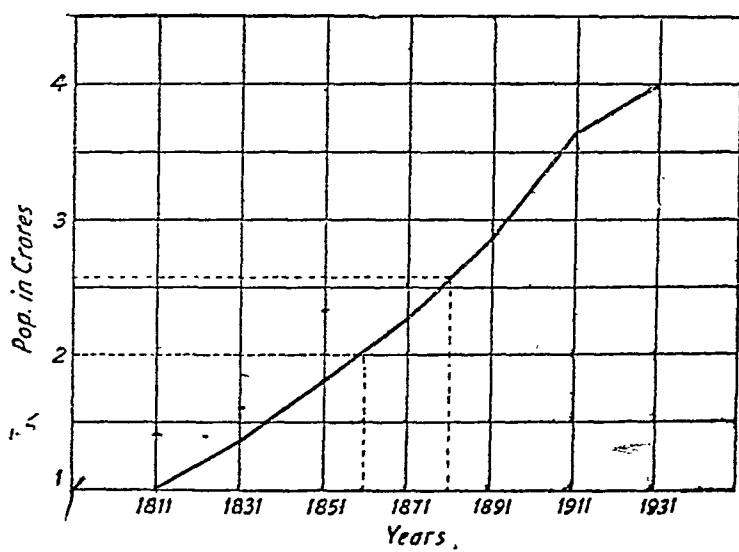
अन्तर्गणन करने की दो रीतियां हैं बिन्दुरेखीय रीति (graphic method) और बीज गणितीय रीति (algebraic method) आगामी अनुच्छेदों में इन पर विचार किया गया है।

बिन्दु रेखीय रीति (Graphic Method)

अगर पर्याप्त परिमाण में सामग्री उपलब्ध हो तो इस सामग्री को बिन्दुरेख-कागज में प्रांकित किया जा सकता है। इस प्रकार प्रांकित बिन्दुओं से होता हुआ कोई संतत वक्र खींचा जा सकता है। यह वक्र दोनों चरों के परस्पर सम्बन्ध को बताएगा।

अगर हमें एक चल का मूल्य ज्ञात हो तो दूसरे (उस पर निर्भर) चल का मूल्य भी ज्ञात किया जा सकता है । यह रीति निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायगी ।

निम्नलिखित सारणी में इंगलैंड और वेल्स की जनसंख्या दी गई है । जनसंख्या प्रति वीस वर्ष बाद की है ।

वर्ष	जनसंख्या (करोड़ों में)
१८११	१·०२
१८३१	१·३९
१८५१	१·७९
१८७१	२·२७
१८९१	२·९०
१९११	३·६१
१९३१	४·००

चित्र नं० १

इस सामग्री को चित्र सं० १ में दिया गया है । प्रांकित बिन्दु चिन्ह (x) द्वारा दिखाए गए हैं। अब मान लीजिए हमें १८६१ और १८८१ की जनसंख्या ज्ञात करनी है, य-कक्ष में इन्हीं बिन्दुओं का स्थान ज्ञात कर लिया और इन बिन्दुओं से कोटि (ordinate) खींचे । ये कोटि जहां पर वक्र में मिलते हैं, उन बिन्दुओं से

य कक्ष पर लम्ब खींचे, र- कक्ष और इस लम्बों के कटान बिन्दु पर लिखी गई संख्या ही क्रमशः इन वर्षों की जनसंख्या बताती है । चित्र द्वारा १८३१ और १८८१ की जनसंख्याएँ क्रमशः २ करोड़ और २.६ करोड़ निकलती हैं । इन वर्षों के लिए जनगणना द्वारा प्राप्त जनसंख्याएँ क्रमशः २.००७ करोड़ और २.५९७ करोड़ हैं, अगर १८६१ और १८८१ के लिए अन्तर्गणन में आगणित जनसंख्याओं (क्रमशः २ करोड़ और २.६ करोड़) की तुलना इन वर्षों की जनगणना द्वारा प्राप्त जनसंख्याओं (क्रमशः २.००७ करोड़ और २.५९७ करोड़) से की जाय तो स्पष्ट हो जायगा कि इसमें विभ्रम बहुत कम हैं ।

चित्र में दिया गया वक्र गणितीय रीतियों से भी खींचा जा सकता है । ये रीतियाँ अपेक्षाकृत कठिन हैं, इसलिए इनका वर्णन यहाँ नहीं किया गया है ।

अगर इस परिमाण में सामग्री न दी गई हो, बल्कि केवल दो वर्षों के लिए जनसंख्या दी गई हो, तब भी अन्तर्गणन द्वारा किसी बीच के वर्ष की जनसंख्या निकाली जा सकती है । मान लीजिए केवल दो वर्षों १९११ और १९३१ की जनसंख्या दी गई है । ये जनसंख्याएँ क्रमशः ३·६१ करोड़ और ४·०० करोड़ हैं । इस दशा में चूँकि हम अन्य वर्षों की जनसंख्याएँ नहीं जानते, इसलिए इन दो बिन्दुओं को मिलाने वाला वक्र एक सरल रेखा होगा । सरल रेखा होने का अर्थ यह हुआ कि जनसंख्या १९११ से १९३१ तक समान दर से बढ़ती है । अब यदि १९२१ की जनसंख्या ज्ञात करनी है तो इन बिन्दुओं की बीच की दूरी को दो बराबर भागों में बाँट दिया जायगा । इस मध्यबिन्दु पर जो जनसंख्या होगी वही १९२१ की जनसंख्या है । साधारण अंकगणित से ही यह स्पष्ट हो जाएगा कि यह जनसंख्या $\frac{४.०० + ३.६१}{२}$ करोड़

$= \frac{७.६१}{२}$ करोड़ $=$ ३.८०५ करोड़ होगी । इस वर्ग के लिए जनगणना द्वारा प्राप्त जनसंख्या ३.७८९ करोड़ है । तुलना करने पर ज्ञात होगा कि विभ्रम का परिमाण बहुत कम (लगभग ०.४३%) है ।

बिन्दुरेखीय रीतियों का उपयोग उन स्थलों में भी किया जा सकता है जहाँ सामग्री किसी प्रकार की आवर्तिता (periodicity) दिखाती है । आवर्तिता का अर्थ यह है कि चल के मूल्य एक निश्चित समय के बाद फिर उसी प्रकार बदलते हैं जैसे इस निश्चित समय से पहले । खाद्यान्नों के मूल्य हमेशा फसल कटने के दिनों में कम होने लगते हैं । इस प्रकार की आवर्तिक श्रेणियों में अगर बीच की कोई सामग्री ज्ञात नहीं हो तो अन्तर्गणन का उपयोग किया जाता है । चूँकि हमें यह ज्ञात है कि सामग्री एक निश्चित प्रकार से

परिवर्तित हो रही है, इसलिए अप्राप्त सामग्री को पर्याप्त परिशुद्धता से जाना जा सकता है।

अगर दो प्रकार की सामग्रियों में सहसम्बन्ध हो और इनमें एक सामग्री अपूर्ण हो तो अन्तर्गणन द्वारा निकाला गया मूल्य अपेक्षाकृत अधिक विश्वसनीय और परिशुद्ध होगा। इन दोनों श्रेणियों को, जिनके बीच सहसम्बन्ध है, विन्दुरेख-कागज में प्रांकित कर लिया जाएगा, स्पष्ट है कि अपूर्ण सामग्री का वक्र अपूर्ण होगा। इस अपूर्ण भाग को, सहसम्बन्ध के अनुसार दूसरी श्रेणी को देख कर पूरा किया जा सकता है। इस प्रकार सहसम्बन्ध-विन्दुरेखों के द्वारा भी अन्तर्गणन किया जा सकता है।

बीज-गणितीय रीतियाँ (Algebraic Methods)

बीजगणितीय रीतियों में बीजगणित की सहायता से ऐसे सूत्र प्राप्त कर लिए जाते हैं जिनसे अन्तर्गणन किया जा सके। ऐसा कहा जा चुका है कि अन्तर्गणन में दो प्रकार की सामग्रियाँ दी रहती हैं, जिनमें कुछ मूल्य ज्ञात नहीं रहते। इन अज्ञात मूल्यों को जानना ही अन्तर्गणन का उद्देश्य है।

अन्तर्गणन की मान्यताएँ

अन्तर्गणन करने में दो मान्यताएँ हैं। पहली यह कि ये सामग्रियाँ संतत रूप में परिवर्तित होती हैं। परिवर्तन में किसी प्रकार अनियमितता नहीं होती और दूसरी यह कि इस परिवर्तन की दर भी सन्तत है अर्थात् एक चल दूसरे चल के बीच की परस्पर निर्भरता, संतत है।

बीज गणितीय रीतियों के अन्तर्गत चार मुख्य रीतियाँ आती हैं। ये रीतियाँ निम्नलिखित हैं :

(१) वक्र-अन्वायोजन-रीति (method of curve-fitting)
(२) परिमितान्तर रीति या न्यूटन की रीति (method of finite differences or Newton's method)
(३) द्विपद प्रमेय विस्तार रीति (Binomial Expansion method)
(४) लैग्रान्ज की रीति (Lagrange's method)

वक्र-अन्वायोजन रीति (Method of Curve Fitting)

सामान्य शब्दों में यह कहा जा सकता है कि अगर दो चल, य और र (x and y) परस्पर-निर्भर हैं तो उन्हें निम्नलिखित बीज गणितीय सम्बन्ध द्वारा व्यक्त किया जा सकता है;

$$र = क + ख य + ग य^2 + घ य^3 + \ldots\ldots + न य^{स}$$ ।

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots + nx^n$$

इस पद-सन्हति (expression) में क, ख....और स (a b....and n) अचल (constant) हैं।

अब अगर कोई समग्री दी गई हो जिसकी पद संख्या स (n) है तो कोई भी सवें घात (n th degree) की पद सन्हति ऐसी प्राप्त की जा सकती है जो इस सामग्री के प्रत्येक पद से होकर जाए। इस पद सन्हति में अचलों के मूल्य दी हुई सामग्री से ज्ञात हो जायेंगे, इस प्रकार की पद संहति में य या र (x or y) का मूल्य रख देने से क्रमश: संगत र या य (y or x) का मूल्य ज्ञात हो जायगा। निम्नलिखित उदाहरण इस रीति के स्पष्ट कर देंगे।

उदाहरण १ :

निम्नलिखित सारणी में भारत की जनसंख्या की गई है।

सारणी संख्या १—भारत की जनसंख्या

वर्ष	जनसंख्या (करोड़ों में)
१९११	३०.३
१९२१	३०.५
१९३१	३३.८
१९४१	३८.९

इस सामग्री से भारत की १९२६ की जनसंख्या ज्ञात करनी है।

इस समग्री से चलों के ज्ञात मूल्य चार हैं। इसलिए इसमे एक त्रिघातीय वक्र अन्वायोजित किया जा सकता है। ऐसा वक्र निम्नलिखित प्रकार का होगा :

$$र = क + खय + गय^2 + घय^3$$

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

इस वक्र में यदि क, ख, ग और घ के मूल्य ज्ञात हो जायें तो वक्र पूर्णत: निश्चित (determine) किया जा सकता है और इस प्रकार ज्ञात वक्र द्वारा भारत की १९२६ की जनसंख्या निकाली जा सकती है।

इस सामग्री में वर्षों को य (x)– चल और जनसंख्या को र (y)– चल माना जायगा। अब, वर्ष बराबर-दूरी में स्थित हैं। अगर १९२६ को मूल बिन्दु माना जाय तो १९११, १९२१, १९३१, १९४१ के बदले क्रमश:—१५, –५ –, +५, +१५ रखना पड़ेगा। १९२६ के स्थान पर शून्य रखना होगा। इसलिए उपर्युक्त सामग्री निम्न-लिखित रूप में लिखी जा सकती है;

सारणी संख्या २

य(x)	र(y)
−१५	३०.३
− ५	३०.५
०	र
५	३३.८
१५	३८.९

गणना को सरलता के लिए य (x) के स्केल को छोटा किया जा सकता है। माना ५ वर्ष = १ के। तो−१५,−५, ०, ५, १५ के स्थान पर क्रमशः −३,−१, १, ३, लिखे जायेंगे। इसलिए उपर्युक्त सामग्री का अन्तिम रूप निम्न प्रकार का होगा,

सारणी संख्या ३

य(x)	र(y)
−३	३०.३
−१	३०.५
०	र
१	३३.८
३	३८.९

अब चूँकि सब विन्दु वक्र र=क+खय+गय^२+घय^3 ($y=a+bx^2+cx^2+dx^3$) में हैं, इसलिए य (x) और र (y) के बदले इसको रखा जा सकता है। इस प्रकार रखने से, निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होंगे;

३०·३=क+ख (−३)+ग (−३)^२+घ (−३)^3
३०·५=क+ख (−१)+ग (−१)^२+घ (−१)^3
र=क+ख (०) +ग (−०) +घ (०)
३३·८=क+ख (१) +ग (१)^२+घ (१)^3
३८·३=क+ख (३) +ग (३)^२+घ (३)^3

या ३०·३=क−३ ख+९ ग−२७ घ −(१)
३०·५=क−ख+ग−घ −(१)
र=क −(१)
३३·८=क+ख +ग +घ −(४)
३८·९=क+३ ख+९ ग+२७ घ −(५)

जैसा समीकरण ३ से ज्ञात होगा, र का मूल्य क के बराबर है। अर्थात् १९२६ की जनसंख्या क के मूल्य के बराबर है। अब क का मूल्य निकालने के लिए हमारे पास चार समीकरण (१, २, ४ और ५) हैं। अज्ञात संख्याएँ (क, ख, ग और घ) भी चार हैं। इसलिए हम क का मूल्य ज्ञात संख्याओं के रूप में निकाल सकते हैं। इसका हल निम्नलिखित रीति से होगा :–

समीकरण (२) और (४) को जोड़ देने से;

६४·३ = २ क + २ ग —(६)

समीकरण (१) और (५) को जोड़ने से;

६९·२ = २ क + १८ ग —(७)

समीकरण (६) और (१) से क का मूल्य निकाला जा सकता है। (६) को ९ से गुणा करने पर;

९ × ६४·३ = १८ क + १८ ग —(८)

या ५७८·७ = १८ क + १८ ग

समीकरण (८) में से समीकरण (७) को घटाने से;

५०९·५ = १६ क

या क $= \frac{५०९·५}{१६}$ = ३१·८ करोड़

इसलिए अन्तर्गणन द्वारा भारत की १९२६ की जनसंख्या ३१·८ करोड़ थी।

Substituting the values of x and y in the equation.

$y = a + bx + cx^2 + dx^3$, we get.

$30.3 = a - 3b + 9c - 26d$ ......(1)

$30.5 = a - b + c - d$ ......(2)

$y = a$ ......(3)

$33.8 = a + b + c + d$ ......(4)

$38.9 = a + 3b + 9c + 27d$ ......(5)

Now, as $y = a$, so we have to find out the value of a.

Adding nos. (2) and (4)

$64.3 = 2a + 2c$ ....(6)

Adding (1) and (5)

$69.2 = 2a + 18c$ ..... (7)

Multiplying (6) by 9

$578.7 = 18a + 18c$ ......(8)

Subtracting (7) from (8)

$509.5 = 16a$

or $$a = \frac{509.5}{16} = 31.8 \text{ crores.}$$

The population of India as interpolated is 31.8 crores for the year 1926.

इसी प्रकार अन्य प्रश्नों को भी इसी रीति के द्वारा हल किया जा सकता है। इस रीति का एक सबसे बड़ा दोष यह है कि अगर संख्याएँ अधिक हों तो बहुत सारे समीकरणों को हल करना पड़ता है। और यह बहुत कठिन और समय लेने वाला काम है। अतएव इस रीति का उपयोग उस स्थान पर करना चाहिए जहाँ पदों की संख्या कम (५ से कम) हो। अन्यथा अन्तर्गणन की यह रीति अन्य सब रीतियों की अपेक्षा अधिक उत्तम है क्योंकि यह किसी भी प्रकार की संतत श्रेणी में काम में लाई जा सकती है।

परिमितान्तर रीति या न्यूटन की रीति :

(Method of finite differences or Newton's method)

मान लीजिए कोई सामग्री निम्नलिखित रूप में दी गई है।

सारणी संख्या ३

य(x)	र(y)
०	$र_0$ y_0
१	$र_1$ y_1
२	$र_2$ y_2
३	$र_3$ y_3
४	$र_4$ y_4
५	$र_5$ y_5

अब $र_1 - र_0$ ($y_1 - y_0$) को प्रथम क्रम के अन्तर (differences of first order) कहा जाता है। इसके लिए संकेत रूप में $ता_0^1$ (Δ_0^1) का उपयोग किया जाता है। ता (Δ) के ऊपर कोने में लिखा गया अंक अन्तर का क्रम बतलाता है। इस प्रकार की संख्याओं को प्रथमान्तर (first differences) भी कहते हैं। इसी प्रकार $र_2 - र_1$ ($y_2 - y_1$) के लिए $ता_1^1$ (Δ_1^1) लिखा जाता है। ता (Δ) के निचले सिरे में लिखा गया अंक घटाई जाने वाली संख्या बताता है। इस प्रकार $ता_0^1$ ($\Delta_0{}^1$) का अर्थ $र_1 - र_0$ ($y_1 - y_0$) और $ता_1^1$ (Δ_1^1) का $र_2 - र_1$ ($y_2 - y_1$) हुआ।

अगर प्रथमान्तर का अन्तर लिया जाय तो इस प्रकार प्राप्त होने वाले अंक द्वितीयान्तर (second differences) कहलाते हैं। $ता_1^1 - ता_0^1$ ($\Delta_1^1 - \Delta_0^1$) द्वितीयान्तर है। इसे $ता_0^2$ (Δ_0^2) के द्वारा व्यक्त किया जाता है। इसी प्रकार $ता_2^1 - ता_1^1$ ($\Delta_2^1 - \Delta_1^1$) = $ता_1^2$ (Δ_1^2) सामान्यत: इन अन्तरों को निम्नलिखित रूप में रखा जाता है। इस सारणी में उपयुक्त सामग्री सारणी संख्या ३ में दी जा चुकी है।

सारणी संख्या ५

य	र	प्रथमान्तर	द्वितीयान्तर	तृतीयान्तर	चतुर्थान्तर	पंचमान्तर
०	$र_0$	$र_1 - र_0 = ता_0^1$	$ता_1^1 - ता_0^1 = ता_0^2$	$ता_1^2 - ता_0^2 = ता_0^3$	$ता_1^3 - ता_0^3 = ता_0^4$	$ता_1^4 - ता_0^4 = ता_0^5$
१	$र_1$	$र_2 - र_1 = ता_1^1$	$ता_2^1 - ता_1^1 = ता_1^2$	$ता_2^2 - ता_1^2 = ता_1^3$	$ता_2^3 - ता_1^3 = ता_1^4$	
२	$र_2$	$र_3 - र_2 = ता_2^1$	$ता_3^1 - ता_2^1 = ता_2^2$	$ता_3^2 - ता_2^2 = ता_2^3$		
३	$र_3$	$र_4 - र_3 = ता_3^1$	$ता_4^1 - ता_3^1 = ता_3^2$			
४	$र_4$	$र_5 - र_4 = ता_4^1$				
५	$र_5$					

x	y	first differences	second differences	third differences	fourth differences	fifth differences
0	y_0					
		$y_1 - y_0 = \Delta^1_0$				
1	y_1		$\Delta^1_1 - \Delta^1_0 = \Delta^2_0$			
		$y_2 - y_1 = \Delta^1_1$		$\Delta^2_1 - \Delta^2_0 = \Delta^3_0$		
2	y_2		$\Delta^1_2 - \Delta^1_1 = \Delta^2_1$		$\Delta^3_1 - \Delta^3_0 = \Delta^4_0$	
		$y_3 - y_2 = \Delta^1_2$		$\Delta^2_2 - \Delta^2_1 = \Delta^3_1$		$\Delta^4_1 - \Delta^4_0 = \Delta^5_0$
3	y_3		$\Delta^1_3 - \Delta^1_2 = \Delta^2_2$		$\Delta^3_2 - \Delta^3_1 = \Delta^4_1$	
		$y_4 - y_3 = \Delta^1_3$		$\Delta^2_3 - \Delta^2_2 = \Delta^3_2$		
4	y_4		$\Delta^1_4 - \Delta^1_3 = \Delta^2_3$			
		$y_5 - y_4 = \Delta^1_4$				
5	y_5					

न्यूटन की रीति में अन्तर्गणन के लिये निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

$$र_य = र_० + य\ ता^१_० + \frac{य(य-१)}{१ \times २} ता^२_० + \frac{य(य-१)(य-२)}{१ \times २ \times ३} ता^३_० + \ldots$$

जबकि

$र_य$ = आन्तरगण्य अंक

$र_०$ = र क प्रथम पद

ता = अन्तर

$$य = \frac{\text{य का वह मूल्य जिसके लिये अन्तर्गणन करना है — य का प्रथम मूल्य}}{\text{वर्गान्तर}}$$

Newton's formula of interpolation

$$y_x = y_0 + x\Delta^1_0 + \frac{x(x-1)}{1 \times 2}\Delta^2_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \times 2 \times 3}\Delta^3_0 + \ldots$$

where

y_x = the figure to be interpolated
y_0 = the first item of y series
Δ = differences

$$x = \frac{\text{being done — the value of the first item of x}}{\text{magnitude of class interval.}}$$

x = the value of x for which interpolation is

उपरोक्त सूत्र निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण २ :

निम्नलिखित सारणी में किसी स्थान के विभिन्न आयु के जीवित पुरुषों की संख्या दी गई है :

सारणी संख्या ५ :

आयु	जीवित पुरुषों की संख्या
२०	६००
३०	५५०
४०	४२५
५०	२७५
६०	१००
७०	७५

३४ वर्ष की आयु के पुरुषों की संख्या का अन्तर्गणन कीजिये।

सारणी संख्या ६ :

आयु य		पुरुषों की संख्या र		अन्तर									
				प्रथम $ता^{१}$		द्वितीय $ता^{२}$		तृतीय $ता^{३}$		चतुर्थ $ता^{४}$		पंचम $ता^{५}$	
२०	$य_{०}$	६००	$र_{०}$										
				−५०	$ता^{१}_{०}$								
३०	$य_{१}$	५५०	$र_{१}$			−७५	$ता^{२}_{०}$						
				−१२५	$ता^{१}_{१}$			−५०	$ता^{३}_{०}$				
४०	$य_{२}$	४२५	$र_{२}$			−२५	$ता^{२}_{१}$			−५०	$ता^{४}_{०}$		
				−१५०	$ता^{१}_{२}$			०	$ता^{३}_{१}$			+१७५	$ता^{५}_{०}$
५०	$य_{३}$	२७५	$र_{३}$			−२५	$ता^{२}_{२}$			+१२५	$ता^{४}_{१}$		
				−१७५	$ता^{१}_{३}$			+१२५	$ता^{३}_{२}$				
६०	$य_{४}$	१००	$र_{४}$			−१००	$ता^{२}_{३}$						
				−७५	$ता^{१}_{४}$								
७०	$य_{५}$	२५	$र_{५}$										

$$य = \frac{३४ - २०}{१०} = १·४$$

अब न्यूटन के सूत्र के अनुसार

$$र_{य} = र_{०} + य\, ता^{१}_{०} + \frac{य(य-१)}{१\times२} ता^{२}_{०} + \frac{य(य-१)(य-२)}{१\times२\times३} ता^{३}_{०} + \ldots\ldots$$

$$= ६०० + (१·४ \times -५०) + \frac{१·४(१·४-१)}{१\times२} \times -७५ +$$

$$\frac{१·४(१·४-१)(१·४-२)}{१\times२\times३} \times ५०$$

$$+ \frac{१·४(१·४-१)(१·४-२)(१·४-३)}{१\times२\times३\times४} \times -५०$$

$$+ \frac{१·४(१·४-१)(१·४-२)(१·४-३)(१·४-४)}{१\times२\times३\times४\times५} \times १·३५$$

$$= ६०० - ७० - २१ - २·८ - १·१२ - २·०३८६$$

$$= ५०३$$

इस प्रकार ३४ वर्ष के पुरुषों की संख्या लगभग ५०३ हुई ।

Age (x)		Number of men (y)		DIFFERENCES									
				First Δ^1		Second Δ^2		Third Δ^3		Fourth Δ^4		Fifth Δ^5	
20	x_0	600	y_0										
				−50	Δ^1_0								
30	x_1	550	y_1			−75	Δ^2_0						
				−125	Δ^1_1			+50	Δ^3_0				
40	x_2	425	y_2			−25	Δ^2_1			−50	Δ^4_0		
				−150	Δ^1_2			0	Δ^3_1			+175	Δ^5_0
50	x_3	275	y_3			−25	Δ^2_2			+[illegible]	Δ^4_1		
				−175	Δ^1_3			+125	Δ^3_2				
60	x_4	100	y_4			+100	Δ^2_3						
				−75	Δ^1_4								
70	x_5	25	y_5										

$$x = \frac{34-20}{10} = 1.4$$

In Newton's Formula,

$$yx = y0 + x\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta_0^3$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta_0^4$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\times2\times3\times4\times5}\Delta_0^5$$

$$= 600 + (1.4\times-50) + \frac{1.4(1.4-1)}{1\times2}\times-75$$

$$+\frac{1.4(1.4-1)(1.4-2)}{1\times2\times3}\times50$$

$$+\frac{1.4(1.4-1)(1.4-2)(1.4-3)}{1\times2\times3\times4}\times-50$$

$$+\frac{1.4(1.4-1)(1.4-2)(1.4-3)(1.4-4)}{1\times2\times3\times4\times5}\times175$$

$$= 600-70-21-2.8-1.12-2.0384$$

$$= 503$$

Thus for 34 years of age the number of men is 503

न्यूटन के सूत्र का प्रयोग करने में इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि चल य (x) के मूल्यों में होने वाली वृद्धियाँ (increments) बराबर हों, अर्थात् $(य_1 - य_0) = (य_2 - य_1)$ । इस सूत्र का प्रयोग उन दशाओं में करना चाहिये जहाँ अन्तर्गणन, सामग्री के प्रारम्भ में करना हो । क्योंकि जैसा सूत्र से स्पष्ट है इसमें पहले के पदों पर अपेक्षाकृत अधिक जोर दिया जाता है ।

द्विपद-प्रमेय विस्तार रीति (Binomial Expansion Method)

यह रीति न्यूटन के द्विपद परिमितान्तर रीति पर ही आधारित है । कुछ अवस्थाओं में बिना अन्तर मालूम किये ही, सीधे द्विपद प्रमेय विस्तार से अन्तर्गणन किया जा सकता है । इस रीति का प्रयोग तब ही किया जा सकता है जब कि चल य (x) के मूल्यों में होने वाली वृद्धियाँ (increments) समान हों और चल य (x) के जिस संगत र (y) का मूल्य निकालना है वह भी चल य (x) की एक वर्ग सीमा हो । मान लीजिये हमें निम्नलिखित सामग्री दी हुई है :-

य (x)		र (y)
१०	४	$र_0$ y_0
२०	५	$र_1$ y_1
३०	?	$र_2$ y_2
४०	७	$र_3$ y_3
५०	८	$र_4$ y_4

उपरोक्त सारणी के चल य (x) में होने वाली वृद्धियां समान है और चल य (x) के जिस संगत र (y) का मूल्य मालूम करना है वह चल य (x) की वर्ग-सीमा है, ऐसी परिस्थिति में विना अन्तर मालूम किये ही द्विपद प्रमेय का विस्तार कर यह मूल्य मालूम किया जा सकता है ।

क्योंकि इस उदाहरण में ४ संख्याएँ ज्ञात हैं इसलिये यह माना जा सकता है कि चौथा प्रगामी अन्तर (leading difference) शून्य होगा अर्थात्

$$ता_0^४ = ०$$

$$\Delta_0^4 = 0$$

क्योंकि यह ज्ञातव्य है कि प्रगामी अन्तर न्यूटन के द्विपद प्रमेय परिमितान्तर रीति पर आधारित हैं अतः हम यह कह सकते हैं कि

$$(र - १)^४ = ०$$

$$(y - 1)^4 = 0$$

अब यदि उपरोक्त समीकार का विस्तार किया जाय तो

$$(र-१)^४ = र^४ - ४ र^3 + ६ र^२ - ४ र^१ + र^० = ०$$

$$(y-1)^4 = y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y^1 + y^0 = 0$$

उपरोक्त समीकार में यदि $र_४$, $र_3$, $र_१$ तथा $र_०$

(y_4, y_3, y_1, और y_0) का मूल्य रख लिया जाय तो

$$८ - (४ \times ७) + ६ र^२ - (४ \times ५) + ४ = ०$$

अथवा

$$८ - २८ + ६ र_२ - २० + ४ = ०$$

$$६ र_२ = - ८ + २८ + २० - ४$$

$$= ३६$$

$$र_२ = ६$$

$$8 - (4 \times 7) + 6y_2 - (4 \times 5) + 4 = 0$$

or

$$8-28+6y_2-20+4=0$$
$$6y_2=-8+28+20-4$$
$$=36$$
$$y_2=6$$

इस प्रकार इस सूत्र से यह मालूम हुआ कि जब चल य (x) का मूल्य ३० है तो र (y) का संगत मूल्य ६ होगा ।

द्विपद प्रमेय का विस्तार निम्नलिखित रीति से किया जाता है :

$$(\text{र}-१)^{\text{स}}=\text{र}^{\text{स}}-\text{स}\text{र}^{\text{स}-१}+\frac{(\text{स}-\text{स}१)}{१\times२}\text{र}^{\text{स}-२}-\frac{\text{स}(\text{स}-१)(\text{स}-२)}{१\times२\times३}\text{र}^{\text{स}-३}$$

$$(y-1)^n=y^n-ny^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\times2}y^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}y^{n-3}+\ldots\ldots$$

उपरोक्त उदाहरण में :

$$(\text{र}-१)^{४}=\text{र}^{४}-४\,\text{र}^{४-१}+\frac{४(४-१)}{१\times२}\text{र}^{४-२}-\frac{४(४-१)(४-२)}{१\times२\times३}\text{र}^{४-३}+\frac{४(४-१)(४-२)(४-३)}{१\times२\times३\times४}\text{र}^{४-४}$$

$$=\text{र}^{४}-४\,\text{र}^{३}+६\,\text{र}^{२}-४\,\text{र}^{१}-\text{र}^{०}$$

$$(y-1)^4=y^{4}-4y^{4-1}+\frac{4(4-1)}{1\times2}y^{4-2}-\frac{4(4-1)(4-2)}{1\times2\times3}y^{4-3}+\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1\times2\times3\times4}y^{4-4}$$

$$=y^4-4y^3+6y^2-4y^1+y^0$$

लैग्रांज की रीति (Lagrange's method) :

जैसा कि ऊपर बताया जा चुका है कि न्यूटन की रीति की सबसे बड़ी परिसीमा यह है कि इसमें चल य (x) के मूल्यों में होने वाली वृद्धि बराबर होनी चाहिये। अगर ऐसा न हो तो न्यूटन के सूत्र का उपयोग नही किया जा सकता। ऐसी अवस्था में लैग्रांज के सूत्र का उपयोग किया जाता है।

अगर य (x) श्रेणी के विभिन्न पद क्रमशः $\text{य}_0, \text{य}_1, \text{य}_2, \ldots \text{य}_\text{स}$ $(x_0\ x_1\ x_2 \ldots x_n)$ हो और इनके संगत र (y) श्रेणी के पद क्रमशः $\text{र}_0, \text{र}_1, \text{र}_2 \ldots$ $(y_0, y_1, y_2) \ldots (y_n)$ हों और अगर हमें य (x) श्रेणी के किसी पद य (x) के संगत र (y) का मूल्य निकालना हो, और यदि यह मूल्य रय (yx) हो तो लैंग्राज के सूत्र के अनुसार

$$\text{र}_\text{य} = \text{र}_0 \frac{(\text{य}-\text{य}_1)(\text{य}-\text{य}_2)(\text{य}-\text{य}_3)\ldots\ldots(\text{य}-\text{य}_\text{स})}{(\text{य}_0-\text{य}_1)(\text{य}_0-\text{य}_2)(\text{य}_0-\text{य}_3)\ldots\ldots(\text{य}_0-\text{य}_\text{स})}$$
$$+\text{र}_1 \frac{(\text{य}-\text{य}_0)(\text{य}-\text{य}_2)(\text{य}-\text{य}_3)\ldots\ldots(\text{य}-\text{य}_\text{स})}{(\text{य}_1-\text{य}_0)(\text{य}_1-\text{य}_2)(\text{य}_1-\text{य}_3)\ldots\ldots(\text{य}_1-\text{य}_\text{स})}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\text{र}_\text{स} \frac{(\text{य}-\text{य}_0)(\text{य}-\text{य}_1)(\text{य}-\text{य}_2)\ldots\ldots(\text{य}-\text{य}_{\text{स}-1})}{(\text{य}_\text{स}-\text{य}_0)(\text{य}_\text{स}-\text{य}_1)(\text{य}_\text{स}-\text{य}_2)\ldots\ldots(\text{य}_\text{स}-\text{य}_{\text{स}-1})}$$

$$y_x = y_0 \frac{(x-x_1)\ (x-x_2)\ (x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\ (x_0-x_2)\ (x_0-x_3)\ldots\ldots(x_0-x_n)}$$
$$+y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots\ldots(x_1-x_n)}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

निम्नलिखित उदाहरण से यह रीति स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण ३ :

लैंग्रांज सूत्र का प्रयोग कर ३५ वर्ष से कम आयु के अपराधियों की प्रतिशत संख्या का अनुमान निम्नलिखित सामग्री से लगाइए।

सारणी संख्या ८

आयु	अपराधियों की प्रतिशत संख्या
२५ वर्ष से कम	५२·०
३० " " "	६७·३
४० " " "	८४·१
५० " " "	९४·४

२८

हल :

सारणी संख्या ६

आयु य (x)		अपराधियों की प्रतिशत संख्या र (y)	
२५ वर्ष से कम	य₀ (x₀)	५२·०	र₀ (y₀)
३०	य₁ (x₁)	६७·३	र₁ (y₁)
४०	य₂ (x₂)	८४·१	र₂ (y₂)
५०	य₃ (x₃)	९४·४	र₃ (y₃)

य (x) ३५, इसके संगत र (y) का मूल्य मालूम करना है।

लैग्रांज के अनुसार

$$र_य (xy) = ५२·० \frac{(३५-३०)(३५-४०)(३५-५०)}{(२५-३०)(२५-४०)(२५-५०)} + ६७.३ \frac{(३५-२५)(३५-४०)(३५-५०)}{(३०-२५)(३०-४०)(३०-५०)} + ८४·१ \frac{(३५-२५)(३५-३०)(३५-५०)}{(४०-२५)(४०-३०)(४०-५०)} + ९४.४ \frac{(३५-२५)(३५-३०)(३५-४०)}{(५०-२५)(५०-३०)(५०-४०)}$$

$$र_य (yx) = ५२ \frac{(५)(-५)(-१५)}{(-५)(-१५)(-२५)} + ६७.३ \frac{(१०)(-५)(-१५)}{(५)(-१०)(-२०)} + ८४.१ \frac{(१०)\ (५)(-१५)}{(१५)(१०)(-१०)} + ९४.४ \frac{(१०)(५)(-५)}{(२५)\ (२०)\ (१०)}$$

$$= -१०.४ + ५०.५ + ४२.०५ - ४.७२$$

$$= ७७.४३$$

इस प्रकार ३५ वर्ष की आयु से कम अपराधियों की प्रतिशत संख्या लगभग ७७.४३ हुई।

उपर्युक्त उदाहरणों में केवल अन्तर्गणन किया गया है। बाह्यगणन (extrapolation) के लिए भी इन्हीं सूत्रों का उपयोग किया जाता है और बाह्यगणन की गणना रीति भी ऐसी ही है।

परिसीमाओं के होते हुए भी इस बात का अनुमान लगाया जा सकता है कि अन्तर्गणन और बाह्यगणन कितना महत्वपूर्ण है। इनकी परिसीमाएँ उन मान्यताओं

(assumptions) में निहित हैं जो बीजगणितीय रीतियाँ बताने के पहले दी जा चुकी हैं ? इनके पक्ष में कम से कम इतना तो निर्विवाद है कि बिना तथ्यों को ध्यान में रख कर किए गये अनुमान की अपेक्षा इन तथ्यों पर विचार करके और इनकी सहायता से किए गये अनुमान की अपेक्षा इन तथ्यों पर विचार करके और इनकी सहायता से किया गया आगणन, सदैव अधिक विश्वसनीय और सत्य के निकट होगा ।

प्रश्नावली

(१) अन्तर्गणन और बाह्यगणन की आवश्यकता पर विचार कीजिए। इस प्रकार आगणित परिणाम कहाँ तक प्रमाणिक होते हैं ।

(२) बिन्दु-रेखीय रीति द्वारा अन्तर्गणन किस प्रकार किया जाता है । विस्तार-पूर्वक बताइए ।

(३) अन्तर्गणन करने में सामग्री के बारे में क्या मान्यताएँ की जाती हैं। उदाहरण देकर समझाइए ।

(४) निम्नलिखित जीवन-सारणी (life table) द्वारा २५, ३५ और ४७ वर्ष की आयु में जीवित रहने वले लोगों की संख्या की गणना कीजियेः—

आयु (वर्षों में)	जीवितों की संख्या
२०	५१
३०	४४
४०	३५
५०	२४

(इलाहाबाद, एम० ए० १९५२)

(५) नीचे दी गई सारणी में ३० वर्ष से कम आयु वाले लोगों की संख्या की अन्तर्गणन लैग्रान्ज के सूत्र का उपयोग करके कीजिए ।

आयु	प्रति १०,००० में अनुपात
१०—१५ वर्ष	१९३५
१५—२० "	८८०
२०—२५ "	९३३
२५—३५ "	१,६३६
३५—४५ "	१,२०१
४५—५५ "	८३०

(इलाहाबाद, एम० ए०, १९५१)

(६) एक सारणी में निम्नलिखित मूल्य दिए गए हैं:—

य	र
१	२१६,०००
२	२२६,९८१
३	—
४	२५०,०४७
५	२६२,१४४

किसी उपयुक्त बीज गणितीय रीति का उपयोग करके य = ३ के लिये र का मूल्य ज्ञात करिये। साथ ही साथ उपरिलिखित विन्दुओं को एक विन्दुरेख-कागज पर प्रांकित करिये; और इस विन्दुरेख से य = ४.४ के लिए र का मूल्य ज्ञात करिये।

(७) नीचे दी गई सामग्री से १९१३ में आयात के मूल्य का आगणन करिये। बीज गणितीय रीति का उपयोग करिये:

वर्ष	आयात का मूल्य (रुपये)
१९१०	३,९२,०२,०००
१९११	२,६५,१०,०००
१९१२	२,६१,६३,०००
१९१३	—
१९१४	३,३७,५५,०००
१९१५	३,२९,८७,०००
१९१६	२,७४,३१,०००

(इलाहाबाद एम० ए०, १९५२)

(८) निम्नलिखित सारणी में कुछ संख्याओं के वर्ग मूल दिए गए हैं। अन्तर्गणन द्वारा ८८.४ का वर्ग मूल निकालिये।

संख्या	वर्ग मूल
८६	९.२७४
८७	९.३२७
८८	९.३८१
८९	९.४३४
९०	९.४८७
९१	९.५३९
९२	९.५९२

(९) नीचे दी गई सारणी में माताओं की आयु और प्रति माता बच्चों की औसत संख्या दी गई है, ३०–३४ वर्ष की माताओं के लिए बच्चों की औसत संख्या का अन्तर्गणन करिये :

वर्षों में माता की आयु	औसत बच्चों की संख्या
१५–१९	०.७
२०–२४	२.१
२५–२९	३.५
३०–३४	—
३५–३९	५.७
४०–४४	५.८

(इलाहाबाद, एम० काम १९४६)

(१०) अन्तर्गणन के अर्थ की व्याख्या कीजिए। निम्नलिखित सारणी विभिन्न आयु की बधुओं के लिए वरों की संभावित आयु बताती है।

वधू की आयु	वर की संभावित आयु	वधू की आयु	वर की संभावित आयु
१५.५	२५.०	२५.५	२७.०
१६.५	२५.२	२६.५	२७.५
१७.५	२५.४	२७.५	२८.०
१८.५	२५.५	२८.५	२९.०
१९.५	२५.५	२९.५	३०.०
२०.५	२५.५	३०.५	३२.०
२१.५	२५.८	३१.५	३३.०
२२.५	२६.०	३२.५	३३.५
२३.५	२६.०	३३.५	३४.०
२४.५	२६.८	३४.५	३४.५

इन अंकों को बिन्दुरेख द्वारा निरूपित करिये, और इस बिन्दुरेख द्वारा २५ वर्ष की वधू के लिए वर की संभावित आयु ज्ञात करिये।

(एम० ए०, आगरा, १९४४)

(११) निम्नलिखित सारणी पिछली छः जनगणनाओं में इन्दौर की जनसंख्या बताती है:—

१८८१	७५,४०१
१८९१	८२,९८४
१९०१	८६,६८६
१९११	८४,९४७
१९२१	९३,०९१
१९३१	१२७,३२७

(आगरा, बी०, कॉम, १९४०)

(१२) निम्नलिखित सारणी में अज्ञात अंक को मालूम करिये:—

य	र
२०	७३
२२	—
२५	१९८
३०	५७३
३५	११९८

(लखनऊ, बी० कॉम १९५१)

(१३) निम्नलिखित सारणी में उत्तर प्रदेश के एक जिले में तपेदिक से मरने वाले व्यक्तियों के मृत्यु-अर्घ (प्रति १००,०००) दिए हुए हैं।

वर्ष	मृत्यु-अर्घ
१९४६	१६०
१९४८	१७५
१९५०	१८०

सन् १९४९ के लिए मृत्यु-अर्घ का अनुमान लगाइये।

(१४) निम्नलिखित सारणी में एक भारतीय रियासत में १९०१, १९११, १९२१ और १९३१ की जनगणना दी हुई है। अपनी रीति को स्पष्ट करते हुए सन् १९२४ की जनसंख्या का अनुमान लगाइये। 3108·5 695

वर्ष	जनसंख्या (हजारों में)
१९०१	२,७९७
१९११	२,९३५
१९२१	३,०४७
१९३१	३,३५४

(पी० सी० एस०, १९३९)

(१५) एक थोक व्यापारी के निम्नलिखित लेखों से १९४२ के लिए पेंसिलों की वार्षिक बिक्री मालूम कीजिए।

वर्ष	पेंसिलों की बिक्री (लाख दर्जनों में)
१९३२	२५
१९३६	३०
१९४०	४०
१९४५	५५
१९४८	६०

(१६) न्यूटन का अन्तर्गणन सूत्र, मान्यताओं सहित समझाइये इसका प्रयोग निम्नलिखित सारणी में २५ वर्ष की अवस्था में; वार्षिक शुद्ध बीमा-किस्त निकालने के लिए कीजिए।

वर्ष	वार्षिक शुद्ध बीमा-किस्त
२०	·०१४२७
२४	·०१५८१
२८	·०१७७२
३२	·०१९९६

(आई० ए०, एस०, १९५०)

(१७) निम्नलिखित सारणी में किसी नगर की १८९१, १९०१, १९११ १९२१, तथा १९३१ की जनसंख्या दी हुई हैं। अपनी रीति को स्पष्ट करते हुए १९२५ के लिए जनसंख्या मालूम कीजिए।

वर्ष	जनसंख्या
१८९१	९८,७५४
१९०१	१,३२,२८५
१९११	१,६८,४७६
१९२१	१,९५,६९०
१९३१	२,४६,०५०

(एम० ए०, कलकत्ता, १९३७)

(१८) निम्नलिखित सारणी में एक बीमा कंपनी के ५०० रुपये की पालसी के लिए वार्षिक बीमा-किस्तें दी हुई हैं;

आने वाले जन्मदिन में आयु	वार्षिक बीमा किस्त
	रु०—आ०
२५	२४—१०
३०	२७—११
३५	३१— १
४०	३६— ६
४५	४२— ५

३६ वर्ष की आयु के लिए बीमा किस्त निकालिये।

(१९) निम्नलिखित सारणी में एक विशेष प्रकार की चाय की मात्राओं (उनके-मूल्य भी साथ-साथ दिए गये हैं) की मांग दी गई है। १ रु० १४ आ० प्रति पौंड मूल्य पर चाय की संभावी मांग की गणना कीजिए।

चाय का मूल्य (प्रति पौंड)		चाय की मांग (हजार पौंडों में)
रु०	आ०	
१	४	८२.५
१	८	७०.८
१	१२	६३.१
२	०	५५.०
२	४	४८.९

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९४२)

(२०) निम्नलिखित सारणी में बुलन्द शुगर कम्पनी लिमिटेड का कुल लाभ दिया हुआ है। १९४२-४३ और १९४४-४५ के लिए लाभ निकालिये।

वर्ष	कुल लाभ (लाख रुपयों में)
१९३५—३६	४.८६
१९३७—३८	१२.६४
१९३९—४०	१३.९८
१९४१—४२	१६.६५
१९४३—४४	२३.२९

(बी० काम०, राजपूताना, १९४९)

(२१) न्यूटन अन्तर्गणन की रीति द्वारा २२ वर्ष की आयु में जीवन आशा को

गणना कीजिए। इस सूत्र में की गई कल्पनाओं (assumptions) का भी वर्णन कीजिए।

आयु	१०	१५	२०	२५	३०	३५
जीवन की आशा (वर्षों में)	३५·४	३२·२	२९·१	२६·०	२३·१	२०·४

(आई० ए० एस०, १९४९)

(२२) निम्नलिखित सामग्री से ६० रु० और ७० रुपये के बीच मजदूरी पाने वाले व्यक्तियों की गणना कीजिए।

मजदूरी (रुपयों में)	व्यक्तियों की संख्या (हजारों में)
४० से कम	२५०
४०—६०	१२०
६०—८०	१००
८०—१००	७०
१००—१२०	५०

(एम० काम०, आगरा, १९५१)

(२३) निम्नलिखितत सारणी से, अ और ब वर्ग के, १००० रु० और १५०० रु० की आमदनी वाले व्यक्तियों की गणना कीजिए।

आमदनी (रुपयों में)	अ वर्ग में व्यक्तियों की संख्या	ब वर्ग में व्यक्तियों की संख्या
५०० से कम	६०००	५०००
५००—१०००	४२५०	५४००
१०००—२०००	३६००	४८००
२०००—३०००	१५००	२२००
३०००—४०००	६५०	१५००

(बी० काम०, आगरा, १९४७)

(२४) निम्नलिखित सारणी में मजदूरों के एक वर्ग की मासिक आमदनी दी हुई है :

प्रतिमाह आमदनी (रुपयों में)	मजदूरों की संख्या
१० रु० तक	५०
२०	१५०
३०	३००
४०	५००
५०	७००
६०	८००

(अ) २५-३० रुपये की आमदनी-वर्ग तथा (ब) ४२ रु० से अधिक आमदनी वाले मजदूरों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

(२५) निम्नलिखित सारणी में, किसी परीक्षा में, ४९२ परीक्षार्थियों के प्राप्तांक दिए हुए हैं, ४२ अंकों से अधिक लेकिन ४५ अंकों से कम पाने वाले परीक्षार्थियों की संख्या मालूम कीजिए ।

प्राप्तांक	परीक्षार्थियों की संख्या
४० अधिक नहीं	२१२
४५ " " "	२९६
५० " " "	३६८
५५ " " "	४२९
६० " " "	४६०
६५ " " "	४८१
७० " " "	४९०
७५ " " "	४९२

(एम० ए०, कलकत्ता, १९३५)

(२६) लैगरेन्जी के सूत्र द्वारा ३५ वर्ष से कम आयु वाले अपराधियों की प्रतिशत संख्या मालूम कीजिए ।

आयु	अपराधियों की प्रतिशत संख्या
२५ वर्ष से कम	५२.०
३० " "	६७.५
४० " "	८४.१
५० " "	९६.४

(एम० ए०, आगरा, १९३८)

(२७) निम्नलिखित सारणी में उत्तर प्रदेश के आय-कर वाले व्यक्तियों की संख्या दी हुई है।

(आमदनी रुपयों में)	आयकर देने वाले व्यक्तियों की संख्या
२५०० से अधिक नहीं	७१६६
३००० " " "	१०,५७६
५००० " " "	१७,२००
७५०० " " "	२०,५०५
१०००० " " "	२१,९७५

४००० रुपये तक आय-कर देने वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिये।

(२८) एक विश्वविद्यालय के १९५१ की एम० काम० परीक्षा के सांख्यिकी में, ६५ विद्यार्थियों द्वारा, प्राप्तांक निम्नलिखित हैं :

प्राप्तांक (१०० में से)	विद्यार्थियों की संख्या
२५ से अधिक	६५
३६ " "	६३
४५ " "	४०
५५ " "	१८
७० " "	७

सांख्यिकी में प्रथम श्रेणी (६० या इससे अधिक अंक) के अंक पानेवाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिये।

(२९) चार दश-वर्षीय आयु-वर्गों की मृत्यु संख्या नीचे दी गई है : ४५-५० तथा ५०-५५ आयु-वर्गों की मृत्यु संख्या मालूम कीजिये :

आयु-वर्ग	मृत्यु संख्या
२५–	१३२२९
३५–	१८१३९
४५–	२४२२५
५५–	३१४९६

(पी० सी० एस० १९५२)

(३०) निम्नलिखित सारणी से जिसमें भारत में एक वस्तु के उत्पादन देशनांक दिये हैं, किसी बीजगणतीय रीति से समस्त सामग्री का उपयोग कर सन् १९५० के लिये देशनांक मालूम कीजिये :–

वर्ष	देशनांक
१९४८	१००
१९४९	१०७
१९५०	 125
१९५१	१५७
१९५२	२१२

(पी० सी० एस० १९५३)

(३१) अन्तर्गणन में क्या-क्या मान्यतायें होती हैं, समान वर्गान्तर में न्यूटन अन्तर्गणन सूत्र मालूम कीजिये।

नीचे किसी परीक्षा में ४९२ परीक्षार्थियों द्वारा पाये गये अंक दिये हैं।

४०	से	अधिक	नहीं	२१०	परीक्षार्थी
४५	"	"	"	२५३	"
५०	"	"	"	३०७	"
५५	"	"	"	३८१	"
६०	"	"	"	४१३	"
६५	"	"	"	४९२	"

उन परीक्षार्थियों की संख्या मालूम कीजिये जिनके अंक (अ) ४८ से अधिक पर ५० से अधिक नहीं (ब) ४८ से कम पर ४५ से कम नहीं हैं।

(पी० सी० एस० १९५४)

(३२) नीचे २० वर्ष की आयु पर २·५ से ५ प्रतिशत व्याज की दर पर जीवन वृत्ति (life annuity) के मूल्य दिये हुए हैं।

व्याज की दर	२·५	३·०	३·५	४·०	४·५	५·०
जीवन वृत्ति का मूल्य	२४·१४५	२२·०४३	२०·२२५	१८·६४४	१७·२६२	१६·०४७

२.७५ तथा ३.७५ प्रतिशत व्याज पर जीवन वृत्ति का मूल्य ज्ञात कीजिये।

(पी० सी० एस० १९५६)

(३३) छेदा ६५४ = २.८१५६; छेदा ६५८ = २.८१८२
छेदा ६५९ = २.८८९ ; छेदा ६६१ = २.८२०२

छेदा ६५६ ज्ञात कीजिये। ऐसी दो रीतियों का उपयोग कीजिये जो वर्गान्तर असमान होने पर काम में लाई जाती हैं जैसे लैगरैन्ज विधि तथा विभाजन-अन्तर विधि।

(आई० ए० एस० १९५६)

अध्याय १५

सामग्री निर्वचन

(INTERPRETATION OF DATA)

पिछले अध्यायों में सामग्री संग्रहण और उसके विश्लेषण की रीतियाँ बताई गई हैं। इन परिच्छेदों में अधिक आंकिक तथ्यों का विश्लेपण किया गया है और उन रीतियों को जिन्हें सांख्यिकिक रीतियाँ कहते हैं समझाया गया है, जिनके द्वारा संग्रहण और विश्लेषण सम्भव हो पाता है। पर सांख्यिक का कार्य यहीं समाप्त नहीं हो जाता उसे इस प्रकार प्राप्त सामग्री से परिणाम निकालने होते हैं। परिणाम निकालने में पर्याप्त सावधानी की आवश्यकता होती है, अन्यथा गलत परिणाम प्राप्त होंगे, जिससे सामग्री संग्रहण, और विश्लेषण का उद्देश्य पूरा नहीं हो पायगा। परिणाम निकालने में किन सावधानियों का उपयोग किया जाय इसका अध्ययन प्रस्तुत अध्याय में किया जायगा।

सामग्री निर्वचन सांख्यिकी का वह भाग है जो संग्रहित सामग्री के वैश्लेपिक अध्ययन से परिणाम निकालने से सम्वन्धित हैं। सांस्यिकी में इसके वारे में जानना नितान्त आवश्यक है क्योंकि सामग्री का स्वत: कोई उपयोग नहीं है। किसी भी विज्ञान में जहाँ आगमन (induction) का उपयोग किया जाता है, सांख्यिकी एक महत्वपूर्ण सावन है। पर यह केवल साधन है और जैसा अन्य सावनों के लिए सच है, इसके द्वारा निकाले गए परिणाम की प्रकृति इसके उपयोग पर निर्भर होगी। अगर इसका दुरुपयोग किया गया तो स्वभावत: गलत परिणाम निकलेंगे, जो लोगों को जिन्हें सांख्यिकी का ज्ञान नहीं है, वहका सकते हैं। ये गलतियाँ विना किसी अभिप्राय के हो सकती हैं और जान-वूझकर भी की जा सकती हैं। एक वैज्ञानिक होने के नाते सांख्यिक का सर्वदा यह प्रयत्न रहना चाहिए कि विना जानी हुई गलतियाँ और जानवूझ कर की गई गलतियाँ जो अभिनति और पक्षपात के कारण होती हैं, कम से कम हों। पिछले परिच्छेदों में, जहाँ सामग्री संग्रहण और विश्लेषण तथा सांख्यिकीय रीतियों का उपयोग वताया गया है ; प्रत्येक स्थान पर उन कारणों को दे दिया गया है जिनसे गलती होने की संभावना रहती है। पर यह विदित होना चाहिए कि

नियमों को दे देने से ही गलतियाँ कम नहीं हो जातीं। वे पूर्णतः सांख्यिक पर निर्भर करती हैं। उसका ज्ञान, अनुभव और अभिनति अभाव ही इन्हें कम कर सकता है। जो बात सामग्री के संग्रहण और विश्लेपण तथा सांख्यिकीय रीतियों के उपयोग के लिए सत्र है, वही उससे अधिक परिमाण में, सामग्री के लिए भी सच है। भले ही सामग्री का संग्रहण और उसका विश्लेपण निर्दोष रूप में किया गया हो, पर निर्वचन के दोषपूर्ण होने के कारण, परिणाम गलत निकल सकते हैं। अगर परिणामों में किसी वर्ग विशेष का स्वार्थ हो तो स्वभावतः अपने हितों को सिद्ध करने के लिए जानबूझ कर दोषपूर्ण रूप में निर्वचन करेंगे, जिससे उनको लाभ हो सके। अतएव अगर सही और प्रामाणिक परिणाम प्राप्त करने हों तो यह आवश्यक है कि निर्वचन का कार्य ऐसे लोगों को दिया जाय जिन्हें न केवल सांख्यिकीय रीतियों का ज्ञान हो और उनका उपयोग करने का अनुभव हो, वल्कि साथ ही साथ, जिनमें पक्षपात या अभिनति का अभाव हो अर्थात् ऐसे लोग जो विपय वस्तु का अध्ययन वैज्ञानिक दृष्टिकोण से कर सकते हैं और वस्तु-स्थिति को सही रूप से समझने की चेष्टा करते हैं।

निर्वचन करने से पहले सांख्यिक को निम्नलिखित बातों पर विचार कर लेना चाहिये :—

(१) **संग्रहित सामग्री विपय वस्तु का अध्ययन करने के लिए उपयुक्त है और प्रामाणिक है।** सामग्री की उपयुक्तता और प्रामाणिकता, किसी भी प्रकार का मत या निर्णय देने के लिये आवश्यक है।

(२) **सामग्री विपय-वस्तु का अध्ययन करने के लिए पर्याप्त है।** भले ही सामग्री प्रामाणिक और उपयुक्त हों, पर जब तक वह पर्याप्त नहीं है, उसके आधार पर दिया गया मत या निर्णय मान्य नहीं हो सकता।

(३) **सामग्री सजातीय है।** अन्यथा किसी भी प्रकार का तुलनात्मक अध्ययन नहीं हो पायेगा। विजातीय सामग्रियों की तुलना करने से सम्भवतः गलत परिणाम प्राप्त होंगे।

(४) **सामग्री का विश्लेषण सांख्यिकीय रीतियों द्वारा वैज्ञानिक ढंग से किया है।** उन सब बातों पर पूर्ण रूप से विचार कर लिया गया है जिनके कारण विभ्रम हो सकता है, और साथ ही साथ जहाँ तक संभव है; इन विभ्रमों को दूर या कम कर दिया गया है।

सांख्यिक को इन सब बातों के बारे में अपने को संतुष्ट कर लेना चाहिये। ये बातें सामग्री के संग्रहण और विश्लेपण तथा रीतियों के उपयोग से सम्बन्धित हैं। निर्वचन म विभ्रम निम्न कारणों से हो सकता है :—

(१) मिथ्या सामान्यकरण के कारण (due to false generalisation)

(२) देशनांकों, सहसम्बन्ध गुणकों आदि के गलत निर्वचन के कारण (due to wrong interpretation of index numbers, coefficient of correlation)।

मिथ्या सामान्यकरण : (false generalisation)

इस प्रकार की गलतियों का कारण यह है कि लोग एक भाग (part) का अध्ययन करके पूर्ण (whole) के बारे में बताने लगते हैं। पर यह आवश्यक नहीं है कि जो बात एक भाग के लिए सच हो वह पूर्ण के लिए भी सच हो। संभव हो सकता है कि एक भाग में होने वाले परिवर्तन कभी-कभी पूर्ण में होने वाले परिवर्तनों के अनुसार हों, पर ऐसा सदैव होना आवश्यक नहीं है। फिर यह कहने के लिए कि पूर्ण के परिवर्तनों का ज्ञान भाग में होने वाले परिवर्तनों के समरूप हैं, यह जानना आवश्यक है कि अन्य भागों के परिवर्तन किस प्रकार के हुए हैं। अगर ये परिवर्तन विपरीत दशा में हुए हों और इस परिमाण में हुए हों कि पहले भाग वाले परिवर्तनों को संतुलित कर दिया हो या उससे अधिक परिमाण में हुए हों तो ऐसी दशाओं में भाग के परिवर्तन पूर्ण में होने वाले परिवर्तनों के समरूप नहीं होंगे। अगर ये परिवर्तन समरूप भी हों तो यह आवश्यक नहीं है कि जिस परिमाण में भाग में परिवर्तन हुए हों उसी परिमाण में पूर्ण में भी परिवर्तन हुए हों। अतएव अगर ऐसी दशाओं में जो बहुधा रहती हैं, किसी प्रकार का सामान्यकरण किया जाय तो वह गलत होगा। इस प्रकार के सामान्यकरण का उपयोग विज्ञापकों, वर्गों या दलों के द्वारा प्रायः किया जाता है। इस प्रकार वे भाग के द्वारा पूर्ण में होने वाले परिवर्तनों को बताते हैं। ऊपरी तौर पर देखने में ऐसा प्रतीत होता है कि ये परिमाण सच हैं। पर अगर कुछ गहरे तौर पर देखा जाय तो यह स्पष्ट हो जाता है कि वास्तव में पूर्ण में ऐसे कोई परिवर्तन नहीं है। उन्हें केवल मिथ्या भास दिया गया है।

मिथ्या सामान्यकरण किस प्रकार किए जाते हैं इसके कुछ उदाहरण नीचे दिए गए हैं। मान लीजिए कि किसी देश में वस्तुओं का आयात एक वर्ष की अपेक्षा दूसरे वर्ष बढ़ जाता है। यह एक तथ्य हो सकता है। पर यदि इसका सामान्यकरण इस रूप में किया जाय कि चूंकि दूसरे वर्ष देश के आयात का परिमाण बढ़ गया है इसलिए देश के पहले की अपेक्षा अधिक संपन्न है, तो यह एक मिथ्या सामान्य कारण होगा क्योंकि यह एक भाग पर आधारित है। यह सामान्यकरण तभी सही माना जा सकता है जब अन्य भागों का भी अध्ययन किया गया हो और उनमें परिवर्तनों को जान लिया गया हो।

यह सच है कि देश के आयात का परिमाण बढ़ गया है, पर केवल इसका निर्वचन, कि इसलिए देश की संपन्नता बढ़ गई है, गलत विश्लेषण पर आधारित है। इस निर्वचन में समस्या के सब पहलुओं पर विचार नहीं किया गया है । अगर समस्या का सही हल जानना हो तो उसका सही रूप में विश्लेषण करना पड़ेगा। स्पष्टतः पहला प्रश्न यह पूछा जा सकता है कि आयात के साथ-साथ निर्यात भी बढ़ा है या नहीं, अगर निर्यात भी उसी परिमाण में बढ़ा है जिस परिमाण में आयात, तो संपन्नता में वृद्धि नहीं हुई। यह भी संभव है कि निर्यात बढ़ गया है। उस दशा में संपन्नता में कुछ कमी हो सकता है। अगर यह मान लिया जाए कि आयात में वृद्धि अधिक हुई है, तब भी यह नहीं कहा जा सकता कि संपन्न में वृद्धि हुई। क्योंकि इस आयात की वृद्धि के साथ देशी वस्तुओं के उपभोग के परिमाण घट-बढ़ या समान रह सकते हैं। अगर ये बढ़ जाते हैं या समान रहते हैं तो यह कहा जा सकता है कि संपन्नता में वृद्धि हुई है, पर अगर ये कम हो जाते हैं तो संपन्नता की वृद्धि आयात की वृद्धि और देशी वस्तुओं के उपयोग के ह्रास के सापेक्षिक परिमाणों पर निर्भर रहेगी, पर बात यहीं पर तय नहीं हो जाती। इस बात पर भी विचार करना पड़ेगा कि इन वर्षों में देश की जनसंख्या कितनी थी। अगर दूसरे वर्ष में पहले की अपेक्षा अधिक जनसंख्या है तो संभव हो सकता है कि आयात की वृद्धि इसके कारण हुई हो और प्रति व्यक्ति उपभोग में कोई अन्तर न होने के कारण संपन्नता में वृद्धि न हुई हो। इसलिए जनसंख्या के परिवर्तनों पर भी विचार करना पड़ेगा इसके साथ वस्तुओं के उपभोग के विवरण पर भी विचार करना पड़ेगा। अगर देश में विलासिता की वस्तुओं का परिमाण आवश्यक वस्तुओं की लागत पर बढ़ा तो भी संपन्नता में वृद्धि नहीं होगी। क्योंकि देश के लोगों में अधिकांश को आवश्यक वस्तुएं पहले की अपेक्षा कम परिमाण में मिलेंगी। विलासिता की वस्तुओं का उपभोग कुछ ही लोगों द्वारा किया जाता है। इसलिए भले ही देश के लोगों में कुछ की, एक छोटे वर्ग की सम्पन्नता बढ़ गई हो, पर अधिकांश लोगों की विपन्नता के बढ़ जाने के कारण पूरे देश के लिए सम्पन्नता नहीं बढ़ेगी।

इस प्रकार के नमूने बढ़ाये जा सकते हैं। पर उपर्युक्त उदाहरण से यह स्पष्ट हो गया होगा कि मिथ्या सामान्यकरण किस प्रकार सही लगते हुए भी वस्तुस्थिति के बारे में गलत धारणा बना देते हैं। साथ ही साथ यह भी स्पष्ट हो गया होगा कि निर्वचन के लिए किस प्रकार विश्लेषण किया जाता है। वास्तव में निर्वचन एक सहज कार्य नहीं है। पूर्ण के प्रत्येक पक्ष के विषय में जानना पड़ता है और उन सब का एक साथ संतुलित अध्ययन करना पड़ता है। केवल इसी दशा में सही परिणाम निकाले जा सकते हैं, अन्यथा ये परिणाम मिथ्याभास मात्र होंगे।

देशनांकों का गलत निर्वचन
(Wrong Interpretation of Index Numbers)

देशनांकों के विषय में पहले कहा जा चुका है कि ये एक प्रवृत्ति को बताते हैं। साथ ही साथ यह भी बताया जा चुका है कि एक उद्देश्य से बनाए गए देशनांकों का उपयोग अन्य स्थानों पर नहीं किया जा सकता। देशनांकों के निर्वचन सम्बन्धी गलतियाँ दो प्रकार से हो सकती हैं। या तो देशनांकों की परिसीमाएँ न जाने बिना कोई सामान्य कथन कह दिया जाय। या फिर, एक प्रकार के देशनांकों का उपयोग अन्य स्थलों पर किया जाय। जैसे, अगर यह कहा जाय कि सामान्य-मूल्य स्तर बढ़ जाने के कारण मजदूरों का निर्वाह व्यय बढ़ गया है तो यह देशनांकों का गलत निर्वचन कहलाया जायगा। जैसा बताया जा चुका है, ये दोनों प्रकार के देशनांक विभिन्न वस्तुओं, विभिन्न प्रकार के मूल्यों, अलग-अलग भारों को लेकर बनाये जाते हैं। इसलिए एक में होने वाले परिवर्तन दूसरे के परिवर्तनों को सही-सही रूप में नहीं बता सकते। इसी प्रकार यह कहना कि सामान्य-मूल्य-स्तर बढ़ गया है इसलिए देश में द्रव्य की राशि भी बढ़ गई है, देशनांकों के गलत निर्वचन के कारण होगा। सामान्य-मूल्य-स्तर का बढ़ना द्रव्य की राशि पर ही निर्भर नहीं करता बल्कि वस्तुओं के परिमाण पर भी निर्भर रहता है। इसलिए जब तक दूसरे के बारे में निश्चित रूप से ज्ञात न हो, इस प्रकार का निर्वचन गलत होगा।

सहसम्बन्ध गुणक और सम्बन्ध गुणक का गलत निर्वचन
(Wrong Interpretation of Coefficient of Correlation and Association)

सहसम्बन्ध-गुणक के परिच्छेद में यह बताया जा चुका है कि यह केवल प्रवृत्ति बताता है—इसके लिये उपनति-रेखा भी खींची गई थी। साथ ही साथ यह भी बताया गया है कि सहसम्बन्ध-गुणक के मानों को देखकर परिमाण निकालने में बहुत सावधानी बरतनी चाहिए क्योंकि यह दो या अधिक चलों के बीच की परस्पर निर्भरता को पूर्ण रूप से नहीं दिखाता। फिर सहसम्बन्ध-गुणक होने का अर्थ यह नहीं है कि दो चलों में कार्यकारण सम्बन्ध हो। ऐसे स्थलों में अगर केवल सहसम्बन्ध-गुणक को देखकर परिणाम निकाले जायँगे तो वे भ्रामक होंगे। एक उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी। मान लीजिए उत्तर प्रदेश में गन्ना बोए जाने वाले और अन्न बोए जाने वाले खेतों के क्षेत्रफल में ऋणात्मक सहसम्बन्ध है। अर्थात् ऋणात्मक सहसम्बन्ध गुणक प्राप्त होता है, अगर इससे बिना अन्य बातों पर विचार किए हुए यह परिणाम निकाला जाय कि गन्ने की खेती

अन्न की खेती के मूल्य पर बढ़ रही है, तो यह सहसम्बन्ध गुणक का गलत निर्वचन हुआ। इससे अगर यह परिणाम निकाला जाय कि लोग चीनी के प्रति अन्न की अपेक्षा अधिक आसक्त हैं, तो भी यह गलत निर्वचन हुआ। क्योंकि यह सम्भव हो सकता है कि विदेशों से सस्ते मूल्य में अन्न के आने के कारण उसका उत्पादन गन्ने की अपेक्षा कम लाभदायक हो गया हो। या फिर चीनी की मिलों के खुल जाने के कारण भी गन्ने के दाम बढ़ सकते हैं, इसलिए अन्न का उत्पादन कम हो गया हो। संभव है कि नहरों के खुल जाने के कारण जो लोग पहले गन्ने का उत्पादन नहीं कर सकते थे, वे ऐसा करने लगे हों। प्रदेश की जलवायु में परिवर्तन होने के कारण भी ऐसा हो सकता है। इससे पहले, कि सहसम्बन्ध गुणक का किसी प्रकार निर्वचन किया जाय, उन सब पक्षों पर विचार कर लेना चाहिये जो सामग्री को प्रभावित कर सकते हैं। एक दूसरा उदाहरण लीजिए। किसी प्रदेश में जिन स्थानों में पार्क है वहाँ बाल-दुर्घटना कम है और जहाँ पार्क नहीं है वहाँ अधिक। इस प्रकार का निर्वचन पार्कों की संख्या और बाल-दुर्घटनाओं की संख्या के सहसम्बन्ध से निकाला जा सकता है। सहसम्बन्ध गुणक ऋणात्मक होगा। पर इससे यह परिणाम निश्चयात्मक रूप से नहीं निकाला जा सकता कि बाल-दुर्घटनाओं को कम करने के लिए पार्कों की संख्या बढ़ा दी जाय। यह भी सम्भव हो सकता है कि उन स्थान में बच्चों की संख्या अपेक्षाकृत कम हो और नौकरों की अधिक। या यह भी हो सकता है कि मकानों के साथ-साथ बगीचे भी हों और बच्चों को बाहर जाने की आवश्यकता अपेक्षाकृत कम पड़ती हो। इससे यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि सहसम्बन्ध गुणक के मान के निर्वचन में न केवल सावधानी बरतना आवश्यक है बल्कि साथ ही साथ, अन्य तथ्यों का ज्ञान होना भी आवश्यक है। इसके बिना किए गए निर्वचन भ्रमात्मक और गलत परिणाम देंगे।

इसी प्रकार सहसम्बन्ध-गुणक के निर्वचन में भी सावधानी बरतनी पड़ती है। यह सम्भव है कि दो श्रेणियों में किसी प्रकार का संबंध न हो पर ऐसा प्रतीत होता हो कि सम्बन्ध है। जिस प्रकार सहसंबंध गुणक का निर्वचन करने के लिये अन्य बातों पर भी विचार करना पड़ता है, उसी प्रकार सम्बन्ध-गुणक के निर्वचन के लिए भी यह आवश्यक है कि उन सब प्रभावों की जानकारी हो जो सम्बन्ध गुणक को प्रभावित कर सकती है। फिर जब सम्बन्ध गुणक निकाला जाता है तो केवल दो गुणों की उपस्थिति मानी जाती है। पर अन्य गुणों के होने के कारण यह सम्भव है कि वास्तव में सम्बन्ध के न होते हुए भी ऐसा प्रतीत हो कि सम्बन्ध है।

इन उदाहरणों से स्पष्ट हो गया होगा कि समंकों या सामग्री पर पूर्ण रूप से निर्भर करके निर्वचन नहीं किया जा सकता। ये समस्या के एक पहलू को सही रूप में समझा देते हैं। पर जहाँ तक अन्य बातों का प्रश्न है, केवल अनुभव और ज्ञान द्वारा ही

उचित निर्वचन किया जा सकता है। जब कभी भी निर्वचन करना पड़े, इन बातों का ध्यान रखना चाहिए और तदनुसार सावधानी बरतनी चाहिए।

प्रश्नावली

(१) समंकों के निर्वचन से आप क्या समझते हैं ? इसके महत्व पर विस्तारपूर्वक लिखिये ।

(२) निर्वचन में साधारणतः क्या गलतियाँ की जाती हैं ? इनसे बचने के लिए क्या सावधानियाँ बरतनी चाहिए ?

(३) निम्नलिखित सारणी में दिये गए समंकों का अध्ययन करके आप रूस-निवासियों की आर्थिक कर्मण्यता के बारे में क्या परिणाम निकालेंगे :—

१९२८=१००

	१९२९	१९३०	१९३१	१९३२	१९३३	१९३४	१९३५
औद्योगिक उत्पादन	१२६	१६४	२०३	२३१	२५०	३००	२६९
विनियोग-पदार्थों का उत्पादन	१३१	१८५	२४०	२९४	३०७	३८२	२८१
उपभोग-पदार्थों का उत्पादन	१२२	१४७	१७२	१९०	२००	२३०	२७४
वस्तविक आयात	९२	१४१	११६	७४	३७	२४	२५
वास्तविक निर्यात	११४	१२८	१००	७१	६१	५२	४८

(४) निम्नलिखित सामग्री का निर्वचन करिये ।

भारत में औद्योगिक कलह
(१९३९=१००)

वर्ष	कलह संख्या	मजदूरों की संख्या	बेकार हुये मनुष्य-दिन
१९३९	१००	१००	१००
४०	७८	१७१	१५२
४१	८८	७१	६७
४२	१७१	१८९	११६
४३	१७६	१२८	४७
४४	१६२	१३७	६९
४५	२०२	१८३	८१
४६	४०१	४७९	२५५
४७	४४६	४५०	३३२
४८	३१०	२५९	१५७
४९	२२७	१६८	१३६
५०	२०१	१७६	२५७

(५) निम्नलिखित सामग्री में माँगों के अनुसार कलह-संख्या (प्रतिशत में) दी गई है। इसका निर्वचन करिये।

वर्ष	कुल काम बन्दी	माँगें (प्रतिशत) मजदूरी और भत्ते	बोनस	वैयक्तिक	छुट्टी और काम के घंटे	अन्य	अज्ञात माँगें
१९३९	४०६	५७·३	०·५	१८·२	२.९	२१·१	—
४०	३२२	६२·७	२·८	१६·८	३·१	१४·६	—
४१	३५९	६०·७	२·५	१५·३	४·२	१७·३	—
४२	६९४	५१·९	११.३	९·१	१·०	२६.७	—
४३	७१६	४७·८	७·७	७·४	१·९	३५·२	—
४४	६५८	५६·५	७·६	१२·५	५·३	१७·९	—
४५	८२०	४३·४	१३·४	१७·७	६·८	१८·०	०·७
४६	१६२९	३७·१	४·९	१७·२	८.०	३२·८	—
४७	१८११	३१·७	१०·८	१९·३	५.२	३२·१	०·९
४८	१२५९	३०·५	९·०	२८·८	८·७	२२·१	०·९
४९	९२०	३०·१	५·७	२३·६	९·१	२५·५	६·०
५०	८१४	२७·३	९·१	२२·६	८·३	२८·६	४·१

(६) निम्नलिखित सामग्री का निर्वचन करिये और किन्हीं दो श्रेणियों को उपयुक्त चित्र द्वारा प्रदर्शित करिये।

महाद्वीप या देश	प्रतिशत भाग दुनिया का भूमि-क्षेत्र	दुनिया का कृषि-क्षेत्र	दुनिया का खाद्यान्न उत्पादन	दुनिया की जनसंख्या
एशिया (रूस को छोड़कर)	१८·६	३२.९	३१.०	५३.१
उत्तरी अमेरिका	१७·३	२१.२	२१.५	८.२
रूस	१६·१	१६.८	२२.०	७·६
यूरोप (रूस को छोड़कर)	३·७	१६.३	१६.०	१७.९
मध्य और दक्षिणी अमेरिका	१३·२	५.७	४·५	५.०
अफ्रीका	२४·१	५.६	४.०	७.७
आस्ट्रेलिया	७·०	१.५	१·०	०.५
कुल	१००.०	१००.०	१००.०	१००.०

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९५२)

(७) नीचे दिए गए दो कॉलेजों, क और ख, के परीक्षाफलों से बतलाइये कि कौन अच्छा है और क्यों ?

	क कॉलेज		ख कॉलेज	
	परीक्षा में वैठने वाले	उत्तीर्ण	परीक्षा में वैठने वाले	उत्तीर्ण
एम० ए०	३०	२५	१००	८०
एम० कॉम०	५०	४५	१२०	९५
वी० ए०	२००	१५०	१००	७०
वी० कॉम	१२०	७५	८०	५०
	४००	२९५	४००	२९५

(८) निम्नलिखित सारणी एक क्षेत्र में १० वर्ष के लिए औद्योगिक उत्पादन के मूल्य सम्वन्धी अंक और उसी क्षेत्र के लिए सामान्य-मूल्य देशनांक देती है :

वर्ष	उत्पत्ति का मूल्य (लाख रु० में)	सामान्य देशनांक
१९३१	६०	१००
३२	३६	९१
३३	४५	८७
३४	५८	८९
३५	८४	९१
३६	९३	९१
३७	८६	१०२
३८	८४	९५
३९	८२	१०८
४०	८०	१२०

इन अंकों पर टीका लिखिये ; इसका उल्लेख करते हुए कि, मूल्य परिवर्तन पर विचार करने के वाद, उत्पादन वस्तुतः कहाँ तक वर्ष प्रति वर्ष वढ़ा या घटा, और १९४० की स्थिति १९३६ की अपेक्षा कैसी है ?

(९) निम्नलिखित सारणी देशनांकों की दो श्रेणीयाँ देती हैं; एक श्रेणी (क) उस वस्तुओं के मुल्य स्तर को दिखाती है जिन्हें उत्तर प्रदेश का औसत कृपक वेचता है, और दूसरी श्रेणी (ख) उन वस्तुओं के मूल्य-स्तर को बताती है जिन्हें वह खरीदता है। किसी रीति से जिसे आप सवसे अच्छी समझें, इन अंकों का विश्लेषण कीजिए—इन वातों को आँकते हुए कि (१) इन अंकों को देखते हुए उत्तर प्रदेश के कृषक की आर्थिक

स्थिति १९४८ में मास प्रतिमास उसके अनुकूल या प्रतिकूल हुई और (२) १९४८ के अन्त में वह (i) १९३९ (ii) १९४८ के आरम्भ की अपेक्षा कैसा था ?

१९४८ के मास	श्रेणी क १९३९–१००	श्रेणी ख १९३९–१००
जनवरी	४३४	३१०
फरवरी	४२०	३२३
मार्च	३७४	३३२
अप्रैल	३८४	३५१
मई	४१७	३९०
जून	४३८	३८७
जुलाई	४७४	३९५
अगस्त	४९५	४०५
सितम्बर	५००	३९२
अक्टूबर	४९९	३९३
नवम्बर	४८५	३९२
दिसम्बर	४८५	३७८

(१०) निम्नलिखित अंकों का सावधानी से अध्ययन करिये ।

मौसम	उ० प्र० में गन्ने के अन्तर्गत क्षेत्र (लाख एकड़ों में)	गन्ने का उत्पादन (लाख टनों में)	मिलों द्वारा प्रयुक्त गन्ना (लाख टनों में)	मिलों द्वारा बनाई गई चीनी की राशि (लाख टनों में)	खांडसारी के उत्पादन की राशि (लाख टनों में)	गुड़ की उत्पादन राशि (लाख टनों में)
१९३१–३२	१५·९	२२२·५	८·५	०·७	२·०	—
३२–३३	१७·९	२६१·५	१६·५	१·४	२·२	—
३३–३४	१७·३	२५७·०	३०·२	२·७	१·६	—
३४–३५	१८·४	२७५·८	३६·९	३·२	१·२	१७·२
३५–३६	२२·५	३३३·६	५५·३	५·३	१·०	२०·४
३६–३७	२५·२	३८०·२	६३·०	६·१	०·८	२४·१
३७–३८	२२·२	३१९·४	५७·९	५·३	१·०	१८·८
३८–३९	१६·५	१४५·४	३५·१	३·२	१·०	७·३
३९–४०	१९·१	२१७·४	७०·३	६·६	१·०	९·२
४०–४१	२५·४	२८६·४	५२·२	५·१	१·२	१५·५
४१–४२	१७·५	१५४·५	३८·८	३·८	०·८	७·५

उपरिलिखित सारणी के आधार पर १९३७ से १९४२ तक उत्तर प्रदेश की चीनी अर्थ-व्यवस्था की अवस्था पर संक्षिप्त समालोचना करिये ।

अध्याय १६

भारतीय समंक

(Indian Statistics)

पिछले अध्यायों में बताया गया है कि किस प्रकार संमक प्राप्त होते हैं, और इनका विश्लेषण किस प्रकार किया जाता है, और अन्त में यह भी बताया गया है कि इन संमकों से किस प्रकार परिणाम निकाले जाते हैं। प्रस्तुत अध्याय में यह बताया जायगा कि भारत में इस प्रकार के समंक किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं, वे कहाँ मिलते हैं, उनमें क्या दोष और कमियाँ हैं।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि (Historical Background)

भारत में समंकों का संग्रहण, राजाओं के द्वारा, शासन-व्यवस्था को सुचारु रूप से चलाने के लिये किया जाता रहा है। इस बात के प्रमाण मिलते हैं कि आज से लगभग २५०० वर्ष पहले भारत में मजदूरी, मूल्य, भूमि आदि सम्बन्धी संमक जमा किए जाते थे। अकबर के काल में भी संमक जमा किये गये थे। पर इनका उद्देश्य निर्वचन करना या आर्थिक नीति निश्चित करना नहीं रहा। इनका संग्रहण इसलिए किया जाता था जिससे राजाओं को शासन-प्रबन्ध में सुविधा हो और वे अपनी शक्ति का अनुमान लगा सकें। चूँकि भारतवर्ष सदा से कृषि-प्रधान देश रहा है, अतः ये समंक भारतीय अर्थ-व्यवस्था के इस पहलू पर प्रकाश डालते हैं।

ईस्ट इंडिया कपनी के आने के बाद भी संमक-संग्रहण का स्थान गौण रहा। इस काल के लिए जो संमक उपलब्ध हैं वे आयात-निर्यात सम्बन्धी हैं या कृषि सम्बन्धी हैं। कम्पनी को अपनी अवस्था जानने के लिये आयात-निर्यात-समंकों की आवश्यकता पड़ती थी। कृषि सम्बन्धी संमकों का संग्रहण मालगुजारी निश्चित करने के उद्देश्य से किया गया था। इस काल में भी समंकों का संग्रहण शासन या प्रबन्ध की सुविधा के लिये किया गया। इन दोनों कालों में किसी प्रकार साँख्यिकीय संगठन (statistical organisation) नहीं था। जो कुछ समंक संग्रहित किये गए, वे फुटकर रूप में या कम्पनी के द्वारा या मालगुजारी अफसरों (revenue officials) द्वारा किये गये थे।

१९ वीं शताब्दी के उत्तरार्द्ध में समंक संग्रहण की ओर कुछ ध्यान दिया जाने लगा। इसका मुख्य कारण उस समय पड़ने वाले अकाल थे। १८६८ में सर्व प्रथम ब्रिटिश भारत से सम्बन्धित एक सांख्यिकीय-संक्षेप (Statistical Abstract) प्रकाशित किया गया, जो इसके बाद प्रति वर्ष प्रकाशित होता रहा। भारतीय अकाल-कमीशन (Indian Famine Commission) की सिफारिश के अनुसार एक सांख्यिकीय-अफसर की कृषि विभाग में नियुक्ति की गई पर बाद में यह विभाग बन्द कर दिया गया। भारत की सर्व-प्रथम जनगणना १८७२ में की गई थी, पर चूँकि इसमें पूरे देश को नहीं लिया गया था इसलिये इसे छोड़ दिया जाता है। पहली, पूरे देश के लिये की जाने वाली जनगणना १८८१ की है। १८८१ में ही 'इम्पीरियल गजेटियर ऑफ इंडिया' (Imperial Gazetteer of India) का पहला संस्करण प्रकाशित हुआ जिसमें भारत सम्बन्धी आर्थिक सांख्यिकी दी गई थी। इसके बाद, अकाल कमीशन (१८८०) की सिफारिशों के अनुसार कई प्रांतों में कृषि-विभाग खोले गए। फसल सम्बन्धी पूर्वानुमान और पशुगणना का प्रारम्भ क्रमशः १८९४ और १८८७-८८ में हुआ।

इस शताब्दी के आरम्भ में सांख्यिकीय-संगठन में कुछ सुधार हुए। १९०५ में 'डिपार्टमेन्ट ऑफ कमर्शियल इन्टेलिजेन्स एंड स्टेटिस्टिक्स' (Department of Commercial Intelligence and Statistics) स्थापित किया गया। इसने १९०६ में 'इंडियन ट्रेड जर्नल' (Indian Trade Journal) प्रकाशित करना शुरू किया। 'रॉयल कमीशन ऑन एग्रीकल्चर' (Royal Commission on Agriculture) की सिफारिशों पर 'इंडियन काउन्सिल ऑफ एग्रीकल्चरल रिसर्च' के अन्तर्गत एक सांख्यिकीय विभाग भी खोला गया। बाउले-रॉबर्टसन कमेटी की सिफारिश के अंशतः कार्यान्वित करके १९३८ में 'ऑफिस ऑफ द इकॉनॉमिक एडव्हाइजर टु द गवर्नमेन्ट ऑफ इंडिया' (Office of the Economic Adviser to the Government of India) खोला गया। इसका कार्य भारत के आर्थिक पहलू सम्बन्धी सूचना का संग्रहण और अध्ययन करना और तदनुसार भारत सरकार को सलाह देना है। १९४२ में 'इंडस्ट्रियल स्टेटिस्टिक्स एक्ट (Industrial Statistics Act) पास किया गया। इसके अनुसार भारत सरकार को कुछ औद्योगिक समंकों को राज्यों द्वारा जमा करने का अधिकार है । १९४९ में 'नेशनल इन्कम कमेटी' (National Income Committee) नियुक्त की गई। आजकल अधिकांश राज्यों और केन्द्रीय सरकार के विभागों में सांख्यिकीय अध्ययन के लिए अलग विभाग हैं। १९४९ में सांख्यिकीय क्रियाओं का समन्वय करने के लिए एक सांख्यिकीय एकक (statistical unit) बनाया गया । सन् १९५३ में

'कलेक्शन ऑफ स्टैटिसटिक्स ऐक्ट' (Collection of Statistics Act) पास किया गया। इसके अन्तर्गत भारत सरकार को बहुत से क्षेत्रों में संमक संग्रहण करने का अधिकार मिल गया। इस ऐक्ट के अनुसार अब भारत सरकार किसी भी प्रयोग, व्यापार-संख्या अथवा श्रम-सम्बन्धी संमक संग्रह कर सकती है। सन् १९४२ का 'इण्डस्ट्रियल स्टैटिसटिक्स ऐक्ट' (Industrial Statistics Act) भी अब इस नये ऐक्ट में मिला दिया गया है। भारत में यह पहला ही अधिनियम है जिसने भारत सरकार को इतने अधिकार दिए हैं। यह आशा की जा सकती है कि भविष्य में उद्योग, व्यापार तथा श्रम-सम्बन्धी समंक पर्याप्त मात्रा में परिशुद्धता के साथ संग्रहित किए जायँगे।

भारतीय संविधान की धारा २४६ के अनुसार कुछ ऐसे विषय हैं जो केन्द्रीय सरकार के अन्तर्गत आते हैं और कुछ राज्य क और ख सरकारों के अन्तर्गत। जो विषय केन्द्रीय सरकार के अन्तर्गत हैं उनसे सम्बन्धित समंक केन्द्रीय सरकार एकत्रित करती है और जो विषय राज्य के सरकारों के अन्तर्गत आते हैं उनके समंक राज्य सरकारें संग्रहित करती ह। कुछ विषय ऐसे भी हैं जो केन्द्रीय तथा राज्य सरकार, दोनों ही के अन्तर्गत हैं। इनसे सम्बन्धित समंक संग्रहण के अधिनियम बनाने का अधिकार केन्द्रीय और राज्य सरकार दोनों ही को है। भारत में रेलवे, अधिकोप तथा मुद्रा, विदेशी व्यापार और जनसंख्या आदि से सम्बन्धित समंक केन्द्रीय सरकार एकत्रित करती हैं तथा कृषि, वन, शिक्षा, इत्यादि से सम्बन्धित समंक राज्य सरकारें एकत्र करती हैं। वास्तव में केन्द्रीय और राज्य सरकारों में समन्वय (co-ordination) रहता है और समंक संग्रहण की रीतियाँ तथा अधिनियम एक-दूसरे की सलाह से ही बनाये जाते हैं।

जहाँ तक अ-राजकीय और अर्ध-राजकीय समंकों का प्रश्न है वह, अन्य देशों की भाँति, भारत में भी अपेक्षाकृत कम हैं। भारत में इस प्रकार के समंक चेम्बर्स ऑफ कॉमर्स (Chambers of Commerce) विश्वविद्यालयों, उद्योगपतियों, व्यापार संघों, स्टाक इक्सचेंज तथा आर्थिक पत्रिकाओं द्वारा प्रकाशित किए जाते हैं।

आगामी पृष्ठों में कुछ प्रमुख भारतीय समंकों का संक्षिप्त विवरण दिया गया है।

जनगणना (Population Census)

जनगणना का महत्व—जनगणना की उपयोगिता न केवल शासन-प्रबन्ध के लिए है, बल्कि, साथ ही साथ, अन्य विषयों के अध्ययन में भी है। यह ठीक है कि उचित शासन व्यवस्था के लिए राज्य को अपने नागरिकों के बारे में जानना चाहिए। इसे जाने बिना वर्तमान सामाजिक, आर्थिक और राजनीतिक व्यवस्था में सुधार करना सम्भव न हो सकेगा और नहीं किसी प्रकार का आयोजन

सहज हो पायगा। सुरक्षा, वृत्ति हीनता, प्रवास आदि की समस्याओं को सही रूप से हल करने में इन समंकों को जानना आवश्यक है। अगर जनगणना की उपयोगिता केवल यहीं तक सीमित रहती, तब भी इसको करना उचित समझा जाता। पहले की जनगणनाएँ इसी उद्देश्य से की गई हैं। पर, इससे अतिरिक्त, जन-गणना का महत्व अन्य विषयों में भी निर्विवाद है। अर्थशास्त्र में जनसंख्या का अध्ययन अपना अलग स्थान रखता है। किसी भी वास्तविक आर्थिक अध्ययन में जनसंख्या को उचित स्थान देना अनिवार्य है। अर्थशास्त्र का विद्यार्थी यह जानना चाह सकता है कि जनसंख्या की उपनति किस प्रकार की है, देश का व्यवसायिक बंटन (occupational distribution) क्या है, उपलब्ध साधनों और जन-संख्या में क्या सम्बन्ध है, आदि। अर्थशास्त्री के लिये जनगणना कितनी महत्वपूर्ण है इसका ज्ञान केवल इस बात से हो जायगा कि १९वीं शताब्दी के बाद में जब जनसंख्या बहुत शीघ्रता से बढ़ रही थी, तब माल्थस ने इस बढ़ती हुई जनसंख्या का भविष्य की आर्थिक स्थिति पर पड़ने वाले प्रभावों का विश्लेषण किया था, और आज, जब कुछ पाश्चात्य देशों में जनसंख्या की वृद्धि की दर अचल है या कम हो रही है, वे अर्थशास्त्री इसके परिणामों पर विचार में व्यस्त हैं। व्यापारियों और उद्योगपतियों को भी जनगणना के संमकों से लाभ पहुँच सकता है। इन समंकों से वे यह जान सकते हैं कि जनसंख्या का घनत्व कहाँ अधिक है और इससे वे सम्भावी माँग का अनुमान लगा सकते हैं। व्यावसायिक बंटन से वे यह जान सकते हैं कि किसी स्थान विशेष में उनकी वस्तुओं की माँग हो सकती है या बढ़ सकती है या नहीं। उद्योगों के स्थान-निर्धारण में भी जनगणना के संमकों से लाभ उठाया जा सकता है। समाजशास्त्रियों के लिये भी जनगणना का महत्व कम नहीं है, इससे वह देश की सामाजिक स्थिति जान सकते हैं और उसमें सुधार करने के लिये व्यावहारिक सुझाव दे सकते हैं। नगर-निवासियों और ग्राम निवासियों की संख्याओं के बारे में जानकर वह सामाजिक व्यवस्था में होने वाले परिवर्तनों का अन्दाज लगा सकते ह। इसी भांति स्त्री-पुरुष-अनुपात (sex-ratio), विधुरों और विधवाओं सम्बन्धी संमकों से लाभ उठा सकते हैं। बाल मृत्यु, मृत्यु और जन्म अर्घ आदि का ज्ञान भी उनके लिए लाभदायक है। जनगणना के इन पक्षों पर अधिक विस्तारपूर्वक विचार न करके हम जनगणना से सम्बन्धित सांख्यिकीय समस्याओं और भारत के जनगणना के संमकों पर विचार करेंगे।

जनगणना का उद्देश्य और उसकी रीतियाँ—सांख्यिकीय दृष्टिकोण से संगणना (census) का उद्देश्य किसी प्रदेश या क्षेत्र के प्रत्येक सदस्य के बारे में परिशुद्ध सूचना प्राप्त करना होता है। वह सूचना केवल लोगों की संख्या जानने तक ही सीमित नहीं रहती बल्कि, साथ ही साथ, लोगों के बारे में अन्य प्रकार के तथ्य जाने

जाते हैं। इस लक्ष्य की प्राप्ति के लिये अत्यधिक सावधानी बरतनी पड़ती है, अन्यथा जनगणना करने का कोई तात्पर्य नहीं रहता।

जनगणना करने की दो रीतियाँ हैं। पहली में किसी निश्चित कालावधि में या समय में जीवित व्यक्तियों की संख्या गिन ली जाती है। दूसरी में मृत्यु और जन्मों की संख्या गिन ली जाती है और इस प्रकार जनसंख्या में होने वाले परिवर्तनों को जान लिया जाता है। पहली प्रकार की रीति से यह लाभ है कि इससे लोगों के बारे में अन्य प्रकार की सूचनाएँ भी एकत्रित की जाती हैं। दूसरी में यह लाभ है कि इसमें मृत्यु और जन्म अर्थ, उनके कारण आदि के बारे में जानकारी मिलती है। पहली के द्वारा प्राप्त संमंक **संगणना-संमक** कहलाते हैं और दूसरी द्वारा प्राप्त **जीवन-मरण समंक** (Vital Statistics) आजकल, प्रायः प्रत्येक देश में, दोनों प्रकार के संमकों का संग्रहण किया जाता है। इस भाग में केवल संगणना पर विचार किया जाएगा। जीवन-मरण संमकों पर आगामी पृष्ठों में लिखा जायगा।

भारत में जनगणना की पद्धति

भारतीय जनगणना प्रत्येक दशक में की जाती है। सर्व प्रथम भारतीय जनगणना १८८१ में की गई थी। इससे पूर्व एक अन्य जनगणना १८७२ में हुई थी, पर इसमें एकरूपता न होने के कारण और सब स्थानों में न ली जाने के कारण, इसे प्रायः छोड़ दिया जाता है। अन्तिम जनगणना, जो भारत की आठवीं जनगणना है, १९५१ में ली गई है।

सन् १९५१ के पूर्व जनगणना पद्धति

संगणन-अधिनियम (Census Act)

प्रत्येक भारतीय जनगणना से पहले एक संगणन-अधिनियम पास किया जाता था, जिसके अनुसार केन्द्रीय सरकार जनगणन कार्य का संगठन एवं संचालन करने के लिए सबसे ऊपर एक जनगणना-आयुक्त (Census-Commissioner) और प्रत्येक प्रान्त में जनगणना निरीक्षकों (Census Superintendents) की नियुक्ति करती थी। इसके अनुसार विभिन्न प्रकार की गैरसरकारी एवं अर्द्धसरकारी संस्थाओं को जनगणना कार्य में सरकार की सहायता करनी पड़ती है। इसके अतिरिक्त प्रत्येक व्यक्ति भी जनगणना में सहायता पहुँचाने के लिए कानून बाध्य होता है। उसे जन-गणना अफसर या प्रगणक (enumerator) को प्रश्नावली में दिए गए प्रश्नों का उत्तर सही-सही देना पड़ता है और तत्सम्बन्धी जो कुछ सूचना माँगी जाती है उसे देनी पड़ती है। इसके अनुसार प्रगणक या जनगणना-अफसर को यह अधिकार है कि वह मकानों में जनगणना सम्बन्धी चिन्ह अंकित करे, और

लोगों के मकानों के भीतर जा सके। यदि जनगणना कार्य में कोई व्यक्ति सहयोग नहीं देता या गलत सूचना देता है या अगर कोई प्रगणक या जनगणना-अफसर अपना कार्य उचित रूप से नहीं करता तो उन्हें जुर्माना देना पड़ता है।

जनगणना अधिकारी (Census Staff)

इस प्रकार जनगणना-अधिकारियों में सर्व प्रथम एक जनगणना आयुक्त (Census Commissioner) होता था। इसके साथ-साथ प्रत्येक राज्य के लिए एक जनगणना निरीक्षक (Census Superintendent) की नियुक्ति की जाती थी जिसके अन्तर्गत प्रत्येक जिले के लिए एक जिला जनगणना अधिकारी (District Census Officer) होता था। प्रत्येक जिले को जनगणना क्षेत्रों (प्रायः तहसीलों) में बाँटा जाता था जिनकी जनगणना का कार्य क्षेत्र-निरीक्षक (Charge-Superintendent) द्वारा किया जाता था। इनके अन्तर्गत वृत्त निरीक्षक (Circle Superintendents) एक कस्बे या शहर के अधिकारी होते थे, जिनके अधीन पर्यवेक्षक (Supervisers) तथा प्रगणक (Block-enumerators) क्रमशः विभिन्न मुहल्लों और मकानों की जनगणना करने के लिए होते थे। जनगणना में प्रगणकों का कार्य सबसे अधिक महत्वपूर्ण है; क्योंकि सूचना प्राप्ति का कार्यभार इन्हीं पर रहता है। भारतीय रियासतों (Indian States) में उनके अपने अधिकारी होते थे। जनगणना कार्य के लिए सरकार अपने स्थायी कर्मचारियों को ही नियुक्त करती थी। इस प्रकार प्रायः जिला जनगणना अधिकारी का कार्य डिप्टी कलक्टर और क्षेत्र निरीक्षकों का कार्य तहसीलदार तथा नायब तहसीलदार (Naib Tahsildar) करते थे। शहरी क्षेत्रों में कानूनगो उपक्षेत्रों (Circles) के अधिकारी होते थे। पर्यवेक्षकों का कार्य विभिन्न सरकारी विभागों के लिपिक तथा प्रगणकों का कार्य प्रायः अध्यापक एवं कम वेतन वाले सरकारी कर्मचारी करते थे। ग्रामीण क्षेत्रों में जनगणना अधिकारियों का कार्य मालगुजारी (revenue) विभाग के कर्मचारी करते थे और प्रायः पटवारी प्रगणक का कार्य करते थे।

प्रशिक्षण (Training)

विभिन्न अधिकारियों की नियुक्ति के पश्चात् उन्हें जनगणना के सम्बन्ध में कुछ शिक्षा दी जाती थी। यह शिक्षा दो प्रकार से दी जाती थी। प्रगणकों से ऊपर के अधिकारियों को सर्वप्रथम जनगणना-पुस्तिका (census manuals) दिए जाते थे जिनमें जन-गणना की पद्धति कार्य-ढंग और विभिन्न अधिकारियों के कर्त्तव्यों की सूचना रहती थी। इसके अतिरिक्त अधिकारियों को कुछ मौखिक शिक्षा भी दी जाती थी। कुछ प्रगणकों एवं पर्यवेक्षकों को भरने के लिए नमूने की अनुसूचियाँ दी जाती थीं,

जो कि गलत होने पर उनके ऊपर के अधिकारियों द्वारा ठीक कर दी जाती थी। इस प्रकार लगभग बीस लाख व्यक्तियों की आवश्यकता जनगणना के कार्य में पड़ती थी। परन्तु उनको दी जाने वाली शिक्षा बहुत ही सूक्ष्म और नाममात्र की होती थी।

सन् १९३१ तक जनगणना पद्धति

गृह संख्यान (House Numbering)

जनगणना का वास्तविक कार्य गृह-संख्यान (house numbering) के साथ प्रारम्भ होता था। यह बहुत ही महत्वपूर्ण कार्य था और वास्तविक जनगणना तिथि से पूर्व ही बहुत कुछ कर लिया जाता था। जनगणना कार्य के लिए "गृह" शब्द की परिभाषा, इसके साधारण अर्थों से भिन्न है। भारत में हुई विभिन्न जनगणना में "गृह" शब्द की परिभाषा एकसरूप (uniform) नहीं रही है। सन् १९३१ एवं उससे पूर्व की जनगणनाओं में भी गृह शब्द की परिभाषा "चूल्हे" के आधार पर दी गई है। यह एक साधारण समझ और लोगों के प्रख्यात रीति-रिवाजों (customs) पर आधारित बात है कि संयुक्त परिवार के सभी सदस्य उसी एक चूल्हे से बना हुआ भोजन खाते हैं। अतः गृह-गणन का कार्य उन परिवारों की संख्या-गणन था, जिनमें कि एक साधारण भोजन बनाने का स्थान (common cooking place) था।

जनसंख्या गणन (Population Count)

गृह-गणन कार्य के पश्चात् एक प्रारम्भिक जनगणना (Preliminary Census) होती थी। प्रायः यह कार्य वास्तविक जनगणना तिथि से कुछ सप्ताह पूर्व हुआ करता था। प्रगणक अनुसूचियों (schedules) को लेकर अपने खण्ड (block) के विभिन्न घरों में जाता था और स्वयं इन अनुसूचियों को भरता था। यह कार्य पर्यवेक्षकों एवं अन्य अधिकारियों द्वारा बड़ी सावधानी से देखा जाता था। वास्तविक जनगणना (actual census) का सम्बन्ध प्रायः एक विशेष रात से होता था। जनगणना रात्रि (census night) को समस्त प्रारम्भिक कार्य पूर्ण रहता था। जो लोग मकान छोड़कर चले जाते थे या जिनकी मृत्यु हो जाती थी उनका नाम सूची (list) से हटा दिया जाता था और जो नए लोग मकान में आते थे उनका नाम लिख लिया जाता था। जो लोग जनगणना रात्रि को किसी गाड़ी या नाव से यात्रा कर रहे होते थे अथवा जंगलों में काम कर रहे होते थे उनके बारे में तनिक कठिनाई होती थी, इन तथा ऐसे ही अन्य विषयों के लिए विशेष प्रबन्ध किए जाते थे। जनगणना रात्रि को गाड़ी से यात्रा करने वाले सभी व्यक्ति जो शाम को ७ बजे के बाद टिकट खरीदते थे, उनकी गणना समय रहने पर प्लेटफार्म पर की जाती थी,

और समय न रहने पर गाड़ी में की जाती थी, रात्री को स्टेशन पर रहने वाले लोगों की गणना तब तक वहीं होती थी जब तक कि वे अपनी गणना हुई का सबूत नहीं दे देते थे। अगले प्रातःकाल ६ बजे के लगभग सब रेलगाड़ियों को रोक लिया जाता था और तब तक बचे हुए लोगों को जनगणना में सम्मिलित कर लिया जाता था। इसी प्रकार के अन्य विषयों के लिए एस ही विशेष प्रबन्ध किए गए थे।

अगले प्रातःकाल प्रत्येक प्रगणक अपने खण्ड की जनसंख्या का एक आवेदन (statement) तैयार कर अपने पर्यवेक्षक को देता था जो इसका निरीक्षक करके अपने अपवृत के सभी आवेदनों को क्षेत्र निरीक्षक (Charge Superintendent) को देता था। इसी प्रकार क्षेत्र-निरीक्षक अपने क्षत्र के समस्त योग को तैयार कर जिला जनगणना अधिकारी (district census officer) को भेजता था जो फिर इन अंकों को प्रान्तीय निरीक्षकों (Provincial Superintendent) को भेजता था। सब जिलों के अंकों (figures) का योग तैयार कर प्रान्तीय योग (Provincial totals) प्राप्त हो जाते थे।

वस्तुतः जनगणना (De-facto Census)

सन् १९३१ तक भारत में जनगणना वस्तुतः प्रणाली (de facto system) के अनुसार होती थी। इसके अंतर्गत जनगणना-रात्री को व्यक्ति वहीं गिने जाते थे जहाँ वे पाए जाते थे। इस पद्धति में अनेक कमियाँ हैं। इसमें सदैव दुबारा गणना (double counting) होने की सम्भावना रहती है और यदि लोग अपने घरों में व्यक्तियों की संख्या अधिक या कम बता देते हैं तो उसको सत्यापित (verify) करने का कोई ढंग नहीं है। वास्तव में और विशेषकर बंगाल प्रान्त में लोगों की संख्या का अधिकानुमान (over-estimation) हुआ। जहाँ कि हिन्दू और मुसलमानों की संख्या लगभग बराबर थी, क्योंकि उन दिनों राज्य सभाओं में स्थान जाति-प्रतिनिधित्व (communal representation) के आधार पर विभक्त होते थे। इसके अतिरिक्त इस प्रकार की वस्तुतः गणना आर्थिक- विभाजन तथा ऐसे ही अन्य विषयों की चित्रण नहीं करती। इसमें अत्यधिक प्रगणकों की आवश्यकता पड़ती है क्योंकि प्रारम्भ से लेकर अन्त तक का समस्त जनगणना का कार्य एक ही रात्री में समाप्त करना होता है। फिर जनगणना-रात्री को छांटने की कठिनाई होती है। यह पूर्ण चाँदनी रात होनी चाहिए क्योंकि ग्रामों में बिजली की रोशनी नहीं होती, यह अत्यधिक सर्द या गर्म रात्री नहीं होनी चाहिए और उस दिन कोई उत्सव आदि भी नहीं होना चाहिए क्योंकि ऐसे दिन बहुधा लोग घर से बाहर रहते हैं। इन कठिनाइयों के कारण सन् १९४१ में De facto प्रणाली के स्थान पर जनगणना के लिए De Jure प्रणाली को अपनाया गया।

सन् १९४१ में परिवर्तन (Changes in 1941)

सन् १९४१ में सबसे महत्वपूर्ण परिवर्तन यह हुआ कि एक-रात्री प्रगणना (one-night enumeration) को हटाकर कालावधि प्रणाली के अनुसार जनगणना की गई। विधानतः गणना (de-jure count) के अनुसार जनसंख्या की गणना प्रसामान्य निवास स्थान (normal residence) के आधार पर होती है और लोग वहाँ नहीं गिने जाते जहाँ कि वे जनगणना रात्री को पाए जाते हैं। प्रायः जनगणना की एक अवधि तय करली जाती है और उस अवधि में कोई भी व्यक्ति कितने ही समय के लिए अपने प्रसामान्य निवास स्थान में रहता है तो वह अपने प्रसामान्य निवास-स्थान पर ही गिना जाता है, भले ही वह जनगणना के दिन वहाँ उपस्थित न हो। सन् १९४१ की जनगणना में यह अवधि (period) एक सप्ताह की थी। इस प्रणाली के अनुसार चूँकि कार्य एक समयावधि में विभक्त था, इसलिए प्रगणकों की संख्या कम कर दी गई। इसके अतिरिक्त इस प्रणाली ने जनगणना-रात्री के चुनाव करने की कठिनाइयों को दूर कर दिया और अंकों के सही होने में सन्देह होने पर निरीक्षण एवं सत्यापन का अवसर भी दिया।

स्लिप पद्धति एवं २% निदर्शन (Slip System and 2% Sample)

सन् १९४१ की जनगणना में एक अन्य महत्वपूर्ण परिवर्तन यह हुआ कि पुरानी "अनुसूचियाँ" (schedules) समाप्त कर दी गईं और उनके स्थान पर प्रगणना कागज के छोटे-छोटे टुकड़ों (slips) में की गई जिनसे फिर सारणी (tables) तैयार की गई। १९४१ से पूर्व जनगणना की सूचना पहले अनुसूचियों में अंकित की जाती थी और फिर स्लिपों में उतारी जाती थी जिनसे फिर सारणीयन (tabulation) किया जाता था इससे कार्य बढ़ जाता था और त्रुटियाँ होने की सम्भावना अधिक थी। १९४१ की जनगणना में न केवल कार्य ही कम हुआ वरन् छापने का व्यय (printing charges) भी कम हो गया क्योंकि अनुसूचियों के स्थान पर स्लिपों से काम लिया जाने लगा। सन् १९४१ का एक अन्य नवीन परिवर्तन यह था कि एक बाद की तारीख पर जनगणना समंकों (census date) को सत्यापित (verify) करने के लिए सब चिटों का २% दैव-निदर्शन (random sample) लिया गया। विश्लेषण और सत्यापन (analysis and verification) के लिए प्रत्येक पचासवीं चिट लेकर अन्य चिट से अलग रख दी गई, दुर्भाग्यवश युद्ध छिड़ जाने से इस निदर्शन का विश्लेषण उस समय न हो सका परन्तु बाद में जब राष्ट्रीय आय आयोग (National Income Committee) सन् १९४९ में भारत की

राष्ट्रीय आय का आगणन (estimation) करने के लिए कुछ तथ्य इकट्ठे कर रहा था तो इस निदर्शन का उपयोग किया गया।

गृह-सूची का वितान (Extension of House list)

गृह-सूची का वितान सन् १९४१ की जनगणना का एक अन्य परिवर्तन था। गृह संख्यान के समय एक अन्य प्रारम्भिक जनगणना भी की गई और प्रत्येक घर में रहने वाले व्यक्तियों की संख्या, उनकी आयु एवं यौन आदि भी लिख लिए गए। इससे गलत प्रगणना (wrong enumeration) को प्रमत्यापित करने की सम्भावना हो सकी।

सन् १९५१ की जनगणना में छपाई और यान्त्रिक सारणीयन का पूर्ण केन्द्रीयकरण (centralization) किया गया, सम्पूर्ण सारणीयन यन्त्रों द्वारा न किया जा सका, परन्तु सरकारी यन्त्रों (machines) को खाली समय में इस कार्य में लगा कर प्रयोग किया गया जो कि बहुत सफल सिद्ध हुआ।

नवीन सूचना (New-information)

इसके अतिरिक्त कुछ नवीन सूचनाएँ भी एकत्रित की गईं जो कि पहले देश में उपलब्ध न थीं। उदाहरणतया १९४१ की जनगणना में प्रथम शिशु के जन्म के समय माता की आयु से सम्बन्धित एक प्रश्न था। यह सूचना राष्ट्र की शुद्ध पुनर्जन्म दर (Net reproduction rate) का अनुमान लगाने के लिए एकत्रित की गई थी। इन जनगणना के समय कुछ सूचनाएँ जो पहले इकट्ठी की जाती थीं किन्तु जो अब अनावश्यकीय समझी गई, इकट्ठी नहीं की गई।

सन् १९५१ की जनगणना (Population Census 1951)

सन् १९५१ की अन्तिम जनगणना, भारत की आठवीं जनगणना और स्वतन्त्र भारत की प्रथम जनगणना है अतः यह विशेष महत्वपूर्ण है। जनगणना युक्ति में कई विशेष प्रकार के परिवर्तन किए गए और अनेक नवीन समस्याओं के सम्बन्ध में सूचना एकत्रित की गई। कई पद (items) जो कम उपयोगी समझे गए वे प्रश्न सूची में से हटा दिए गए और जनसंख्या के आर्थिक लक्षणों (economic characteristics) सम्बन्धी नवीन पद जोड़े गए। इस पिछली जनगणना के प्रतिवेदन (reports) बहुत व्यापक हैं। वे १७ भागों (volumes) में दिए गए हैं जो कि ६३ उपभागों (parts) में विभक्त हैं। पहले भाग में अखिल भारतीय जनगणना प्रतिवेदन (All India census report) है और यह ५ उपभागों में विभक्त है। अन्य १६ भाग जो कि ५८ उपभागों में विभक्त हैं, प्रान्तीय जनगणना प्रतिवेदन (state census reports) से सम्बन्धित हैं। इनके साथ-साथ ३०७ जिला जनगणना हस्त-पुस्तिकाएँ (district

census hand books) तैयार की गई है और एक दर्जन से भी अधिक आर्थिक एवं सामाजिक विवेचन सम्बन्धी पुस्तिकाएँ छापी गई हैं। इस जनगणना में कुल १४९ लाख रुपए व्यय हुए। लगभग ७ लाख आदमियों ने यह कार्य सम्पन्न किया। इनमें से ५,९३,५१८ प्रगणक, ८०,००६ पर्यवेक्षक तथा ९८५४ क्षेत्र अधिकारी (charge officers) थे। प्रगणन कार्य ९ फरवरी १९५१ को प्रारम्भ और ३ मार्च को समाप्त होकर, तीन सप्ताह रहा। इन २१ दिनों में लगभग ६ लाख जनगणना कार्यकर्ताओं ने ६४४ लाख घरों का निरीक्षण कर सूचनाएँ प्राप्त कीं, उनको ७ करोड़ देशवासियों द्वारा दी गई सूचना ३५६९ लाख जनगणना पत्रों (sensus slips) में उतारी गई।

नागरिकों का राष्ट्रीय रजिस्टर (National Register of citizens)

१९५१ में गृह-सूची के आधार पर पहली बार नागरिकों का राष्ट्रीय रजिस्टर बनाया गया जो प्रत्येक गाँव और नगर के लिए रक्खा गया है। हवाले के लिए यह रजिस्टर अधिकृत व्यक्तियों को शासन या अन्य किसी आर्थिक अथवा सामाजिक सूचना प्राप्त करने के लिए उपलब्ध है। अन-अधिकृत (un-authorised) व्यक्तियों को यह रजिस्टर देखने को नहीं मिलता और अन्य जनगणना लेखों की भाँति अदालतों में गवाही के रूप में प्रस्तुत नहीं किया जा सकता। यह रजिस्टर बहुत उपयोगी है। इससे स्थानीय जनगणना की सूचना आसानी से प्राप्त हो जाती है और दैव निदर्शन के आधार पर आर्थिक एवं सामाजिक पैमाइश (survey) करने के लिए सामग्री प्राप्त हो जाती है। मतदाता सूची (electoral rolls) के लिए यह अत्यन्त उपयोगी है। इस रजिस्टर से जनगणना प्रगणन में एक नवीन निरीक्षण प्रारम्भ हो जाने से प्रगणन कार्य बहुत सुधर गया है।

स्थायी-अधिनियम (Permanent Act)

पहली जनगणनाओं की अपेक्षा अधिक व्यापक एवं वैज्ञानिक होने के अतिरिक्त १९५१ की जनगणना एक स्थाई अधिनियम के अनुसार हुई है जिसके अन्तर्गत एक स्थायी रजिस्ट्रार जनरल (Registrar General) और जनगणना आयुक्त (commissioner) की नियुक्ति हुई है। इससे जनसंख्या समंकों में बहुत प्राचीन कमियाँ दूर हो गई हैं और अब वे भविष्य में ऐसी सूचनाओं के लिए और अधिक परिशुद्ध, प्रभावशाली और उपयोगी सिद्ध हो सकेंगे।

इस प्रणाली के लाभ सन् १९४१ की जनगणना में अनुभव किए गए थे और १९५१ में प्रगणना अवधि एक सप्ताह से तीन सप्ताह तक बढ़ा दी गई है। चूँकि प्रगणकों को कार्य करने के लिए पूरे २१ दिन मिलते हैं इससे उनका कार्य सरल और कार्यक्षम हो गया

हैं। इस अवधि में पहले तैयार की हुई गृह सूची भी खण्ड प्रगणकों द्वारा देख ली जाती है।

एक व्यक्ति का प्रसामान्य निवास स्थान गणना का आधार था। यदि कोई व्यक्ति पूरे जनगणना कार्य काल (९फरवरी से १ मार्च तक) में अपने प्रसामान्य निवास-स्थान में अनुपस्थित हो तो वह वहीं गिना जाता था जहाँ वह सामान्यतः रहता है। सूचना को और अधिक उपयोगी बनाने के लिए १ मार्च से ३ मार्च तक के दिन दुबारा निरीक्षण (re-checking) के लिए रक्खे गए।

कुटुम्ब (Households)

सन् १९५१ में पहली बार जनसंख्या "गृहों" के आधार पर न गिनी जाकर "कुटुम्ब" के आधार पर गिनी गई। गृह और कुटुम्ब में एक अन्तर स्थापित किया गया। एक रहने के स्थान को जिसमें कि एक अलग मुख्य प्रवेश द्वार हो "गृह" कहा गया और कुछ व्यक्तियों के समूह को, जो एक साथ रहते और एक चौके में भोजन करते हैं "कुटुम्ब" कहा गया। यह भेद देश में कुटुम्बों का आकार (size) जानने में बहुत सहायक हुआ। यह एक साधारण भावना बन गई है कि भारत में संयुक्त परिवार प्रणाली अब विछिन्न हो रही है और सन् १९५१ की जनगणना इस समस्या पर पूर्ण प्रकाश डालती है।

सन् १९५१ में एक अन्य महत्वपूर्ण परिवर्तन यह हुआ कि पहली जनगणनाओं में प्राप्त की जाने वाली जाति, वर्ण, या वर्ग आदि के सम्बन्ध में सूचना इसमें नहीं ली गई। यह सूचना अबकी बार केवल कुछ "विशेष समुदाय अथवा पिछड़ी जातियों" के बारे में ही ली गई। चूँकि भारतीय सरकार की नीति देश में जाति वर्ण आदि के आधार पर साम्प्रदायिकता (sectionalism) को प्रोत्साहित करना नहीं है, इसलिए यह पग उठाया गया।

इस जनगणना का क्षेत्र सिवाय जम्मू और काश्मीर तथा कुछ भाग (ख) के आदि-वासी प्रदेशों के, पूरा भारत, (जिसमें सिक्किम भी सिमावेशित हैं) था। उन सब व्यक्तियों की गणना की गई है जो १ मार्च के सूर्योदय के समय जीवित थे। इसकी प्रश्नावली में १४ प्रश्न थे जिनके उत्तर लोगों को देने थे।

ये प्रश्न इस प्रकार थे:—

(१) नाम और गृह-स्वामी से सम्बन्ध

(२) (अ) राष्ट्रीयता

(ब) धर्म

(स) विशेष समुदाय (special groups)

(३) विवाह सम्बन्धी सूचना

(४) आयु

(५) जन्म स्थान
(६) विस्थापितों के आने की तिथि, पाकिस्तान में निवास स्थान (जिला)
(७) मातृ भाषा
(८) अन्य भाषाएँ
(९) पराश्रयता (dependency)...........वृत्ति (employment)
(१०) जीवन निर्वाह के मुख्य साधन
(११) जीवन-निर्वाह के अन्य साधन
(१२) साक्षरता और शिक्षा
(१३) वृत्तिहीनता: (unemployment)
(१४) यौन (sex)

तेरहवाँ प्रश्न प्रत्येक राज्य सरकार ने अपनी इच्छानुसार निश्चित किया। उत्तर-प्रदेश में यह प्रश्न वृत्तिहीनता के बारे में था।

१९५१ की गणना और पहले की जन-गणनाएँ

भारत की प्रत्येक जन-गणना में पहले की जन-गणना से सुधार किया गया है। १९५१ की जनगणना के लिए मुख्य परिवर्तन निम्नलिखित हैं। (यह १९५१ और पहले की जनगणनाओं का तुलनात्मक विवरण है)।

(१) यह जनगणना कालावधि-प्रणाली के अनुसार की गई है। पूरी जन-गणना की अवधि २० दिन की थी। १९४१ से पहले की जनगणनाओं में एक निश्चित रात्रि में जो जहाँ मिलता था, वहीं गिन लिया जाता था। इस प्रकार प्रगणन-व्यय में कमी हुई और जनगणना गृह-सूची और प्रसामान्य-निवास के आधार पर की गई।

(२)इस जनगणना में जाति-संबंधी प्रश्न हटा दिया गया और विस्थापित व्यक्तियों से संबंधित प्रश्न जोड़ दिया गया। पहले का कारण भारत-सरकार का जाति-भेद को निरुत्साहित करने का प्रयत्न है और दूसरे का कारण विस्थापितों की विशेष समस्याएँ हैं। केवल चार विशेष समुदायों, परिगणित जातियों, परिगणित पिछड़ी जातियों और एँग्लोइंडियनों, के बारे में प्रश्न था। इसका कारण उनको संविधान में दी गई सुविधाएँ थीं।

(३) व्यवसायिक बंटन (occupational distribution) अधिक वैज्ञानिक और सरल बनाया गया। पूरी जनसंख्या को दो बड़े भागों—कृषि से सम्बन्धित और अकृषि से सम्बन्धित (agricultural and non-agricultural) में बाँटा गया है। इन भागों में प्रत्येक को चार उप-विभागों में बाँटा गया है। पहले के लिए ये चार उप-विभाग निम्नलिखित हैं:—

(अ) वे कृपक जो जमीन के पूर्णतः या मुख्यतः स्वामी हैं और उन पर आश्रित लोग।

(आ) वे कृपक जो जमीन के पूर्णतः या मुख्यतः स्वामी नहीं हैं और उन पर आश्रित लोग।

(इ) कृपक-मजदूर और उन पर आश्रित लोग।

(ई) जमीन के अ-कृपक स्वामी लगान लेने वाले और उन पर आश्रित लोग।

दूसरे के उपविभाग निम्नलिखित हैं:-

(अ) कृषि के अतिरिक्त उत्पादन

(आ) वाणिज्य

(इ) यातायात

(ई) अन्य सेवाएँ और विविध उद्गम।

(४) १९५१ में गृह-सूची के आधार पर पहली बार 'नागरिकों का राष्ट्रीय रजिस्टर' (National Register of Citizens) बनाया गया जो प्रत्येक गाँव और नगर के लिए रक्खा गया है।

(५) पूरे भारत को ६ जनसंख्या कटिबंधों (zones) में बाँटा गया है। ये कटिबन्ध उत्तरी भारत, पूर्वी भारत, दक्षिणी भारत, केन्द्रीय भारत और पश्चिमी भारत हैं। इसके अतिरिक्त देश को पाँच प्राकृतिक प्रदेशों-हिमालय प्रदेश, उत्तरी मैदानी भाग, दक्षिणी प्रायद्वीप और प्लेटू, पश्चिमी घाट और तट-प्रदेश, और पूर्वी घाट और तट प्रदेश में बाँटा गया है। इस प्रकार जनसंख्या का आर्थिक और भौगोलिक अध्ययन सम्भव हो सकेगा।

(६) जन-गणनाओं के बीच में संतुलन रखने के लिये जनगणना-आयुक्त और रजिस्ट्रार जनरल का स्थान स्थायी बना दिया गया है। इससे पहले पूरा जनगणना संगठन जनगणना के बाद समाप्त कर दिया जाता था।

१९५१ की भारतीय जनगणना के तथ्यांक

(१) भारत की कुल जनसंख्या—भारत की जनसंख्या जिसमें सिक्किम की जनसंख्या व जम्मू और काश्मीर की आगणित (estimated) जनसंख्या (४४ लाख) शुमार है और आसाम के भाग (ख) प्रदेशों की जनसंख्या अपवर्जित है, १ मार्च १९५१ के दिन ३६.१२ करोड़ थी। उन प्रदेशों की जहाँ जनगणना की गई थी, जनसंख्या ३५.७ करोड़ है। यह जनसंख्या विश्व की जनसंख्या का लगभग $\frac{1}{6}$ वाँ भाग है। पूरे भारत में जनसंख्या का घनत्व ३०२ व्यक्ति प्रति वर्ग मील है।

(२) इस जनसंख्या का लगभग ८३% भाग ग्रामीण है।

(३) भारत में ७८ शहर ऐसे हैं जिनकी जनसंख्या एक लाख से अधिक है। राज्यानुसार इन शहरों का वंटन निम्न प्रकार से है: उत्तर प्रदेश-१६६, वम्वई-८, वंगाल-६, विहार-५, मद्रास-४, पंजाव, मध्य भारत, मैसूर, राजस्थान और सौराष्ट्र (प्रत्येक में)-३, अन्य में इससे कम है।

(४) मुख्य धर्मों के अनुसार जनसंख्या निम्नलिखित रूप में है:

हिन्दू	३०.३ करोड़
मुसलमान	३.५ करोड़
ईसाई	०.८ करोड़
सिक्ख	०.६ करोड़

(५) राज्यों की जनसंख्या और घनत्व निम्नलिखित हैं।

		जनसंख्या	घनत्व (व्यक्ति संख्या वर्गमील)
			१७६
भाग क राज्य		०.९० करोड़	५५७
	आसाम	६.३२ ,,	२४४
	उत्तर प्रदेश	१.४६ ,,	८०६
	उड़ीसा	२.४८ ,,	३३८
	पश्चिमी बंगाल	१.२६ ,,	३२३
	पंजाब	३.६० ,,	५७२
	बम्बई	४.०२ ,,	१६३
	बिहार	२.१२ ,,	४४६
	मध्य-प्रदेश	५.७० ,,	
	मद्रास		१०१५
भाग ख राज्य		०.९३ ,,	३४७
	ट्रावनकोर-कोचीन	०.३५ ,,	३०८
	पेप्सू	०.९० ,,	१७१
	मैसूर	०.८० ,,	११७
	मध्य भारत	१.५३ ,,	१९३
	राजस्थान	०.४१ ,,	२२७
	सौराष्ट्र	१.८७ ,,	
	हैदराबाद		२८७
भाग ग राज्य		०.६९ ,,	३४
	अजमेर	०.५७ ,,	१४५
	कच्छ	०.२३ ,,	३०१७
	कुर्ग	१.७४ ,,	१५८
	देहली	०.६४ ,,	२७८
	त्रिपुरा	०.१३ ,,	१२२
	बिलासपुर	०.८४ ,,	६७
	भोपाल	०.५८ ,,	१५१
	मणिपुर	३.५७ ,,	
	विन्ध्य प्रदेश		९४
		०.९८ ,,	१०
भाग घ राज्य	हिमाचल प्रदेश	३१ हजार	५०
	अंडमान और निकोबार	१.३७ करोड़	
अन्य	सिक्किम		

अब राज्यों का पुनर्संगठन हो गया है अतएव अब उनकी सीमायें बदल गई हैं और उनकी जनसंख्या तथा उसके घनत्व में भी बहुत अन्तर आ गया है।

(६) **ग्राम और नगरों की संख्या**–भारत में कुल गाँवों की संख्या ५,५८,०८९१२ थी जिनमें २९ करोड़ ५० लाख व्यक्ति रहते थे, और नगरों की संख्या ३,०१८ थी जिनमें ६ करोड़ १९ लाख व्यक्ति रहते थे। नगरों का जनसंख्या के अनुसार वितरण निम्नलिखित है:–

	संख्या	कुल निवासी	शहरी-जनसंख्या का प्रतिशत
शहर (१ लाख वा अधिक जनसंख्या)	७३	२ क० ३५ ला०	३८.०
बड़े नगर (२०,०००–१ लाख)	४८५	१ क० ८६ ला०	३०.१
छोटे नगर (५,०००–२०,०००)	१,८४८	१ क० ७८ ला०	२८.६
कस्बे (५,००० से कम)	६१२	२० ला०	३.३

(७) **स्त्री-पुरुष अनुपात**–१९५१ की जनगणना के अनुसार प्रति हजार पुरुषों में स्त्रियों की संख्या ९४७ थी। नगरों में यह अनुपात ८६० स्त्रियाँ प्रति हजार पुरुष हैं और गाँवों में ९६६ स्त्रियाँ प्रति हजार पुरुष हैं।

(८) विभिन्न व्यवसायों में लोगों की संख्या निम्नलिखित है।
(स्पष्टीकरण के लिए पिछले पृष्ठ देखिए) :

कुल कृषक वर्ग	२४·९ करोड़ (लगभग)
जिसमें १ (अ) में	१६.७ " "
१ (आ) में	३.२ " "
१ (इ) में	४.५ " "
१ (ई) में	०.५ " "
कुल अकृषक वर्ग	१०.८ करोड़ (लगभग)
जिसमें २ (अ) में	३.८ " "
२ (आ) में	२.१ " "
२ (इ) में	०.६ " "
२ (ई) में	४.३ " "

(९) कुल भारत में १६.६% व्यक्ति शिक्षित हैं। पुरुष-२४.९% और स्त्रियाँ ७.९%

भारतीय जनगणना की कमियाँ

भारतीय जनगणना की एक सबसे बड़ी कमी यह है कि प्रत्येक जनगणना के लिये नई प्रश्नावली बनाई जाती है जिसमें न केवल पुराने प्रश्न छोड़ दिये जाते हैं

और नये प्रश्न जोड़ दिये जाते हैं—यह मुख्य बात नहीं है—बल्कि पुराना वर्गीकरण बदल दिया जाता है। इसलिये दो जनगणना के तथ्यों की तुलना करना बहुत कठिन हो जाता है। ऐसा व्यवसायों के वर्गीकरण के लिए हमेशा हुआ है। व्यावसायिक समंकों से यह भी ज्ञात नहीं होता कि कितने लोग स्वतंत्र रूप से काम करते हैं और कितने अन्य लोगों के लिए। १९५१ की जनगणना में इस कमी को दूर करने का कुछ प्रयास किया गया है, पर अभी तक कोई सुव्यवस्थित वर्गीकरण नहीं बना है और न ही इस समस्या के सब पक्षों (aspects) के बारे में समंक उपलब्ध हैं।

सही जानकारी प्राप्त करने में प्रगणकों का स्थान महत्वपूर्ण है। भारतीय जनगणना में काम करने वाले प्रगणकों को प्रायः उचित शिक्षा नहीं मिल पाती। साथ ही साथ उनकी योजनाएँ अलग-अलग और उनके हित भिन्न-भिन्न होते हैं। बहुधा वे अभिनत (biassed) और अनभिनत (unbiassed) विभ्रमों के बीच विवेचना नहीं कर पाते।

भारतीय आयु-संगठन सम्बन्धी समंक भी पूर्णतः विश्वसनीय नहीं कहे जा सकते। इसका एक कारण तो लोगों का अज्ञान है, वे स्वयं यह नहीं जानते कि उनकी आयु ठीक-ठीक क्या है, इसके साथ-साथ आयु को गलत बताने की भी प्रवृत्ति होती है। अविवाहित लड़कियों की आयु, परम्परा और रीति-रिवाज के कारण अधिकांशतः कम बताई जाती है। इसी प्रकार विधुर भी अपनी आयु कम बताते हैं—प्रायः जब उनकी इच्छा पुनर्विवाह करने की होती है। विवाहित स्त्रियाँ और वृद्ध व्यक्ति अपनी आयु अधिकांशतः अधिक बताते हैं। आयु को ० या ५ में समाप्त होने वाली संख्याओं के रूप में बताने की साधारण अभिनति है। अगर प्रगणक जिरह करें तो आयु का कुछ हद तक सही पता लगाया जा सकता है, पर स्त्रियों के लिए जब तक महिला-प्रगणक नियुक्त नहीं किये जाते, ऐसा करना सम्भव नहीं है।

विवाह सम्बन्धी समंक भी प्रामाणिक नहीं होते, विवाह में आयु-सम्बन्धी प्रतिबन्धों के कारण लोग वास्तविक आयु प्रायः छिपा लेते हैं। इसी प्रकार शारीरिक या मानसिक अयोग्यता (जैसे अंधापन, बहरापन आदि) सम्बन्धी प्रश्नों के उत्तर भी प्रायः सच-सच नहीं बताये जाते। इसलिये १९४१ और १९५१ की गणनाओं में यह प्रश्न पूछा ही नहीं गया।

जनगणना के समय की परिस्थितियाँ भी लोगों को गलत उत्तर देने की ओर प्रवृत्त करती हैं। पहले की जनगणना में, जब विधान सभाओं में स्थान और राजकीय सेवाओं में नियुक्ति धर्म के आधार पर होती थी, लोग प्रायः गलत सूचना दिया करते थे। १९३१ में शारदा-अधिनियम के पास होने के कारण लोगों द्वारा दी गई विवाहित सम्बन्धी सूचनाएँ गलत थीं।

इसके अतिरिक्त अन्य कारण भी हैं जिनकी वजह से विभ्रम हो सकता है। जैसे, लोगों का एक स्थान से दूसरे स्थान को जाना, कुछ लोगों को दुहराने और कुछ को छोड़ने के कारण आदि। पर ये कारण इतने महत्वपूर्ण नहीं हैं। अगर पर्याप्त सावधानी के साथ जनगणना की जाय तो ये कम किये जा सकते हैं।

१९५१ की जनगणना के बाद किये **निदर्शन-सर्वेक्षण** (sample survey) से की गई जाँच से ज्ञात हुआ कि जनगणना में १.१% के बराबर अल्प-प्रगणन (under-enumeration) हुआ।

जीवन-समंक (Vital Statistics)

जीवन समंकों के अन्तर्गत मृत्यु और जन्म सम्बन्धी अंक संग्रहित किये जाते हैं। इसके साथ-साथ मृत्यु के कारण, बीमारियों के स्वभाव और उनके आपात (incidence) और उपचार व्यवस्था सम्बन्धी समंक भी होते हैं। विवाह सम्बन्धी समंक भी इसी के अन्तर्गत आते हैं।

भारत के जीवन-समंक बहुत ही असंतोषजनक हैं। किसी भी प्रकार की बाध्यता न होने के कारण और सूचना देने की अनुपयुक्त प्रणाली के कारण इनको पूर्णतः विश्वसनीय नहीं माना जा सकता। गाँवों में यह अंक पटवारी, चौकीदार या प्रधान को दिये जाते हैं और नगरों में म्युनिसिपैलिटी, टाउन एरिया आदि को। जन्म-मृत्यु, मृत्यु के कारणों, और मृत्यु के समय की आयु सम्बन्धी अंक सावधानी से और सही रूप से नहीं बताये जाते अधिकांश जनसंख्या विवाह की कोई सूचना नहीं देती।

इन समंकों के महत्व को देखते हुए इनके प्रति दिखाई गई उदासीनता बहुत अनुचित लगती है। ये समंक देश की स्वस्थता के बारे में बताते हैं। इसके साथ-साथ इनके द्वारा बीमारियों के बारे में भी ज्ञान होता है। अगर कोई भी ऐसी योजना बनानी हो जिसमें देश के स्वास्थ्य को अच्छा करने का कार्यक्रम हो तो इनको जानना अनिवार्य है, अन्यथा इसमें किसी प्रकार का सुधार करना सम्भव न हो सकेगा। वे कारण, जिनकी वजह से गलत जीवन-समंक प्राप्त होते हैं नीचे दिए गये हैं। भारत में इस बात का प्रयत्न किया जाना चाहिए कि इन्हें कम से कम किया जाय।

(१) **सूचक की सावधानी और अभिनत** : इसको दूर करने के लिए यह आवश्यक है कि जीवन-समंक-संग्रहण के लिए एक अलग विभाग हो जिसके अन्तर्गत प्रत्येक स्थान के लिए एक सूचक हो। सूचना देने का कार्य अन्य संस्थाओं या व्यक्तियों को न सौंपा जाय। लोगों को आवश्यक सूचना देने के लिए कानूनन बाध्य कर दिया जाय।

(२) **बीमारियों का वर्गीकरण और उनके निदान (diagnosis) की कठिनाइयाँ** : उपचार की उचित व्यवस्था न होने की वजह से और बीमारियों के अप्रमापित होने की वजह से भी जीवन समंकों में गलतियाँ हो सकती हैं। इसे दूर करने का एकमात्र उपाय उपचार सुविधाओं में वृद्धि करना और बीमारियों को प्रमापित करना है।

(३) **कुछ बीमारियाँ छिपाने की इच्छा** : इसको दूर करने के लिए भी अलग सूचकों की, जो अपना पूरा समय इस काम में लगा सकें, नियुक्ति करना आवश्यक है।

१९४१से १९५१ तक की कालावधि के लिये भारत का जन्मअर्घ (प्रतिहजार) ४०, और मृत्यु अर्घ (प्रतिहजार) २७ है।

अध्याय १७

औद्योगिक समंक (Industrial Statistics)

आज के युग में जब आर्थिक प्रगति और औद्योगीकरण पर्यायवाची शब्द हो गए हैं, किसी भी देश में उद्योगों का महत्व निर्विवाद है। औद्योगीकरण के लिए यह आवश्यक है कि वर्तमान उद्योगों के बारे में भी पूरी-पूरी जानकारी हो। इसलिए औद्योगिक-समंकों का महत्व भी निर्विवाद हो जाता है। भारत के औद्योगिक क्षेत्र में पिछड़े होने के कारण यहाँ औद्योगिक समंकों को एकत्रित करने का प्रयास प्रायः नहीं के बराबर किया गया, और जो कुछ थोड़े से समंक उपलब्ध भी हैं वे अपनी अपर्याप्त अशुद्धता और अप्रामाणिकता के कारण असंतोषजनक स्थिति में हैं।

औद्योगिक समंक निम्नलिखित विषयों से सम्बन्धित हो सकते हैं।

(१) निर्माण (manufactures)

(२) उत्पत्ति (output)

इसके अतिरिक्त पूँजी, श्रम, उत्पादन की लागत और शक्ति सम्बन्धी समंक भी इसके अन्तर्गत आते हैं। आने वाले अनुच्छेदों में इन पर अलग-अलग विचार किया गया है।

(१) निर्माण-उद्योगों की संगणना (Census of Manufacturing industries)—

संगणना के लिये भारत के संगठित निर्माण-उद्योगों को ६३ शीर्षकों के अन्तर्गत वर्गीकृत किया गया है। इनमें से २९ बड़े उद्योग हैं। इनकी संस्थाएँ और नाम निम्नांकित सारणी में दिये गये हैं: (फैक्टरी के अन्तर्गत वे उत्पादक इकाइयाँ आती हैं जिनमें २० या अधिक व्यक्ति काम करते हैं।)

उद्योग	रजिस्टर्ड फैक्टरियों की संख्या १९४८	रजिस्टर्ड फैक्टरियों की संख्या १९५१
(१) आटा-मिलें (गेहूँ) (wheat flour)	७६	९१
(२) चावल-मिलें (rice mills)	१४७८	१,४२६
(३) बिस्कुट (biscuit making)	५१	९३
(४) फल और शाक (fruit & vegetable processing)	२२	२५
(५) चीनी	१६३	२५८
(६) शराब बनाने के स्थान (distilleries breweries)	५०	५५
(७) स्टार्च (starch)	१७	५५
(८) वनस्पति-तेल	९११	१,२०३
(९) रंग और वार्निश (paints & varnishes)	३८	४२
(१०) साबुन	४८	५५
(११) चमड़ा (tanning)	७८	९१
(१२) सीमेंट (cement)	१४	१९
(१३) काँच और काँच का सामान (glass & glass-ware)	१६५	१२७
(१४) कुम्हारी (ceramics)	६०	६८
(१५) प्लाईवुड और चाय के बक्स (plywood & tea chests)	३५	४२
(१६) कागज और दफ्ती (paper and paper board)	३२	४३
(१७) दियासलाई (matches)	४२	४६
(१८) सूती कपड़ा (cotton textiles)	५६८	५३०
(१९) ऊनी कपड़ा (woollen textiles)	४३	४८
(२०) जूट (jute textiles)	९१	१०९
(२१) रासायनिक पदार्थ (chemicals)	२०३	२६२
(२२) अलमूनियम, ताँबा और पीतल (aluminium, copper & brass)	२०२	२६८
(२३) लोहा और इस्पात (iron & steel)	११५	१५३
(२४) साइकिल (bicycles)	११	३१
(२५) सीने की मशीन (sewing machines)	४	२
(२६) प्रोड्यूसर गेस प्लान्ट (producer gas plants)	३	१
(२७) विद्युत लैम्प (electric lamps)	७	२
(२८) विद्युत-पंखे (electric fans)	४९	३४
(२९) जनरल इंजीनियरिंग और इलेक्ट्रिकल इंजीनियरिंग (general engineering & electrical engineering)	१,४७३	१,९३०

१९४२ में एक अधिनियम पास किया गया जिसके अनुसार फैक्टरियों को वार्षिक निर्माण संगणना के प्रश्नों के वारे में सूचना देनी पड़ती है। सूचना न देने पर जुर्माना होता है। यह अधिनियम व्यवहार में १९४५ में आया जब केन्द्र में डाइरेक्टोरेट ऑफ इंडस्ट्रियल स्टेटिस्टिक्स (Directorate of Industrial Statistics) की स्थापना की गई। उसके द्वारा प्रत्येक उद्योग से निम्नलिखित विषयों पर सूचना माँगी जाती है :

(१) फैक्टरी के मालिक और फैक्टरी का नाम, पता आदि

(२) पूँजी संगठन प्रदत्त (paid-up) और उत्पादक (productive) पूँजी।

(३) अधियुक्त व्यक्ति -संख्या, कार्य (मनुष्य-घन्टों में) और मजदूरी तथा वेतन।

(४) ईंधन की राशि और उसका मूल्य, विजली, गैस, लुब्रिकेटिंग (lubricating) पदार्थ और पानी—खरीदा हुआ और काम में लाया गया।

(५) अन्य पदार्थों की राशि और उनका मूल्य—खरीदा हुआ और काम में लाया गया।

(६) उत्पादों (products) और सह-उत्पादों (byproducts) की राशि और उनका मूल्य।

इस अधिनियम को कार्यान्वित करने के लिए राज्य-सरकारों ने सांख्यिकीय-अधिकारी नियुक्त किए हैं जो विभिन्न फैक्टरियों को प्रश्नावली भेजते हैं और उनसे प्राप्त सूचना का निरीक्षण करते हैं। इसके पश्चात् ये उत्तर 'डाइरेक्टरेट' को भेज दिये जाते हैं जहाँ इनका फिर निरीक्षण किया जाता है। इसके वाद प्रत्येक राज्य की फैक्टरियों के लिये नीचे दिए गए रूप में तथ्यांक प्रकाशित किये जाते हैं जिन्हें 'संन्सस ऑफ मैन्यूफैक्चर' में प्रकाशित किया जाता है। यहाँ जो सूचना दी गई है वह पूरे भारत के लिए सव निर्माण-उद्योगों के वारे में है। कॉलम (१) में दी गई सूचनाएँ प्रत्येक राज्य की विभिन्न वर्गों की फैक्टरियों के लिए भी प्रकाशित की जाती है।

निर्माण उद्योगों की संगणना
(Census of manufacturing industries)

(१)	(२) १९४७	१९५१
(१) विद्यमान् रजिस्टर्ड फैक्टरियों की संख्या (no. of regd. factories in existence)	५,६३२	६,३७८
(२) फैक्टरियाँ जिनसे उत्तर मिले (factories from which returns were recd.)	४,८७२	६,३९०
(३) अधियुक्त अचल पूँजी (fixed capital employed) (करोड़ रु० में)	१७७·२	२७५.२
(४) अवियुक्त चालू पूँजी (working capital employed)	२२६.३	४३७·८
(५) कुल अवियुक्त पूँजी (total capital employed)	४०३.५	७१३·०
(६) अधियुक्त मजदूरों की संख्या (no. of workers employed) (लाखों में) (in laks)	१४.८७	१४·७८
(७) मजदूरों के अतिरिक्त अन्य अधियुक्त व्यक्तियों की संख्या (no. of persons other than workers employed) (लाखों में) (in laks)	१.४५	१·५४
(८) कुल अवियुक्त व्यक्तियों की संख्या (total no. of persons employed)	१६·३१	१६·३२
(९) मजदूरों को दी गई मजदूरी (wages paid to workers) (करोड़ में) (in crores)	१०८·९	१५३·५
(१०) मजदूरों के अतिरिक्त अन्य व्यक्तियों को दिया गया वेतन (salaries paid to persons other than workers) (करोड़ रु० में) (in crores)	२१·५	३२·१
(११) अन्य हितों और रियायतों का द्रव्यार्थ (money value of other benefits or privileges) (करोड़ रु० में) (in crores)	५·३	३·६
(१२) कुल दिया गया वेतन और दी गई मजदूरी (total salaries & wages paid) (करोड़ रु० में) (in crores)	१३५·७	१८९·२
(१३) काम में लाई गई सामग्री, ईंधन आदि का फैक्टरी मूल्य (value at foctory of materials, fuel, etc. consumed) (करोड़ रु० में) (in crores)	४८५·४	९३६·३
(१४) फैक्टरियों के लिए अन्य वन्वों द्वारा किये गए कार्य का अर्थ (value of work done for factories by other concerns) (करोड़ रु० में)	२·८	४·३

(१५) मूल्य-ह्रास (depreciation) (करोड़ रु० में०)	१२·६	१९·०
(१६) काम में लाई गई सामग्री, ईंधन और मूल्य-ह्रास का योग (total of materials and fuel consumed and depreciation) (करोड़ रु० में)	५००·८	९५९·६
(१७) उत्पादों और सह-उत्पादों का फैक्टरी-मूल्य factory value of products and by-product) (करोड़ रु० में)	७३७.२	१३०२.२
(१८) ग्राहकों द्वारा किए गए काम का मूल्य (value of work done by customers) (करोड़ रु० में)	५.७	४.७
(१९) विक्री के लिये निर्मित उत्पादों और सह-उत्पादों का योग (total of product and by-product for sale) (करोड़ रु० में)	७४२.९	१,३०६.९
(२०) निर्माण द्वारा बढ़ाया गया अर्घ (value added by manufacture) (करोड़ रु० में) (१९–१६)	२४२.१	३४७.३

इनके अतिरिक्त उत्पादन पूँजी की प्रतिशतता के रूप में बढ़े हुए अर्घ, प्रति अधियुक्त व्यक्ति बढ़े हुए अर्घ और कुल उत्पत्ति (output) की प्रतिशतता के रूप में बढ़े हुये अर्घ के बारे में भी यह सूचना देता है।

औद्योगिक-निर्माण समंकों के संग्रहण का उद्देश्य उनके द्वारा राष्ट्रीय आय में की गई वृद्धि जानना, उनके संगठन को जानना, और सरकार को औद्योगिक नीति बनाने में सहायता देना है। भारत के औद्योगिक-निर्माण-समंकों की मुख्य कमियाँ यह हैं कि इनमें केवल २० से अधिक व्यक्तियों को काम में लगाने वाली उत्पादन इकाइयों के बारे में जानकारी प्राप्त की जाती हैं। इसलिए छोटे-पैमाने के उद्योग और घरेलू उद्योग-धन्धे इसके क्षेत्र से बाहर हैं। भारत में, जहाँ अब तक छोटे पैमाने के उद्योग और घरेलू उद्योग-धन्धे देश के वस्तु-निर्माण क्षेत्र में महत्वपूर्ण स्थान रखते हैं, इस प्रकार की कमी होना अनुचित है। पर यह कमी कुछ हद तक निदर्शन-सर्वेक्षण करके पूरी की जा रही है।

औद्योगिक उत्पत्ति-समंक (Statistics of Industrial output)

निर्माण-उद्योगों की संगणना वार्षिक होती है। इसके द्वारा निर्माण उद्योगों के बारे में वार्षिक सूचना मिलती है। दीर्घकाल के लिए इनकी उपयोगिता बहुत है, पर अल्पकालीन अवस्था जानने के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि हम देश के उद्योगों की

दशा अल्पावधि में जानें। इस उद्देश्य को ध्यान में रख कर, 'डाइरैक्टरेट् आफ इंडस्ट्रियल स्टेटिस्टिक्स' उत्पत्ति विषयक समंक मासिक रूप में संग्रहित करता है। इनके बारे में सूचना देने की कोई बाध्यता नहीं है। अतएव इनकी पूर्णता और पर्याप्तता मुख्यत: उत्पादन-इकाइयों के सहयोग पर निर्भर रहती है। इससे प्राप्त सूचना 'मन्थली स्टेटिस्टिक्स आफ दी प्रॉडक्शन ऑफ सलैक्टैड इंडस्ट्रीज ऑफ इंडिया, (monthly (statistics of the production of selected industries of India) में प्रकाशित की जाती हैं। इसमें ९० से अधिक उद्योगों के बारे में सूचना प्राप्त होती है। निम्नलिखित सारणी में कुछ उद्योगों का मासिक उत्पादन दिया गया है।

औद्योगिक उत्पादन

पद (item)	एकक (unit)	१९५५ (मासिक माध्य)	१९५६ (मासिक माध्य)	अप्रल १९५७
१–कोयला	००० ' टन	३१,८४	३२,८६	३७,२६
२–कच्चा लोहा	००० ' "	३,५५	३,५४	३,९२
३–चीनी	००० ' "	१,३३	१,५५	२,७७
४–सूती कपड़ा				
(अ) धागा	००,००० ' पौंड	१३,५९	१३,९३	१५,३७
(ब) कपड़ा	००,००० ' गज	४२,४५	४४,२०	४६,४४
५–जूट				
(अ) हेसियन	००० ' टन	३४	३५	३६
(ब) सैकिंग	००० ' "	४८	५१	४५
६–लोहा एवं इस्पात				
(अ) पिग लोहा	००० ' टन	१,५८	१,६३	—
(ब) तैयार स्पात	००० "	१,०५	१,१०	—

उद्योगों के मासिक उत्पादन की सामग्री से देशनांक भी बनाये जाते हैं, पहले इन देशनांकों का आधार वर्ष सन् १९३७ था और केवल १५ उद्योगों को लेकर देशनांक बनाया जाता था। सन् १९४९ में यह देशनांक समाप्त कर दिया गया और एक दूसरा देशनांक आरम्भ किया गया जिसमें २० उद्योग लिए गये और जिसका आधार वर्ष १९४६ रखा गया। अब आधार वर्ष हटा कर १९५१ कर दिया गया है और २५ उद्योगों के मासिक उत्पादन देशनांक प्रकाशित किये जाते हैं, इनको मिला कर कुल उद्योगों का एक सामूहिक मासिक उत्पादन देशनांक भी बनाया जाता

है। निम्नलिखित सारणी में कुछ उद्योगों के मासिक उत्पादन देशनांक दिये गये हैं।

औद्योगिक उत्पादन के मासिक देशनांक

(१९५१=१००)

पद	१९५५ (मासिक माध्य)	१९५६ (मासिक माध्य)	अप्रैल १९५७
१—सामान्य देशनांक	१२२·१	१३३·०	—
२—कोयला	१११·४	११४·९	१३२·१
३—कच्चा लोहा	११६·७	११६·१	१३०·६
४—चीनी	१४३·०	१७५·१	३२६·८
५—सूती कपड़ा	१११·९	११७·५	१२२·२
(अ) धागा	११७·३	१२२·०	१३३·४
(ब) कपड़ा	१०९·२	११५·२	११६·६
६—जूट का सामान	११८·९	१२७·३	१२४·०
(अ) हेसियन	१२४·६	१२८·९	१३६·९
(ब) सैकिंग	११०·४	११६·३	१०४·६
७—लोहा एवं स्पात	११३·३	११९·४	—
(अ) पिग लोहा	१०३·९	१०७·३	—
(ब) तैयार स्पात	११७·१	१२४·२	—

उपरोक्त विवरण से यह स्पष्ट हो गया होगा कि भारत में औद्योगिक समंकों का सुचारु रूप से संग्रहण कुछ ही वर्षों से आरम्भ हुआ है। यह बतलाया जा चुका है कि इस सम्बन्ध में पहला अधिनियम 'इण्डस्ट्रियल स्टैटिसटिक्स ऐक्ट' (Industrial Statistics Act) सन् १९४२ में पास हुआ था। यह अधिनियम सन् १९४६ में कार्यान्वित किया गया। पर इसके अन्तर्गत संग्रहित समंक सन् १९४८ तक भी छापे न जा सके क्योंकि उनमें बहुत-सी अशुद्धियाँ थीं। सका एक कारण यह भी है कि हमारे देश में बड़े-बड़े मिल मालिक शुद्ध सूचनायें जानबूझ कर नहीं देते। सन् १९४२ का अधिनियम केवल औद्योगिक कम्पनियों पर ही लागू होता था। व्यापार तथा श्रम-सम्बन्धी समंक जिनका औद्योगिक समंकों से विशेष सम्बन्ध है इस अधिनियम के अन्तर्गत नहीं आते थे। इस कठिनाई को दूर करने के लिये तथा अन्य सम्बन्धित विषयों पर समंक एकत्र करने के लिये भारत सरकार ने सन् १९५३ में एक और अधिनियम पास किया। इसका नाम 'कलक्शन आफ स्टैटिसटिक्स ऐक्ट' (Collection

of Statistics Act) है। इसके अनुसार भारत सरकार को यह अधिकार है कि वह निम्नलिखित विषयों पर समंक संग्रहण कर सकती है।

१—किसी उद्योग से सम्बन्धित कोई भी विषय।

२—किसी व्यापार अथवा उद्योग-संस्था अथवा फैक्ट्री से सम्बन्धित कोई भी विषय।

३—वस्तुओं के मूल्य, वेतन, काम का समय, वृति, वृतिहीनता तथा श्रमकल्याण सम्बन्धी कोई विषय।

इस प्रकार हम देखते हैं कि अब भारत सरकार को औद्योगिक समंक संग्रह करने के वृहद कानूनी-अधिकार प्राप्त हैं।

अध्याय १८

कृषि-समंक

(Agricultural Statistics)

कृषि समंकों के अन्तर्गत उन सब विषय के समंक आते हैं जो कृषि से किसी न किसी रूप में प्रत्यक्षतः सम्बन्धित हैं। ये समंक क्षेत्र (area), पैदावार (yield) फसल आदि के वारे में होते हैं।

क्षेत्र समंक (Area Statistics)

किसी भी राज्य या देश के लिए क्षेत्र समंक वहुत महत्वपूर्ण हैं। देश की, विशेषतः कृषि प्रधान देश की सम्पत्ति और आय के वारे में जानने के लिए या एक राज्य की दूसरे राज्य से और एक देश की दूसरे देश से तुलना करने के लिए इन्हें जानना आवश्यक है।

भारत में क्षेत्र समंक सम्बन्धी रीतियों को दो वड़े भागों में वाँटा जा सकता है। एक तो वह रीति जिसका उपयोग **अस्थाई वन्दोबस्त** (temporary settlement) वाले प्रदेशों में होता है और दूसरा वह जिसका उपयोग **स्थाई वन्दोवस्त** (permanent settlement) वाले प्रदेशों में होता है। अस्थाई वन्दोवस्त वाले राज्यों में उत्तर प्रदेश, मद्रास, पंजाव आदि हैं, और स्थाई वन्दोवस्त वाले राज्यों में विहार, वंगाल आदि। सुविधा के लिए पहले हम अस्थाई वन्दोवस्त वाले प्रदेशों के क्षेत्र समंकों पर विचार करेंगे और फिर स्थाई वन्दोवस्त वाले प्रदेशों के।

अस्थाई वन्दोवस्त में मालगुजारी जमीन के उपयोग और फसल पर निर्भर रहती है, इसलिए इन स्थानों में क्षेत्र-समंक सरकार के मालगुजारी अधिकारी ही इकट्ठा करते हैं। ये अधिकारी लेखपाल (उत्तर प्रदेश में), कर्मचारी (विहार में) आदि हैं। इन स्थानों में सव गाँवों का सर्वेक्षण और मानचित्रीयकरण किया जा चुका है। लेखपालों का कार्य प्रत्येक खेत का निरीक्षण करके सूचना देना भी है। वह विभिन्न अन्नों के अन्तर्गत आने वाले क्षेत्रों के सम्बन्ध में प्रत्येक फसल के अवसर पर सूचना देता है। चूंकि इसमें प्रत्येक खेत का सर्वेक्षण किया रहता है इसलिए इसे पूर्ण प्रगणन रीति भी कहा जा सकता है।

इस प्रकार से प्राप्त समंकों में गलतियाँ आने के तीन कारण हो सकते हैं। पहला, लेखपाल की असावधानी है। प्रायः लेखपाल स्वयं जाकर निरीक्षण नहीं करते। इसको अच्छे पर्यवेक्षक अधिकारियों की नियुक्ति करके दूर किया जा सकता है। दूसरा लेखपाल को अन्य कार्य करने पड़ते हैं जिनके कारण वह इस कार्य को एकनिष्ठत्व के साथ नहीं कर सकते और तीसरा यह है कि मिश्रित फसलों (mixed crops) के बारे में समंक ठीक-ठीक प्राप्त नहीं हो सकते।

स्थाई बन्दोवस्त में मालगुजारी के लिए इस प्रकार के क्षेत्र-समंकों की आवश्यकता नहीं पड़ती। इसलिए इस प्रकार के समंक एकत्रित करने के लिए कोई अधिकारी नियुक्त नहीं है। गाँव का चौकीदार व प्रधान आदि लोग इन तथ्यांकों को जमा करते हैं। चूँकि इनके ऊपर कोई अधिकारी पर्यवेक्षण के लिए नहीं रहता है, इसलिए ये समंक प्रायः अनुमान मात्र होते हैं। इन समंकों को चौकीदार या प्रधान परगनाधीश (sub-divisional officer) को भेज देता है जहाँ से ये जिलाधीश के पास भेज दिए जाते हैं। परगनाधीश और जिलाधीश अपने अनुभवों के आधार पर इन समंकों में परिवर्तन कर देते हैं।

इस विवरण से यह स्पष्ट हो गया होगा कि इस प्रकार समंकों में गलती की गुंजाइश कितनी अधिक रहती है। इस बीच इस व्यवस्था में सुधार करने के कुछ प्रयत्न किए गए हैं, और स्थाई बन्दोवस्त वाले प्रदेशों में भी अस्थाई बन्दोवस्त वाले प्रदेशों की तरह के संगठन बनाकर तथ्यांक-संग्रहण का काम सौंपा जा रहा है।

इन दोनों प्रकार के प्रदेशों के क्षेत्र-समंक संग्रहण के संगठनों में कुछ अन्य दोष भी हैं, शिक्षित और प्रवीण अधिकारियों के न होने के कारण प्रायः ये समंक त्रुटिपूर्ण होते हैं। फिर, जिले में ऐसा कोई कार्यालय नहीं होता जहाँ इन समंकों का सारणीयन और विश्लेषण उचित रूप से किया जा सके। समंकों की जाँच करने का कोई प्रयत्न नहीं किया जाता। अतएव इन्हें पूर्णतः प्रामाणिक नहीं माना जा सकता।

पैदावार-समंक (Yield Statistics)

पैदावार के समंकों को जानने के लिए भारत में दो रीतियों का उपयोग किया जाता है। एक को पुरानी रीति कहा जा सकता है और दूसरी को दैव-निदर्शन (random sampling) रीति। इनमें से पहली का उपयोग उसके अवैज्ञानिक होने के कारण कम होता जा रहा है, पर चूँकि कुछ स्थानों में उसका उपयोग अब भी किया जाता है, इसलिए यहाँ दोनों रीतियाँ दी गई हैं।

पुरानी रीति—इस रीति के अनुसार पैदावार जानने के लिए तीन बातों का जानना आवश्यक है, पहली, फसल के अन्तर्गत क्षेत्र, दूसरी, प्रसामान्य पैदावार (normal yield) और तीसरी, वास्तविक दशा (condition factor) क्षेत्र के विषय में

जानने की प्रचलित रीतियाँ पिछले शीर्षक के अन्तर्गत बताई जा चुकी हैं। यहाँ हम केवल प्रसामान्य पैदावार और वास्तविक दशा पर विचार करेंगे।

प्रसामान्य पैदावार की जो परिभाषा दी जाती है उसके अनुसार यह **'औसत मिट्टी में, किसी औसत लक्षण वाले वर्ष के लिए औसत पैदावार'** (average outturn,on average soil, in a year of average character) है। जैसा इस परिभाषा से ही मालूम हो जायगा, यह एक बहुत ही संदिग्घतापूर्ण कथन है। प्रश्न उठता है यहाँ औसत का क्या अर्थ है। वस्तुतः प्रसामान्य (normal) और औसत (average) दो अलग-अलग चीजें हैं और एक का उपयोग करके दूसरे को स्पष्ट करना गलत है। इस असंदिग्घता के कारण प्रायः प्रसामान्य के अर्थ के बारे में गलत कथन कहे जाते हैं। इस बात का प्रयत्न किया गया है कि प्रसामान्य को अधिक वस्तु-सापेक्ष (objective) बनाया जाय जिससे इसकी संदिग्घता कम हो जाय। तदनुसार प्रसामान्य दशा ऐसी दशा बताई गई है जो औसत से अच्छी हो, न तो वह किसी असाधारण पैदावार को बताती है जिसमें बहुत अधिक राशि में बहुत अच्छी किस्म का अन्न पैदा हुआ हो और न ही वह इसके विपरीत दशा बताती है। वह पैदावार किसी पर्याप्त साधन वाले निपुण किसान द्वारा पैदा की गई राशि नहीं है। वस्तुतः वह एक ऐसी पैदावार है जो अधिकतम और औसत के बीच में हो, प्रसामान्य पैदावार उसे कहा गया है जिसकी उम्मीद प्राकृतिक परिस्थितियों के अनुकूल होने पर साधारणतः की जा सकती है। जैसा इस व्याख्या को पढ़कर ज्ञात होगा, इसमें और परिभाषा में कोई विशेष अन्तर नहीं है। दोनों कथन व्यक्ति-सापेक्ष हैं जिस कारण से वैयक्तिक अभिनति या पक्षपात की बहुत अधिक गुन्जाइश है।

प्रसामान्य पैदावार का आगणन-कार्य राज्य का कृषि-विभाग करता है। इसके लिए पहले फसल काटने के प्रयोग किए जाते हैं। ये प्रयोग कुछ जिलों में किए जाते हैं। इन प्रयोगों में कृषि विभाग के अधिकारियों या रेव्हेन्यू अफसरों के द्वारा औसत खेत चुने जाते हैं। इन खेतों में बुवाई और कटाई इन अफसरों के सामने की जाती है। पाँच वर्ष तक इस प्रकार किए गए प्रयोगों के आधार पर कृषि विभाग प्रसामान्य पैदावार की आगणना करता है और पिछली प्रसामान्य पैदावार के स्थान पर, पाँच वर्ष बाद, नई सामान्य पैदावार के अनुसार फसल की गणना की जाती है।

इस प्रणाली की बहुत कड़ी आलोचनाएँ की गई हैं। व्यक्ति-सापेक्षता इसका मुख्य दोष है। प्रयोग करने के लिए खेत स्थानीय अफसरों द्वारा चुने जाते हैं। ये प्रति रूप (typical) खेत का चुनाव अपनी धारणाओं के अनुसार करते हैं, जो प्रायः अभिनति और पक्षपात के कारण सांख्यिकीय दृष्टिकोण से प्रति रूप नहीं कहे जा सकते। जिन स्थानों में ये प्रयोग किये जाते हैं वे हमेशा के लिए निश्चित रहते हैं और इनके चुनाव में

कालान्तर में बदलने वाली परिस्थितियों पर विचार नहीं किया जाता। बहुत कम संख्या में ऐसे प्रयोगों का किया जाना, खेतों के टुकड़ों का क्षेत्रफल निश्चित न रहना और ऐसे व्यक्तियों को कार्य सौंपा जाना जो अन्य प्रकार के कार्यों के लिए मुख्यत: नियुक्त हैं और जो इस कारण इसमें अधिक मनोयोग से कार्य नहीं कर सकते—इस प्रणाली के अन्य दोष हैं।

फसल की वास्तविक दशा यह जानने के लिए प्राप्त की जाती है कि किसी वर्ष की फसल प्रसामान्य फसल की तुलना में कैसी है। प्रसामान्य फसल को १६ या १२ आना फसल कहा जाता है। इसकी तुलना में अन्य वर्षों की फसल का अनुमान लगाया जाता है और यह अन्दाज भी आनों के रूप में व्यक्त किया जाता है—जैसे, आठ आना फसल या दस आना फसल। इस प्रकार फसल की तुलना आनों के रूप में करने के कारण इसे आनावारी-आगणना (annawari-estimate) भी कहते हैं। इसकी आगणना करने की रीति बहुत ही असंतोषजनक है। क्योंकि प्रत्येक गाँव के लिए इसका अनुमान उसका चौकीदार या पटवारी लगाता है। ये अनुमान तहसीलदार के पास भेजे जाते हैं, जो या तो इनका समान्तर माध्य लेके या सबसे अधिक संख्या में आने वाले आगणनों के आधार पर, या अपने अनुभव के आधार पर पूरी तहसील के लिए एक आगणन (estimate) निकालता है, जिसे वह जिलाधीश के पास भेज देता है। यहाँ से पूरे जिले के लिए आगणन उपर्युक्त आधारों में किसी को मानकर, कृषि-विभाग को भेज दिए जाते हैं।

इस प्रकार प्रत्येक वर्ष के लिए फसल की वास्तविक दशा का आगणन करना पूर्णत: आपत्तिजनक है। प्रसामान्य की उपयुक्त परिभाषा न होने के कारण उससे अन्य वर्षों की तुलना ठीक-ठीक नहीं की जा सकती। किसी वर्ष की पैदावार कई बातों पर निर्भर करती है जैसे, वर्षा, तापमान आदि। इन सबके प्रभावों की सही जानकारी प्राप्त करना बहुत कठिन कार्य है और कोई ऐसा व्यक्ति जो इन सबके बारे में बहुत अच्छी तरह नहीं जानता, ठीक आगणन नहीं कर सकता। जिन लोगों को यह कार्य सौंपा जाता है, वे कहाँ तक ठीक अनुमान लगा सकते हैं, यह संदेहास्पद है। अपनी अभिनति के कारण वे प्राय: अल्प-आगणन (under-estimation) करते हैं। उचित पर्यवेक्षकों का अभाव इस गलती में अधक वृद्धि कर देता है। बहुत कम संख्या में सूचनाएँ प्राप्त होने के कारण परिणामों को बहुत प्रामाणिक नहीं माना जा सकता। औसत निकालने की अलग-अलग रीतियों के उपयोग के कारण भी गलती हो जाती है। एक अन्य दोष, जो इस प्रकार के अनुसंधानों में अवश्य होता है, यह है कि इन आगणनों में कितना विभ्रम हुआ है, यह नहीं जाना जा सकता।

इन तीन बातों—क्षेत्रफल, प्रसामान्य-पैदावार और वास्तविक दशा—को जानने पर पूरी पैदावार का अनुमान निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके लगाया जा सकता है।

$$\text{पैदावार} = \text{क्षेत्रफल} \times \text{प्रसामान्य पैदावार} \times \frac{\text{वास्तविक अंक}}{\text{प्रसामान्य अंक}}$$

दैव-निदर्शन रीति : उपर्युक्त रीति के अधिकांश दोष दैव-निदर्शन रीति से हटाए जा सकते हैं। यह रीति ठोस सांख्यिकीय सिद्धान्तों पर आधारित होने के कारण अधिक वैज्ञानिक है, और इसमें आगणन के विभ्रम (error of estimation) को जाना जा सकता है। इस रीति में राज्य की प्रत्येक तहसील में से कुछ गाँव दैव-निदर्शन की रीति से चुन लिए जाते हैं। गाँवों की संख्या फसल के अन्तर्गत क्षेत्र के अनुपात में होती है। इस प्रकार चुने हुए प्रत्येक गाँव में फिर दैव-निदर्शन की रीति के द्वारा बोए हुए खेतों में से कुछ खेत चुन लिए जाते हैं जिनमें से फिर इसी प्रकार कुछ टुकड़े (लगभग $\frac{1}{80}$ एकड़ के) चुन लिए जाते हैं। प्रत्येक टुकड़े को बाड़े (fences) से बन्द कर दिया जाता है। कटाई के समय इस टुकड़े में पैदा हुई फसल को नमी को ध्यान में रखते हुए तौल लिया जाता है। इस प्रकार पूरे क्षेत्र के लिए फसल की पैदावार जान ली जाती है। इस रीति में प्रसामान्य पैदावार और वास्तविक दशा के अनुसार पैदावार के आगणन का झंझट नहीं रहता। मिट्टी की दशा, सिंचाई के प्रबन्ध और खाद के उपयोग आदि को प्रत्येक निदर्शन में उचित स्थान दिया जाता है। जैसा कहा जा चुका है, इस रीति का सबसे बड़ा फायदा यह है कि इसमें, दैव निदर्शन का उपयोग होने के कारण, आगणन के विभ्रम को जाना जा सकता है।

भारत में प्रत्येक फसल के लिए साधारणतः तीन पूर्वानुमान (forecasts) लगाए जाते हैं। पहला पूर्वानुमान पहली बुआई के समय क्षेत्र के बारे में होता है। दूसरा पूर्वानुमान बाद की बुआई के क्षेत्र और सम्भावित (probable) पैदावार के बारे में होता है, तीसरा और अन्तिम पूर्वानुमान कुल बोए हुए क्षेत्र और आंशसित (expected) पैदावार के बारे में आगणन देता है।

निम्नलिखित सारणी में खाद्यान्नों के बारे में १९५०–५१ के और १९५५–५६ के आगणन दिए गए हैं।

फसल	(लाख एकड़)		उत्पादन (लाख टन)	
	१९५०–५१	१९५५–५६	१९५०–५१	१९५५–५६
१—चावल	७६१·४	७६२·५	२०२·५	२५४·७
२—ज्वार	३८४·८	४२७·२	५४·१	६९·४
३—बाजरा	२२३·०	२७०·३	२५·५	३४·०
४—मकई	७८·१	८९·१	१७·०	२५·२
५—गेहूँ	२४०·८	२९२·३	६३·६	८३·५
६—जौ	७६·९	८१·५	२३·४	२७·२
७—रागी	५४·४	५६·३	१४·१	१८·४
८—अन्य पदार्थ	११३·७	१३०·८	१७·२	२१·१
९—दालें	४७१·८	५५१·०	८२·८	१०१·९
योग	२४०४·९	२६६१·०	५००·२	६३५·४

ये आगणनाएँ केवल खाद्यान्नों ही के लिए नहीं की जातीं, बल्कि, साथ ही साथ अन्य प्रकार की फसलों, जैसे तिलहनें, दालें, कपास, जूट आदि के लिए भी की जाती हैं।

अध्याय १६

मूल्य-समंक

(Price Statistics)

कटाई के समय कृषि मूल्य (Harvest Prices)

कटाई के समय कृषि-वस्तुओं के मूल्यों का जानना अत्यन्त आवश्यक है इससे न केवल सरकार अपनी नीति निश्चित करती है और व्यापारी लाभ उठाते हैं, बल्कि, साथ ही साथ, यह किसानों के लिए भी बहुत लाभप्रद है। देश की विशेषत: ऐसे देश की जो मुख्यत: कृषि पर निर्भर करता है, आर्थिक स्थिति जानने में इनका महत्वपूर्ण स्थान है। फार्म-मूल्य (farm price) या कटाई के समय का मूल्य (harvest price) सिद्धान्त दृष्टिकोण से वह मूल्य है जो किसानों को कटाई के समय उत्पत्ति के लिए मिलता है। भारत में इन मूल्यों की परिभाषा के बारे में समानता नहीं है। कुछ राज्यों में तीन या चार मुख्य बाजारों के थोक मूल्यों को फार्म-मूल्य मान लिया जाता है। केवल कुछ ही स्थलों में ये चुने हुये गाँवों के किसानों के प्राप्त मूल्य के बराबर होता है। इस प्रकार इनमें दो दोष हैं: समानता का अभाव और फार्म मूल्य का गलत अर्थ। इन दोषों को दूर करने के लिए १९५० से एक नई योजना चलाई गई है। इसके अनुसार कटाई के समय का मूल्य उन मूल्यों का समान्तर माध्य है जिनको किसान कटाई की निश्चित अवधियों में, गाँव के व्यापारी से प्राप्त कता है। औसत थोक मूल्य निकालने की रीति निम्नलिखित है। जिले के कुछ गाँव जिन्हें प्रतिनिधि गाँव कहा जाता है, चुन लिये जाते हैं। प्रत्येक प्रतिनिधि गाँव में मूल्य सम्बन्धी तथ्यांक जमा किये जाते हैं। ये मूल्य वस्तु के सबसे अधिक प्रचलित प्रकार के होते हैं। इनको जमा करने का दिन भी निश्चित किया गया है: यह है प्रत्येक सप्ताह का शुक्रवार। इन अंकों का साधारण समान्तर माध्य जिले के लिए माध्य-मूल्य बताता है। जिलों के माध्य-मूल्यों को प्रत्येक जिले द्वारा उत्पत्ति राशियों के अनुपात से भारित करके पूरे राज्य के लिए फार्म-मूल्य या कटाई के समय का मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है।

उपर्युक्त विवरण को पढ़कर ज्ञात हो गया होगा कि इस दूसरी रीति का उपयोग करने के बावजूद भी विभ्रम होने की बहुत गुन्जाइश है। इसका पहला दोष यह है कि

कृषि-वस्तुओं के प्रमापीकृत (standardised) न होने के कारण यह नहीं कहा जा सकता कि हमेशा एक ही वस्तु के लिए उद्धरण दिए जा रहे हैं। इसलिए विभिन्न स्थानों और विभिन्न समयों के मूल्य-उद्धरणों में पर्याप्त परिशुद्धता के साथ तुलना नहीं की जा सकती। दूसरा दोष यह है कि जिस महत्ता (magnitude) में सामग्री संग्रहित की जाती है उसके अनुरूप कोई ऐसा संगठन नहीं है जहाँ इसका सारणीयन और विश्लेषण किया जा सके। तीसरा दोष यह है कि जो उद्धरण प्राप्त होते हैं वे नियमित नहीं होते, और न ही सब प्रकार के मूल्यों के उद्धरण प्राप्त होते हैं। तीसरी कमी के कारण यह सम्भव नहीं हो पाता कि कृषि के क्रय-विक्रय से सम्बन्धित लोगों के लाभ का सही पता चल सके। इन अन्तिम दो कमियों के कारण सही मूल्य-देशनांक बनाना भी सम्भव नहीं है। मूल्य-उपनति का अध्ययन करने के लिए इनका होना आवश्यक है।

अन्य मूल्य

कृषि-मूल्यों के अतिरिक्त अन्य वस्तुओं के मूल्य भारत सरकार द्वारा प्रकाशित, विभिन्न पत्रिकाओं में काफी मात्रा में मिलते हैं। बहुत-सी अराजकीय तथा अर्ध-राजकीय संस्थाएँ भी विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों को पत्रिकाओं में प्रकाशित करती हैं। 'मन्थली सर्वे आफ बिजनेस कन्डीशंस इन इंडिया' (Monthly Survey of Business Conditions in India) में बहुत-सी वस्तुओं जैसे, कपास, जूट, लोहा और इस्पात, चीनी, कोयला, खाद्यान्न, तिलहन और चाय इत्यादि के मूल्य-संमक प्रकाशित होते थे। सन् १९५१ में यह पत्रिका 'दि जनरल ऑफ इन्डस्ट्री एन्ड ट्रेड' (The Journal of Industry and Trade) जो कि वाणिज्य तथा उद्योग मंत्रालय से हर महीने प्रकाशित होती है, में मिला दी गई। इसमें कृषि और अकृषि सम्बन्धी मुख्य वस्तुओं के साप्ताहिक मूल्य दिये जाते हैं और इन्हीं के आधार पर इकनामिक एडवाइजर का बहुशो मूल्य देशनांक बनाया जाता है। इस देशनांक का वर्णन आगे चल कर किया जाएगा।

द्वितीय महायुद्ध के समय जबकि अधिकतर वस्तुओं के मूल्य पर नियन्त्रण था, सरकार वस्तुओं का नियन्त्रित मूल्य प्रकाशित किया करती थी। वह मूल्य, जिन पर, सरकार सामान खरीदती थी तथा वह मूल्य, जिस पर वह सामान जनता को बेचती थी, दोनों ही सरकार द्वारा प्रकाशित पत्रिकाओं में समय-समय पर मुद्रित किए जाते थे।

सोने, चाँदी तथा प्रतिभूतियों (securities) के मूल्य प्रति सप्ताह रिजर्व बैंक द्वारा प्रकाशित बुलेटिन में छापे जाते हैं।

इसके अतिरिक्त कुछ समय से विभिन्न राज्य-सरकारें साप्ताहिक तथा मासिक

पत्रिकाएँ निकालती हैं। जिनमें उन राज्यों के विभिन्न शहरों में मुख्य वस्तुओं के थोक और फुटकर मूल्य मिलते हैं।

उपरोक्त विवरण से यह स्पष्ट है कि पिछले कुछ वर्षों में देश के मूल्य समंकों में काफी सुधार हुआ है। भारत के मूल्य समंक अधिकतर 'आफिस आफ दि इकानामिक एड्वाइजर, (Office of the Economic Adviser) और 'डाइरेक्टोरेट आफ इकानामिक्स एण्ड स्टैटिसटिक्स' (Directorate of Economics and Statistics) द्वारा प्रकाशित किये जाते हैं। ये मूल्य-समंक राज्य-सरकारों द्वारा तथा कुछ अराजकीय संस्थाओं द्वारा एकत्रित किये होते हैं। राज्य-सरकारों ने भी मूल्य-समंक एकत्रित करने में काफी सुधार किये हैं। पटवारी तथा कानूनगो के स्थान पर यह कार्य अब विशेष निरीक्षकों (inspectors) द्वारा किया जाता है जिनको इस कार्य के लिए विशेष रूप से शिक्षा दी जाती है।

मूल्य-समंकों की कमियाँ

काफी सुधार होने पर भी भारतीय मूल्य-समंकों में बहुत-सी कमियाँ हैं। सर्वप्रथम तो यह कि वस्तुओं के प्रमापित (standardised) न होने के कारण विभिन्न कालावधियों के मूल्य तुलनात्मक नहीं हैं। इसके अतिरिक्त मूल्य-समंक सदैव निश्चित अवधि पर प्रकाशित भी नहीं होते हैं। मूल्य-समंक इस प्रकार के नहीं होते जिनसे मूल्य-देशनांक सुविधाजनक रूप से बनाये जा सकें। विदेशों में विभिन्न प्रकार के मूल्य देशनांक प्रचलित हैं और इनसे बहुत से लाभ भी हैं, परन्तु अपने देश में जब तक मूल्य समंकों की सब कमियाँ दूर न हो जायें तब तक इस प्रकार के देशनांकों का बनाया जाना सम्भव नहीं।

मूल्य-देशनांक

मूल्य-उपनति के अध्ययन के लिये यह आवश्यक है कि मूल्य देशनांक बनाये जायँ। थोक-मूल्यों की विवेचना के लिये बहुशो-मूल्य-देशनांक (wholesale price index numbers) और फुटकर मूल्यों के लिये अल्पशो-मूल्य-देशनांक (retail price index numbers) की आवश्यकता पड़ती है।

निम्नलिखित अनुच्छेदों में 'इकानामिक एडवाइजर' के बहुशो-मूल्य-देशनांक का संक्षिप्त विवरण दिया गया है।

एकनामिक एडवाइजर का बहुशो-मूल्य-देशनांक (Econonic advisers wholesale prices index) :

भारतवर्ष में मूल्य-स्थिति के अध्ययन के लिये पिछले वर्षों में एकनामिक एड्वाइजर

के वहुशो मूल्य-देशनांकों की रचना की गई। इनका आधार अगस्त, १९३९ को अंत होने वाला वर्ष है। इन देशनांकों को निम्नलिखित ५ भागों में बाँटा गया है :

(१) भोजन की वस्तुएँ (food articles)
(२) औद्योगिक कच्चे माल (industrial raw materials)
(३) अर्ध-निर्मित वस्तुएँ (semi-manufactures)
(४) निर्मित वस्तुएँ (manufactures)
(५) विविध (miscellaneous)

प्रत्येक वर्ग को पुनः कुछ अधः वर्गों (subgroups) में बाँटा गया है और प्रत्येक अधः वर्ग के अन्तर्गत कुछ सम्बन्धित वस्तुएँ ली गई हैं। यह हमें निम्नलिखित सारणी से स्पष्ट हो जायेगा—

वर्ग	अधः वर्ग	वस्तुओं की संख्या
(१) भोजन की वस्तुएँ	३	११
(२) औद्योगिक कच्चे माल	४	१९
(३) अर्ध-निर्मित वस्तुएँ	७	२३
(४) निर्मित वस्तुएँ	३	१९
(५) विविध	१	६
योग	१८	७८

इस प्रकार हम देखते हैं इन पाँच मुख्य वर्गों को १८ अधः वर्गों में बाँटा गया है और कुल ७८ वस्तुएँ इसके अन्तर्गत ली गई हैं। इन ७८ वस्तुओं में से प्रत्येक के लिये विभिन्न संस्थाओं में मूल्य-उद्धरण (price quotations) लिये गये हैं। इस देशनांक में लिये गये कुल मूल्य उद्धरणों की संख्या २२५ है।

इन पाँच मुख्य वर्गों को मिला कर एक संग्रथित देशनांक वनाया गया है जिसे एकानामिक एडवाइजर का वहुशो-मूल्य देशनांक (Economic Adviser's general index of wholesale prices) कहते हैं।

यह देशनांक प्रत्येक सप्ताह वनाया जाता है और साप्ताहिक, मासिक और वार्षिक रूप में प्रकाशित किया जाता है। इसके लिये सप्ताह में एक दिन (लगभग शुक्रवार) के मूल्य लिये जाते हैं जो कि विभिन्न साधनों से प्राप्त होते हैं। यह देशनांक एकनामिक एडवाइजर के साप्ताहिक वुलेटिन "भारतवर्ष में वहुशो-मूल्य देशनांक" (Index number of wholesale prices in India) में प्रकाशित किया जाता है।

सर्वप्रथम प्रत्येक वस्तु के साप्ताहिक मूल्य उद्धरणों का मूल्यानुपात लिया जाता है। तत्पश्चात् उस वस्तु के विभिन्न मूल्यानुपातों का साधारण गुणोत्तर मध्यक लिया जाता है और इस प्रकार वस्तु देशनांक (commodity index) बनाया जाता है। अव: वर्ग देशनांक (sub group index) बनाने के लिये अव: वर्ग में आने वाले वस्तु देशनांकों का भारित गुणोत्तर मध्यक लिया जाता है। इसी प्रकार अव:-वर्ग देशनांकों का भारित गुणोत्तर मध्यक लेकर वर्ग-देशनांक (group index) बनाया जाता है। अन्त में इन वर्ग-देशनांकों को मिलाकर संग्रथित-देशनांक की रचना की जाती है। यहां भी भारित गुणोत्तर मध्यक का प्रयोग किया जाता है।

इस देशनांक में विभिन्न वस्तुओं के भार उनके १९३८-३९ में बेची गई राशि के मूल्यों के अनुपात में है, विभिन्न वर्गों के भार भी इसी रीति से निकाले गये हैं। ये भार निम्नलिखित हैं—

(१) भोजन की वस्तुएँ	३१
(२) औद्योगिक कच्चा माल	१८
(३) अर्ध-निर्मित वस्तुएँ	१७
(४) निर्मित वस्तुएँ	३०
(५) विविध	४
	१००

निम्नलिखित सारणी में इस देशनांक के प्रमुख वर्गों के कुछ अंक दिये गये हैं।

बहुशो मूल्य देशनांक (अगस्त १९३९ = १००)

विवरण	भार	२७ जुलाई १९५७	१९५६–५७	१९५५–५६
१–भोजन सामग्री	३१	४४०·७	३८८·५	३१३·२
२–औद्योगिक कच्चा माल	१८	५४७·६	५०१·९	४१९·८
३–अर्द्ध निर्मित वस्तुएँ	१७	४१५·७	४०२·३	३३८·०
४–निर्मित वस्तुएँ	३०	३९२·१	३८४·६	३७२·९
५–अन्य वस्तुएँ	४	६२२·४	५५९·३	५४६·४
६–सब वस्तुएँ	१००	४४४·२	४१४·६	३६०·४

इस देशनांक की कमियाँ

(१) इसमें लिये गए भार (weights) पुराने हैं और वे इस समय की परिस्थिति के लिये विशेष उपयोगी नहीं हैं।

(२) कुल भारों में से आधे से अधिक भार भोजन की वस्तुयें तथा अर्द्ध निर्मित वस्तुओं को दिये गये हैं। द्वितीय महायुद्ध तथा उसके पश्चात् भारतवर्ष में निर्माण उद्योगों की वृद्धि हुई है, लेकिन फिर भी उन्हें सापेक्षतः कम कर दिया गया है।

(३) जिस रीति से भारों को चुना गया है वह भी दोषपूर्ण है।

(४) देशनांक की रचना में लिये गये मूल्य उद्धरण की संख्या तथा उनका चुनाव भी संपूर्ण वस्तुओं का प्रतिनिधित्व नहीं करता जैसे चावल के लिए उद्धरणों की संख्या ३ है और जूतों, जो कि तुलनात्मक रूप में कम उपयोगी हैं, के उद्धरणों की संख्या ८ है। इसी प्रकार गेहूँ को कम भार दिया गया है लेकिन टायर और ट्यूवों को अधिक भार दिया गया है।

(५) इसी प्रकार भोजन वर्ग देशनांक भी पूर्णरूपेण स्पष्ट नहीं है। भोजन शब्द का अर्थ विभिन्न रूप में लिया जाता है। वास्तव में इसके अन्तर्गत अनाजों को ही आना चाहिए था लेकिन चना, अरहर की दाल, चाय, काफी, चीनी, गुड़ तथा नमक भी इसमें लिये गये हैं।

उपर्युक्त कमियों को ध्यान में रखते हुए इस देशनांक में संशोधन की आवश्यकता थी। उद्धरणों की संख्या को बढ़ाना चाहिए ताथा भारों का चुनाव भी पुनः होना चाहिए। आधार वर्ष में भी संशोधन होना चाहिए और देशनांक का किसी निकट वर्ष पर आधारित होना ठीक होगा। इस देशनांक का वास्तविक ध्येय सामान्य मूल्य स्तर को मापना होना चाहिए। पिछले कुछ वर्षों में भारत तथा विदेशों के आर्थिक संघटन में कुछ बदलाव हो गया है, इसका भी ध्यान रखना आवश्यकीय है।

हाल ही में एकनामिक एडवाइजर के दफ्तर से एक नया देशनांक प्रकाशित होना आरम्भ हुआ है। इसमें पुराने देशनांक की कमियों को दूर करने का प्रयत्न किया गया है, इसकी प्रमुख बातें नीचे दी गई हैं।

एकानामिक एडवाइजर का नवीन (संशोधित) बहुशो-मूल्य देशनांक

वर्तमान बहुशो-मूल्य देशनांक की अनेक कमियों को दूर करने के लिये हाल ही में एकानामिक एडवाइजर के कार्यालय ने एक नवीन देशनांक निकाला है। वर्तमान श्रेणी में ७८ वस्तुओं और २१५ मूल्य उद्धरणों के स्थान पर अब संशोधित श्रेणी में ११२ वस्तुएँ तथा ५५५ मूल्य उद्धरण सम्मिलित किये गए हैं। देशनांक का आधार अभी पूर्णतः

निश्चित नहीं हुआ है परन्तु फिलहाल इसकी सन् १९५२-५३ के आधार पर गणना हो रही है। नवीन वर्ग और उनके भार निम्न प्रकार हैं :-

(१) भोजन की वस्तुएँ	५०४
(२) मदिरा एवं तम्बाकू	२१
(३) ईंधन, शक्ति, प्रकाश आदि	३०
(४) औद्योगिक कच्चे माल	१५५
(५) निर्मित वस्तुएँ :-	२९०
(अ) अर्ध निर्मित वस्तुएँ (Intermediate)	
(ब) निर्मित वस्तुएँ	
	१०००

"विभिन्न वस्तुओं को दिये हुए भार गृह पदार्थों के बाजार मूल्यों तथा कर सहित आयात माल के मूल्यों के अनुमान पर आधारित हैं। निर्मित वस्तुओं के भार १९४८ की भारतीय निर्मित वस्तुओं की तृतीय गणना में प्राप्त पदार्थों के सकल मूल्य (gross value) समंकों के अनुसार निश्चित किये गए हैं। आयात पदार्थों को भी ध्यान में रक्खा गया है। अर्ध निर्मित माल के बारे में केवल विक्रय के लिए पैदा किये गए पदार्थों के भाग पर ही विचार किया गया है। ये भार राष्ट्र विभाजन के बाद १९४८-४९ के समय से सम्बन्धित हैं। सन् १९५२-५३ के देशनांक में सम्मिलित सब वस्तुओं के लिए ऐसे समंक प्राप्त नहीं हैं। इस प्रकार भाराधार (weight base) मूल्य तुलना भार से भिन्न है।

वर्तमान श्रेणी (series) की गणना गुणोत्तर भारित मध्यक द्वारा होती है जब कि नवीन श्रेणी की गणना भारित समान्तर मध्यक द्वारा हो रही है।

निम्नलिखित सारणी में इस नये देशनांक के प्रमुख वर्गों के भार तथा कुछ महीनों के अंक दिये गये हैं।

बहुशो मूल्य देशनांक

(१९५२-५३=१००)

विवरण	भार	२७ जुलाई १९५७	जून १९५७	जून १९५६
१–भोजन की वस्तुएँ	५०४	१११.७	१०९.३	९९.०
२–मदिरा एवं तम्बाकू	२१	९२.०	९२.३	८०.५
३–ईंधन, शक्ति, प्रकाश आदि	३०	११४.७	१११.७	९८.७
४–औद्योगिक कच्चे माल	१५५	१२१.९	१२१.३	११२.९
५–निर्मित वस्तुएँ	२९०	१०९.०	१०८.५	१०३.५
(अ) अर्द्धनिर्मित वस्तुएँ	१४१	१०९.०	१०९.०	१०९.५
(ब) तैयार वस्तुएँ	८५९	१०९.०	१०८.४	१०२.५
६– सब वस्तुएँ	१०००	११२.२	११०.६	१०२.१

अल्पशो-मूल्य-देशनांक (Retail Price Index Number)

कुछ शहरों तथा कुछ गाँवों के लिए श्रम मंत्रालय, (labour ministry) अल्पशो मूल्य-देशनांक प्रकाशित करता है। १८ शहर तथा १२ गाँवों के यह देशनांक 'इन्डियन लेवर गजट' (Indian Labour Gazette) में प्रतिमास छापे जाते हैं। इनका आधार वर्ष १९४४ था पर अब १९४९ कर दिया गया है। इनके लिए मूल्य उद्धरण प्रति सप्ताह एकत्रित किये जाते हैं और इन देशनांकों के बनाने में किसी वस्तु को कोई भार (weight) नहीं दिया जाता। जिन वस्तुओं से यह देशनांक बनाये जाते हैं वे साधारणतः दिन प्रतिदिन उपभोग की जाने वाली वस्तुएँ हैं जैसे, खाद्यान्न, ईंधन और रोशनी, कपड़े आदि। इन देशनांकों के अतिरिक्त कटाई के समय कृषि मूल्यों का देशनांक डाइरेक्टोरेट आफ इकनामिक्स एन्ड स्टेटिसटिक्स से प्रकाशित किया जाता है।

अध्याय २०

मजदूरी-समंक

(Wage Statistics)

आधुनिक समय में जब प्रत्येक देश का लक्ष्य जनसाधारण के कल्याण में वृद्धि करना है, मजदूरी-समंक बहुत महत्वपूर्ण हैं। इनका उद्देश्य मजदूरों की आय, आय का वितरण, आयों की तुलना आदि करना है। इनके द्वारा यह ज्ञात होता है कि मजदूर क्रय-शक्ति (purchasing power) के रूप में क्या अर्जन कर रहे हैं। बिना इन समंकों के श्रम-कल्याण की कोई भी योजना सम्भव नहीं है।

मजदूरी समंकों का अध्ययन दो शीर्षकों के अन्तर्गत किया जा सकता है :

(१) औद्योगिक मजदूरी-समंक (Statistics of Industrial Wages)

(२) कृषि-मजदूरी-समंक (Statistics of Agricultural Wages)

(१) **औद्योगिक मजदूरी समंक**. मजदूरी दरों से सम्बन्धित समंक राज्य सरकारों और केन्द्रीय सरकार द्वारा प्रकाशित किये जाते हैं। इन समंकों का संग्रहण करने में पर्याप्त कठिनाई होती है। पहली कठिनाई तो यह है कि अधियोजकों (employers) की मजदूरी-सूचियाँ (pay rolls), जो मजदूरी-समंकों को प्राप्त करने के मुख्य स्रोत हैं, अपूर्ण और एकरूप नहीं हैं। मजदूरी-सूचियों को भरने की ओर कोई विशेष ध्यान नहीं दिया जाता। प्रामाणिक सूचना देने के बदले इनसे जो सूचना प्राप्त होती है वह अप्रामाणिक और अविश्वसनीय भी है। एकरूपता न होने का मुख्य कारण यह है कि मजदूरी देने के समयों (pay-days) के बीच का अन्तर एक स्थान से दूसरे स्थान या एक काल से दूसरे काल में वही नहीं रहता। फिर वेतनों के समयानुसार (time-rates) और कार्यानुसार (piece rates) होने के कारण भी एकरूपता नहीं आ पाती। कभी-कभी एक ही फर्म में एक ही काम करने वालों में कुछ को मजदूरी समयानुसार मिलती है और कुछ को कार्यानुसार। यह भी देखा गया है कि कुछ व्यक्तियों को मजदूरी का एक अंश समयानुसार मिलती है और शेष कार्यानुसार। व्यवसायों का नामकरण (nomenclature) और उनका श्रेणी-करण (grading) भी दोषपूर्ण है। यह किसी भी दृष्टि से तर्कसम्मत नहीं कहे जा सकते। नामों के प्रमाणीकरण न

होने के कारण गड़बड़ होने की बहुत गुंजाइश रहती है। एक ही कार्य के लिये दो या अधिक नाम प्रायः मिलते हैं, और कभी-कभी एक ही नाम का उपयोग दो या अधिक बिल्कुल अलग-अलग कार्यों के लिये किया जाता है। वृत्ति का नियमित संतत न होना भी मजदूरी-समंकों के संग्रहण में बाधा डालता है।

अगर औद्योगिक-मजदूरी समंकों को परिशुद्धता के साथ वैज्ञानिक रीतियों से जमा करना है तो यह आवश्यक है कि व्यवसायों के नाम प्रमापीकृत हों, मजदूरी-सूची ठीक तरह से भरी जाय और मजदूरी देने की विधियों और उनके बीच के कालान्तर को उचित रूप से परिभाषित किया जाय।

फैक्ट्री-मजदूरों की आय का अनुमान लगाने के लिये तथा उसकी उपनति अध्ययन करने के लिए लेबर ब्यूरो (Labour Bureau) ने प्रथम बार फैक्ट्री-मजदूरों की आय का देशनांक (index of earnings of factory workers) फरवरी सन् १९५३ में 'इंडियन लेबर गजट' में प्रकाशित किया। इस देशनांक ने वेतन समंकों की एक बहुत बड़ी कमी को पूरा किया। यह वार्षिक देशनांक है और इसका आधार सन् १९३९ था, पर अब १९४९ कर दिया गया है। तीन प्रकार के देशनांक निम्नलिखित के लिये बनाये जाते हैं :

(अ) प्रत्येक राज्य के "सब उद्योगों के लिए"।

(ब) सब राज्यों के "प्रत्येक उद्योग के लिये"।

(स) "सब राज्यों के सब उद्योगों के लिए"।

इन देशनांकों को बनाने के लिये सामग्री लेबर ब्यूरो एकत्रित करता है। यह सामग्री १९३६ के 'पेमेंट आफ वेजेज ऐक्ट' (Payment of Wages Act) के अनुसार एकत्र की जाती है।

फैक्ट्री मजदूरों के निर्वाह-व्यय का अनुमान लगाने के लिए हमारे देश में बहुत से उपभोक्ता मूल्य देशनांक (consumer price index numbers) प्रचलित हैं। 'इन्डियन लेबर गजट' में निम्नलिखित देशनांक प्रकाशित किये जाते हैं :

(१) १५ केन्द्रों के लिये ब्यूरो द्वारा बनाये गये मजदूर-वर्ग के उपभोक्ता मूल्य देशनांक।

(२) १३ केन्द्रों के लिए राज्य सरकारों द्वारा बनाये गए मजदूर-वर्ग के उपभोक्ता मूल्य देशनांक।

निम्नलिखित सारणी में कुछ उपभोक्ता मूल्य देशनांक दिये हैं।

उपभोक्ता मूल्य देशनांक—मजदूर वर्ग
(१९४९=१००)

केन्द्र	१९५२–५३	१९५५–५६	१९५६–५७
१—सम्पूर्ण भारत	१०४	९६	१०७
२—अहमदाबाद	१०७	८९	१०१
३—अजमेर	१०७	८५	९७
४—बंगलोर	११५	१०४	११८
५—बम्बई	११२	११०	११६
६—कलकत्ता	१००	९३	१०२
७—कटक	१०५	१००	१०८
८—देहली	१०७	१००	११२
९—गौहाटी	१०९	८७	९९
१०—हैदराबाद शहर	१०७	१००	१२१
११—जमशेदपुर	१११	९९	१०८
१२—कानपुर	९३	७९	९९
१३—लुधियाना	९०	८५	९४
१४—मद्रास शहर	१०३	१००	१०३
१५—नागपुर	१०१	९८	१०७
१६—शोलापुर	१०४	८५	११०
१७—त्रिचूर	१०५	१०७	११३

इन देशनांकों के अतिरिक्त, जो कि सरकार द्वारा प्रकाशित किये जाते हैं बहुत से देशनांक ऐसे भी हैं जिन्हें मजदूर संस्थाएँ प्रकाशित करती हैं। विभिन्न प्रदेशों के इन देशनांकों की आपस में तुलना नहीं की जा सकती क्योंकि इनके आधारवर्ष, वस्तुओं की संख्या तथा गुण और बनाने की रीतियाँ भिन्न-भिन्न हैं। इन सब देशनांकों में 'बम्बई लेबर ऑफिस' द्वारा बनाए गए देशनांक सर्वोत्तम समझे जाते हैं।

(२) **कृषि-मजदूरी समंक :** इन समंकों की दशा औद्योगिक-मजदूरी समंक से भी अधिक शोचनीय है। जो थोड़े-बहुत समंक उपलब्ध भी हैं वे अपनी अपर्याप्तता, अपूर्णता, अप्रामाणिकता और अपरिशुद्धता के कारण अत्यन्त असन्तोषजनक हैं। औद्योगिक मजदूरी-समंकों के संग्रहण की कठिनाइयाँ और उनकी कमियाँ, जो पिछले शीर्षक के अन्तर्गत बताई गई हैं, यहाँ उनसे भी अधिक परिमाण में विद्यमान हैं। कृषि-मजदूरी की दशा को देखते हुये उनकी आय से सम्बन्धित समंकों का अभाव होना बहुत खलता है। इस कमी को कुछ हद तक दूर करने के लिए १९५० में खाद्य और कृषि मंत्रालय

(Food & Agriculture Ministry) ने एक योजना बनाई थी। इस योजना के अनुसार कृषि-मजदूरों का वर्गीकरण निम्नलिखित रूप से किया गया था :

(१) निपुण मजदूर (skilled labour):
 (क) बढ़ई (carpenters),
 (ख) लोहार (blacksmith),
 (ग) चर्मकार (cobbler)

(२) खेत में काम करने वाले मजदूर (field labour)

(३) अन्य कृषि-मजदूर (other agricultural labour)

(४) चरवाहे (herdsmen)

इनकी दैनिक मजदूरी का संग्रहण किया जाता है चाहे वह द्रव्य के रूप में दी जाती हो या वस्तु के रूप में। वस्तु के रूप में दी जाने वाली मजदूरी को द्रव्य के रूप में रखा जाता है। ये मजदूरियाँ प्रत्येक जिले के एक चुने हुए गाँव की, जो मजदूरी और कृषि-दशाओं का प्रतिनिधि माना जाता है, होती है। चूँकि मजदूरी सम्बन्धी सामग्री के संग्रहण का आधार महीना है, इसलिए किसी मास में सर्वाधिक प्रचलित मजदूरी को लिया जाता है। इन जिलों के मजदूरियों के आधार पर पूरे राज्य के लिये मजदूरी निश्चित की जाती है और यह अंक 'केन्द्रीय डाइरेक्टोरेट' को भेज दिए जाते हैं जहाँ से इनका प्रकाशन होता है।

कृषि-मजदूर अनुसंधान (Agricultural-Labour Enquiry)

सन् १९४३ में सरकार, अधियोजकों (employers) तथा श्रमिकों की एक सभा हुई थी, जिसकी सिफारिश के अनुसार सरकार, कृषि-मजदूरी से सम्बन्धित एक सर्वेक्षण करने वाली थी, पर इसके प्रारम्भ होने के पहले ही सन् १९४८ में 'न्यूनतम वेतन अधिनियम' (minimum wages act) पास हो गया और इसके अनुसार न्यूनतम वेतन निश्चित करने का प्रश्न उठा। इसके लिए सन् १९४९ में, केन्द्रीय सरकार ने राज्य-सरकारों के सहयोग से, एक अनुसंधान आरम्भ किया। इसका उद्देश्य कृषि-मजदूरों की आय, निर्वाह-व्यय, ऋण इत्यादि के बारे में समंक एकत्रित करना था ताकि उनकी स्थिति में सुधार किया जा सके और न्यूनतम वेतन भी निश्चित हो सके। यह सामग्री एकत्रित कर ली गई है और धीरे-धीरे प्रकाशित भी हो चुकी है। इसमें कृषि-मजदूर सम्बन्धी बहुत समंक मिलते हैं।

अध्याय २१
राष्ट्रीय आय
(National Income)

किसी देश की राष्ट्रीय आय उसके निवासियों के लिए एक कालावधि में उत्पादित वस्तुओं और सेवाओं की राशि का द्रव्य-मूल्य है। इसमें केवल वास्तविक उत्पत्ति (net product) की गणना की जाती है। किसी भी वस्तु या सेवा की दुहरी गणना नहीं होनी चाहिए। इसमें उन सब उत्पत्ति का समावेशन (inclusion) होता है जिसे देश के निवासी विदेशों में उत्पादन इकाइयों के स्वामित्व के कारण प्राप्त करते हैं, और उन सब उत्पत्ति का अपवर्जन (exclusion) होता है जिसे अन्य देशों के निवासी इस देश में उत्पादन इकाइयों के स्वामित्व के कारण प्राप्त करते हैं।

राष्ट्रीय-आय के आगणन पूरे देश के सामान्य आर्थिक स्तर से सम्बन्धित समंकों को देते हैं। इतना ही नहीं, इनमें देश के विभिन्न उत्पादक-वर्गों द्वारा दिए गए हिस्से की भी गणना रहती है। राष्ट्रीय आय सम्बन्धी समंक पूरे देश की आर्थिक स्थिति का सर्वांगीण परिचय देते हैं। इनके द्वारा सरकार यह जान सकती है कि देश में उत्पादन और वितरण की स्थिति क्या है। देश के विभिन्न वर्गों द्वारा दिए गए उत्पादन में सहयोग और इसके बदले उन्हें मिलने वाले प्रतिफल का इसमें विवरण रहता है। अतएव किसी भी ऐसी आर्थिक नीति के लिए जो देश के उत्पादन और वितरण को प्रभावित करती हो, इसका ज्ञान होना आवश्यक है।

राष्ट्रीय आय को नापने की रीतियाँ (Methods of measuring national income)

राष्ट्रीय आय को नापने की दो रीतियाँ हैं। पहली को उत्पादन संगणना रीति (census of products method) कहा जाता है और दूसरी को आय-संगणना रीति (census of incomes method)। इन रीतियों को कुल उत्पादन रीति (total product method) और साधन प्रतिफल रीति (factor payment method) भी कहा जाता है।

उत्पादन संगणना रीति : इस रीति में सब उत्पादक उद्यमों के द्वारा किए गए वास्तविक उत्पादन (Net production) और सेवाओं का मूल्यांकन किया जाता

है। उत्पादक उद्यमों के अन्तर्गत वे सब उद्यम आते हैं जो किसी न किसी रीति से वस्तुओं की उपयोगिता में वृद्धि करते हैं जैसे कृषि, उद्योग, व्यवसाय, यातायाय, वन, मत्स्य-व्यवसाय, खनन आदि। इनके अर्घ (value) में से निर्यात के अर्घ को घटा दिया जाता है और आयात के अर्घ को जोड़ दिया जाता है। साथ ही साथ, घरेलू उद्योगों की उत्पत्ति, वैयक्तिक सेवाएँ आदि जोड़ दी जाती हैं। उत्पत्ति का जो भाग आदेयों (assets) की वृद्धि करता है, वह भी जोड़ दिया जाता है। सरकार को मिलने वाला उत्पत्ति का भाग भी जोड़ा जाता है। विदेशों में स्वामित्व के अधिकारों के कारण प्राप्त होने वाली आय जोड़ दी जाती है और विदेशियों को देश में स्वामित्व के अधिकारों के कारण मिलने वाली आय घटा दी जाती है। इस प्रकार वास्तविक देशीय उत्पत्ति का पता चल जाता है।

आय संगणना रीति—इस रीति में व्यक्तियों की आयों का योग राष्ट्रीय आय माना जाता है। देश के प्रत्येक नागरिक की द्रव्य आय के साथ उन सब उत्पत्ति के मूल्य को भी जोड़ा जाता है जिसका लोग स्वयं उपभोग कर लेते हैं, इसके साथ वस्तुओं के रूप में प्राप्त होने वाली आय का मूल्य भी जोड़ दिया जाता है। जो आय देश के निवासियों को विदेशों से प्राप्त होती है वह जोड़ दी जाती है और विदेशियों को देश से मिलने वाली आय घटा दी जाती है।

इस प्रकार जोड़ने-घटाने से जो परिणाम आता है वह राष्ट्रीय आय है।

इन दोनों रीतियों में सारतः कोई अन्तर नहीं है क्योंकि देश में विभिन्न वर्गों द्वारा जो कुछ भी उत्पादित किया जाता है वह किसी न किसी की आय है—भले ही यह उत्पत्ति, स्कन्ध (stock) के रूप में क्यों न रहे एक ही चीज को देखने के ये दो दृष्टिकोण हैं।

राष्ट्रीय-आय निकालने की एक तीसरी-रीति भी है जिसे **सामाजिक लेखा** (social accounting) रीति कहते हैं। इस रीति में व्यक्तियों के लेन-देन की प्रणाली का अध्ययन किया जाता है जिसके आधार पर उन्हें वर्गों के रूप में विभाजित किया जाता है। प्रत्येक वर्ग में एक प्रकार का लेन-देन (transaction) करने वाले व्यक्ति रहते हैं। इन वर्गों के लेन-देन से राष्ट्रीय आय या अन्य समूहों (aggregates) की गणना कर ली जाती है। चूँकि भारत में इस रीति का प्रयोग अभी नहीं किया जा सकता इसीलिए इस पर अधिक विचार नहीं किया जायगा।

राष्ट्रीय-आय सामग्री की परिसीमाएँ (Limitations of national Income data)।

राष्ट्रीय-आय की परिसीमाओं के मुख्य दो कारण हैं। पहला तो है उत्पादन या आय की ठीक परिभाषा करने का। इनकी परिभाषाओं का विषय बहुत विवादास्पद है।

दूसरा, सामग्री-संग्रहण की कमियों के कारण राष्ट्रीय आय का आगणन ठीक-ठीक नहीं किया जा सकता।

परिभाषा-सम्बन्धी विवाद पर यहाँ विचार नहीं किया जा सकता क्योंकि विवाद का विषय मुख्यतः यह है कि राष्ट्रीय आय देश की अवस्था के बारे में कहाँ तक सही बात बताता है। यह मानते हुए भी कि परिभाषाओं में कोई गलती नहीं है, स्वयं राष्ट्रीय आय के आगणन में सांख्यिकीय दृष्टिकोण से गलतियाँ होती हैं।

पहली समस्या दुहरी-गणना (double-counting) की है। सिद्धान्ततः यह कहना बहुत सहज है कि अगर किसी पदार्थ की एक बार गणना कर दी गई हो तो उसके उस अंश की गणना नहीं करनी चाहिए, जिससे कोई अन्य पदार्थ बनता हो। पर व्यवहार में ऐसा करना कठिन है। दुहरी-गणना की समस्या विशेषतः सरकार द्वारा की गई सेवाओं के सम्बन्ध में है। राज्य द्वारा बहुत कम मजदूरी या वेतन में काम करने के लिए जबर्दस्ती भर्ती के कारण राष्ट्रीय आय का अल्पानुमान (under-estimation) होगा। अवैधानिक कार्यों द्वारा प्राप्त आय या अवैधानिक उत्पादन की राष्ट्रीय आय में गणना नहीं की जाती। यह मान लिया जाता है कि इस प्रकार की आय या उत्पत्ति नगण्य होगी। पर यह मान्यता कहाँ तक सच है, यह नहीं कहा जा सकता। प्रायः राष्ट्रीय आय की गणना बारह महीने के लिए की जाती है। इस कारण कुछ आयों को, विशेषतः लाभ को किसी निश्चित वर्ष के अन्तर्गत रखने में कठिनाई होती है। राष्ट्रीय आय में प्रकृति-दत्त पदार्थों का आगणन नहीं किया जाता। कई कार्य, जो देश के लिए अत्यन्त महत्वपूर्ण और पर्याप्त महत्ता वाले हैं, छोड़ दिए जाते हैं, जैसे गृहणियों के कार्य, एक व्यक्ति द्वारा दूसरे की की गई सेवा आदि। विशेष-कर, राजनैतिक और वैज्ञानिक कार्यों का इनमें उल्लेख नहीं रहता। जब उत्पादक स्वयं अपनी उत्पत्ति के कुछ अंश का उपयोग करता है, तो इस अंश का मूल्यांकन करना भी एक बहुत बड़ी समस्या है, वैसे इसका राष्ट्रीय आय आगणन में ध्यान रखा जाता है। पर सामग्री की अपर्याप्तता के कारण राष्ट्रीय आय का अल्पानुमान किया जाना मुख्यतः कृषि-प्रधान देशों में—संभव है।

भारत में राष्ट्रीय-आय-आगणन की कठिनाइयाँ (Difficulties of National Income Estimation in India)

राष्ट्रीय आय की गणना द्रव्य के रूप में होती है। इसलिए अगर राष्ट्रीय-आय का आगणन करना हो तो यह मान लिया जाता है कि देश में केवल द्रव्य-विनियम प्रचलित है। आर्थिक रूप से विकसित देशों में इस मान्यता के कारण राष्ट्रीय आय के आगणन में नगण्य प्रभाव पड़ता है। पर भारत में, जहाँ अब भी वस्तु विनिमय

(batter) काफी प्रचलित है, इस प्रकार की मान्यता के कारण राष्ट्रीय आय के आगणन में पर्याप्त विभ्रम हो जाएगा। लोगों के लेखा न रखने के स्वभाव के कारण वस्तु-विनिमय के मूल्य को ठीक-ठीक आँकना संभव नहीं है। अतएव यहाँ राष्ट्रीय-आय-आगणन में बहुत अधिक अनुमान लगाना पड़ता है। दूसरी समस्या घरेलू-उद्योगों की है। यहाँ की अर्थ-व्यवस्था में इनका मुख्य स्थान है। घरों के सदस्य प्रायः कई ऐसे कार्य करते हैं जिन्हें अलग-अलग उद्योगों के अन्तर्गत रखा जा सकता है। अतएव लोगों का उद्योगों के अनुसार वर्गीकरण करना भी अत्यन्य कठिन है।

इसके अतिरिक्त भारत में सांख्यिकीय सामग्री का अभाव, यहाँ के राष्ट्रीय-आगणन की मुख्य समस्या है। जैसा पिछले पृष्ठों को पढ़कर ज्ञात होगा, यहाँ के समंक अपर्याप्त, अपूर्ण और अप्रामाणिक हैं। आर्थिक क्रिया के किसी भी क्षेत्र के समंकों के बारे में यह कथन सच है। अगर समंक ही प्राप्त न हों तो राष्ट्रीय आय के आगणन में पर्याप्त परिशुद्धता प्राप्त करना संभव नहीं है। जहाँ तक पहली कठिनाइयों का प्रश्न है, उसके बारे में शीघ्रतापूर्वक कुछ नहीं किया जा सकता क्योंकि वे आर्थिक विकास के स्तर पर निर्भर रहती है। पर इस समाग्री की अनुपलब्धता दूर की जा सकती है और इसकी ओर प्रयत्न किए जाने चाहिए।

भारत की राष्ट्रीय आय

भारतीय राष्ट्रीय आय के अनुमानों तथा उन रीतियों के बारे में जिनके द्वारा आय का अनुमान किया गया, कुछ भी कहने से पूर्व, यह समझ लेना आवश्यक है कि अपने देश में राष्ट्रीय आय अनुमान की रीतियाँ सामग्री की उपलब्धता पर निर्भर रही हैं। समय-समय पर जो राष्ट्रीय आय के अनुमान किये गये हैं वह उस समय उपलब्ध सामग्री की परिसीमाओं को ध्यान में रख कर तथा उन परिस्थितियों में सम्भव रीति द्वारा किये गये हैं। अधिकतर अनुमानों में ऊपर दी गई दोनों मुख्य रीतियों का साथ-साथ प्रयोग किया है। सन् १९३४ में बाउले राबर्टसन कमेटी (Bowley Robertson Committee) न भी यही सुझाव दिया था कि भारत की राष्ट्रीय आय मालूम करने के लिये दोनों रीतियों का साथ-साथ प्रयोग किया जाय।

दादा भाई नौरोजी ने सर्व प्रथम सन् १८६८ में भारत की राष्ट्रीय आय का अनुमान लगाया था। तत्पश्चात् क्रामर और बारबर (Cromer and Barbour), लार्ड कर्जन (Lord Curzon), डिग्बी, (Digbi), शिराज (Shirras) शाह और खंबट (Shah and Khambhata), वाडिया और जोशी (Wadia and Joshi), वकील और मुरंजन (Vakil and Muranjan) तथा वी० के० आर० वी० राव (V. K. R. V. Rao) ने भारतीय राष्ट्रीय आय

के अनुमान लगाये। इन अनुमानों में डा० वी० के० आर०वी० राव के अनुमान कुछ समय पूर्व तक सबसे अधिक प्रचलित थे। डा० राव ने भी दोनों रीतियों का एक साथ प्रयोग किया था।

अगस्त १९४९, में भारत सरकार ने एक राष्ट्रीय आय समिति (National Income Committee) बनाई ताकि भारत की राष्ट्रीय आय का सही-सही अनुमान लगाया जा सके। इस समिति ने भी उत्पादन-संगणना रीति तथा आय-संगणना रीति, दोनों का प्रयोग साथ-साथ किया।

सर्वप्रथम इस समिति ने देश की कुल कार्य करने वाली शक्ति (working force) की गणना की। इसके पश्चात् इस संख्या को विभिन्न व्यवसायों के अनुसार वर्गीकृत किया। तत्पश्चात उत्पादन-संगणना रीति द्वारा कृषि, उद्योग, वन, खनन, इत्यादि वर्गों की आय का अनुमान लगाया। यातायात, व्यवसाय, सरकारी कर्मचारी तथा अन्य पेशों की आय का अनुमान आय-संगणना द्वारा लगाया।

राष्ट्रीय आय समिति ने, जो उद्योग के अनुसार वर्गीकरण किया उसके मुख्य तथा उप-विभाग निम्नलिखित हैं—

(१) कृषि (Agriculture)

(क) कृषिपशुपालन और सहायक काम (ancillary animal husbandry and auxillary activities)

(ख) वन-उद्योग (Forestry)।

(ग) मछली-उद्योग (Fishery)

(२) खनन, निर्माण और घरेलू धन्धे (Mining, Manufacturing & Hand Trades)

(क) खनन (mining)

(ख) फैक्टरी-अधिष्ठान (Factory Establishments)

(ग) छोटे पैमाने के उद्यम (Small enterprises)।

(३) वाणिज्य, यातायात और संवाहन (Commerce, Transport and Communication)

(क) संवाहन-डाक,तार और टेलीफोन (communication, post, telegraph and telephone)

(ख) रेलवे (railway)

(ग) संगठित अधिकोषण और बीमा (organised banking and insurance)

(घ) अन्य वाणिज्य और यातायात (Other commerce & transport)
(४) अन्य सेवाएँ (Other services)
(क) पेशे और कला (Professions & Liberal arts)।
(ख) राजकीय सेवाएँ (शासन) (government services) (Administration)।
(ग) घरेलू सेवाएँ (domestic services)।
(घ) गृह-सम्पत्ति (house property)।

इन वर्गों में पहले दो के लिए, जो राष्ट्रीय आय का लगभग ६६% है, आगणन उत्पादन-संगणना रीति के अनुसार किया गया और शेष दो के लिए आय संगणना रीति के अनुसार।

नीचे दी गई सारणी में १९५०-५१ से १९५४-५५ तक की भारत की राष्ट्रीय आय दी गई है :

औद्योगिक मूल से भारतीय राष्ट्रीय आय आगणन (१९५१–५२ से १९५५-५६ तक) चालू मूल्यों पर Indian Nationl Income Estimates by industrial origin (1951-52 to 1955-56) at Current Prices

अवज रुपयों में (अवज = १०० करोड़)

उद्योग	१९५५-५६	१९५४-५५	१९५३-५४	१९५२-५३	१९५१-५२
(१) कृषि	४२·२	४३·५	५३·२	४८·१	५०·२
(२) खनन निर्माण तथा घरेलू धन्धे	१८·७	१८·१	१७·७	१७·०	१६·८
(३) वाणिज्य, यातायात और संवाहन	१८·५	१८·१	१८·०	१७·८	१७·९
(४) अन्य सेवाएँ	१७·१	१६·५	१६·०	१५·४	१५·०
साधन लागत पर वास्तविक देशी उत्पादन (net-domestic produd at factor cost)	९६·५	९६·२	१०४·९	९८·३	९९·९
विदेशों से अर्जित वास्तविक आय (net-earned income from abroad)	०·०	०·०	०·०	–०·१	–०·२
साधन लागत पर वास्तविक राष्ट्रीय उत्पत्ति (net-natianal output at factor cost)	९६·५	९६·२	१०४·९	९८·२	९९·७

चालू मूल्यों तथा स्थिर मूल्यों से राष्ट्रीय आय की तुलना

Comparision of National income at Current and Constant Prices

	१९५५-५६	१९५४-५५	१९५३-५४	१९५२-५३	१९४८-४९
(अरब रुपये)					
राष्ट्रीय उत्पत्ति					
(१) चालू मूल्य पर	९६·५	९६·२	१०४·९	९८·२	८६·५
(२) १९४८-४९ के मूल्य पर	१०४·२	१०२·८	१००·४	९४·६	८६·५
प्रति व्यक्ति आय					
(३) चालू मूल्य	२५२·०	२५४·४	२८१·०	२६६·४	२४६·९
(४) १९४८-४९ के मूल्य पर	२७२·१	२७१·९	२६९·०	२५६·६	२४६·९
राष्ट्रीय आय देशनांक (आधार १९४८-४९)					
(५) चालू मूल्य पर	१११·६	१११·२	१२१·३	११३·५	१००·०
(६) १९४८-४९ के मूल्य पर	१२०·५	११८·८	११६·१	१०९·४	१००·०
प्रति व्यक्ति आय का देशनांक (आधार १९४८-४९)	१०२·१	१०३·०	११३·८	१०७·९	१००·०
(७) चालू मूल्य पर					
(८) १९४८-४९ के मूल्य पर	११०·२	१०१·१	१०९·०	१०३·९	१००·०

राष्ट्रीय आय के लिए पहले जो मुख्य आगणन किए गए थे इसकी सूचना निम्नलिखित सारणी में आगणन करने वालों के नाम, वह वर्ष जिसके लिए आगणन किए गए थे, और प्रति व्यक्ति राष्ट्र आय (per capita national income) के साथ दिए गए हैं।

आगणक	वर्ष, जिसके लिए आगणन किया गया	प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय आय (रु० में)
(१) दादा भाई नौरोजी	१८६८	२०
(२) क्रामर और बार्बर	१८८२	२७
(३) एफ० डी० अँटकिस्सन	१८८५	३५·२
(४) लार्ड कर्जन	१८९७-९८	३०
(५) विलियम डिग्बी	१८९९	१७·५
(६) वाडिया और जोशी	१९१३-१४	४४·५
(७) शाह और खम्बाटा	१९२१	६७
(८) फिन्ड्ले शीराज	१९२२	११६
(९) वकील और मुरंजन	१९२५	७४
(१०) व्ही० के० आर० व्ही० राव	१९३१-३२	६५
(११) ,, ,, ,,	१९४२-४३	११४

राष्ट्रीय आय के समंकों की आपस में तुलना करते समय बहुत सावधानी बरतने की आवश्यकता है अन्यथा विभ्रमात्मक परिणाम निकल सकते हैं। किन्हीं दो वर्षों की राष्ट्रीय आय की तुलना करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि इन दो वर्षों में देश के सामान्य मूल्यों में अन्तर रहा होगा। यदि एक वर्ष से दूसरे वर्ष में राष्ट्रीय आय दुगनी हो गई है और इसी समय में मूल्यों का स्तर भी दुगना हो गया है तो यह परिणाम नहीं निकाला जा सकता कि देश की आर्थिक अवस्था में कोई विशेष सुधार हुआ है। इसके अतिरिक्त इस बात का भी ध्यान रखना चाहिए कि विभिन्न समयों में राष्ट्रीय आय अनुमान की रीतियों तथा क्षेत्रों में भी अन्तर हो सकता है। इन बातों को ध्यान में रखकर ही राष्ट्रीय आय से देश की आर्थिक परिस्थिति का अनुमान लगाया जा सकता है।

अध्याय २२

राष्ट्रीय-निदर्शन-अधीक्षण

(National Sample Survey)

भारत में समंकों की कमी को दूर करने के लिए सन् १९४९ में प्रधान मन्त्री पं० नेहरू ने यह इच्छा प्रकट की कि निदर्शन-अवीक्षण द्वारा आवश्यक समंक संग्रहित किए जायँ। तदनुसार सन् १९५० में वित्त मंत्रालय (finance ministry) के अन्तर्गत राष्ट्रीय निदर्शन-अवीक्षण का दफ्तर खोला गया। इसका उद्देश्य दैवनिदर्शन द्वारा विभिन्न आर्थिक एवं सामाजिक समस्याओं से सम्बन्धित समंक एकत्रित करना है। तब से अब तक इस संस्था ने दैवनिदर्शन रीति द्वारा बहुत से अनुसंधानों का आयोजन किया है और इस प्रकार उपलब्ध समंकों का पंचवर्षीय योजना तथा अन्य योजनाओं में प्रयोग भी किया गया है। भारत में रहने वाली लगभग ७ करोड़ गृहस्थियों के बारे में सामग्री एकत्र करने के लिए दैवनिदर्शन रीति का अपनाया जाना स्वाभाविक ही है।

इस संस्था के अन्तर्गत ३०० से अधिक शिक्षित तथा योग्य कार्यकर्ता देश भर में फैले हुए हैं और वे विभिन्न अनुसंधानों से सम्बन्धित समंक एकत्र किया करते हैं। एकत्रित सामग्री का विश्लेषण इंडियन स्टैटिसटिकल इन्सटीट्यूट (Indian Statistical Institute) कलकत्ता, में किया जाता है। अब तक इस प्रकार बहुत से आर्थिक तथा सामाजिक प्रश्नों के तत्सम्बन्धी समंक एकत्रित किए जा चुके हैं।

इस संस्था के पहले अवीक्षण में १,८३३, गाँव चुने गये थे, जिनमें से ११८९ गाँवों में रहने वाले गृहस्थियों के बारे में समंक राष्ट्रीय-निदर्शन अवीक्षण संस्था को तथा ६४४ गाँवों के बारे में गोखले इन्स्टिट्यूट (Gokhale Institute) पूना को एकत्रित करने थे। राष्ट्रीय-निदर्शन-अवीक्षण संस्था ने वास्तव में ११११ गाँवों का ही अवीक्षण किया। इस प्रकार प्राप्त सामग्री का प्रकाशन किया जा चुका है।

यह संस्था भारतीय समंकों की एक बहुत बड़ी कमी को पूरा कर रही है, दैवनिदर्शन की रीति से कम समय तथा कम व्यय करके ही विभिन्न आर्थिक समस्याओं के बारे में समंक संग्रहित किए जा रहे हैं ताकि देश की आर्थिक योजनाएँ समंकों के अभाव के कारण किसी प्रकार की कठिनाई का अनुभव न करें। यह आशा की जा सकती है कि भविष्य में हमें बहुत से ऐसे विषयों पर आसानी से समंक प्राप्त हो सकेंगे जिनके बारे में इस समय हमारे पास किसी प्रकार की सांख्यिकीय सामग्री नहीं है।

अध्याय २३

भारत में समंकों की सामान्य कमियाँ

(General Shortcomings of Indian Statistics)

भारत में सांख्यकीय सामग्री की कमियाँ सर्वतोमुखी हैं। पिछले अनुच्छेदों में दिए गए विवरण में प्रत्येक शीर्षक के अन्तर्गत यह कहा गया है कि उपलब्ध समंक अपरिशुद्ध, अप्रामाणिक, अपर्याप्त, अपूर्ण और असंगत हैं। ये तो भारतीय समंकों की मुख्य कमियाँ हुईं। इसके अतिरिक्त **सामग्री के संग्रहण में और उसे प्रस्तुत करने में किसी प्रकार का समन्वय नहीं है। प्रकाशित सामग्री स्वयं अपने को स्पष्ट नहीं करती। सामग्री के प्रकाशन में भी अनावश्यक देरी की जाती है।**

जहाँ तक अपरिशुद्धता का प्रश्न है, यह मुख्यतः कृषि सम्बन्धी समंकों के लिए सही है। जैसे कृषि समंकों के अन्तर्गत बताया गया है, प्रायः प्रत्येक राज्य में ये समंक ऐसे लोगों के द्वारा जमा किए जाते हैं जो अन्य कार्यों के भार के कारण सामग्री संग्रहण में कोई दिलचस्पी नहीं रखते। समंक भेजने में ऐसा माना जाता है कि, ये न केवल ढील-ढाल ही करते हैं, बल्कि, साथ ही साथ, स्वयं उस स्थान पर जाकर तथ्यों का अध्ययन नहीं करते और अनुमान से समंकों को भेज देते हैं। ये सांख्यिकीय रीतियों से अपरिचित रहते हैं, इसलिए ये उचित रूप से समंक संग्रहण नहीं करते, इन कारणों की वजह से भारतीय समंक अप्रमाणिक भी हैं। इसके अतिरिक्त समंकों की अपरिशुद्धता का कारण ऐसी रीतियों का उपयोग करना भी है जिनमें अभिनति की बहुत गुंजाइश रहती है। आजकल इस बात के प्रयत्न किए जा रहे हैं कि अपरिशुद्धता के इन स्रोतों को हटा दिया जाय। पर अब भी कई राज्यों में (वस्तुतः भाग क राज्यों को छोड़ कर लगभग सब में) ये दोष विद्यमान हैं। जीवन समंकों में तो अभी बहुत अधिक सुधार करने की आवश्यकता है।

सामग्री की अपर्याप्तता भी भारतीय समंकों का मुख्य दोष है। सामग्री की अपर्याप्तता का उपयोग दो अर्थों में किया जा सकता है। एक, किसी विषय-विशेष के सम्बन्ध में कोई सामग्री उपलब्ध न हो, दूसरे, किसी विषय के किसी भाग के बारे में समंक उपलब्ध न हो। भारत में दोनों प्रकार की अपर्याप्तता है। अपर्याप्तता के सम्बन्ध में

'इकॉनॉमिक् एन्क्वाइरी कमीटी' (Economic Enquiry Committee) ने १९२५ में तीन प्रमुख विषयों सम्बन्धी समंकों को रखा था। ये निम्नलिखित हैं :

(१) उत्पादन के अतिरिक्त अन्य समंक जो वित्त, जनसंख्या, व्यवसाय, यातायात संवाहन, शिक्षा, जीवन-समंक और प्रवास से सम्बन्धित हैं।

(२) उत्पादन के समंक जो कृषि, चरागाह, डेरीफार्मिंग, वन, मछली उद्योग, खनिज-पदार्थों, बड़े पैमाने के उद्योगों, घरेलू उद्योग-धंधों और छोटे-पैमाने के उद्योगों के सम्बन्ध में हैं।

(३) आय, धन (wealth) निर्वाह-व्यय, कर्जदारी, मजदूरी और मूल्य आदि आगगन से सम्बन्धित हैं।

कमेटी के अनुसार पहले भाग के समंक अधिकांशतः पर्याप्त हैं। दूसरे के समंक कुछ मामलों में तो पर्याप्त हैं, कुछ में अपर्याप्त और कुछ में पूर्णतः असन्तोषजनक हैं और तीसरे प्रकार के समंकों को प्राप्त करने के लिए कोई सन्तोषजनक प्रयत्न नहीं किया गया है।

यह मानना पड़ेगा कि १९२५ के बाद इस दिशा में प्रयत्न किया गया है और समंकों की पर्याप्तता पर ध्यान दिया गया है। पर विषय की महत्ता (magnitued) और उसके महत्व और विस्तार को देखते हुये ये प्रयत्न नगण्य हैं। अब भी भारत में तीसरे विषय सम्बन्धी समंक उस परिमाण में उपलब्ध नहीं हैं जिसमें उनकी आवश्यकता है।

भारतीय समंक न केवल इस मामले में अपूर्ण हैं कि वे भारत के सब स्थानों से सम्बन्धित सूचना नहीं देते हैं, बल्कि, साथ ही साथ, इस मामले में भी अपूर्ण हैं कि इनसे किसी भी विषय के बारे में पूरी सूचना नहीं मिलती। स्वतंत्रता के पूर्व पहली प्रकार की अपूर्णता का कारण यह था देश के दो भाग—ब्रिटिश भारत और देशी राज्य थे। स्वतन्त्रता के बाद इस बात की ओर यथेष्ट ध्यान दिया गया है और लगभग सब राज्यों के बारे में समंक कुछ हद तक उपलब्ध हैं। इस अपूर्णता का एक कारण यह है कि अब तक विषयों की परिभाषा, क्षेत्र और स्वभाव के बारे में एकमतता नहीं आई है। प्रायः समंकों का नई परिभाषा और क्षेत्र के अनुसार संग्रहण किया जाता है, इस कारण तुलना योग्य नहीं रह पाते, और समंक समय के अर्थ में भी अपूर्ण हो जाते हैं। पहले किसी समन्वयकारिणी (co-ordinating) संस्था के अभाव की वजह से सामग्री प्रायः असंगत (inconsistent) होती थी। आजकल इसके लिए पूर्ण प्रयास किए जा रहे हैं और आशा है कि उनके परिणाम शीघ्र उपलब्ध हो जायेंगे।

प्रकाशित समंकों की अस्पष्टता भी उनका मुख्य दोष है। जैसा पहले बताया जा चुका है, सामग्री इस प्रकार प्रस्तुत की जानी चाहिये कि वह अपनी व्याख्या स्वयं कर

दे। पर भारतीय समंकों को उचित रीति से प्रस्तुत नहीं किया जा रहा है। अतएव उनके क्षेत्र की परिभाषाएँ, संकलन की रीतियाँ, और उनकी परिसीमाएँ ठीक-ठीक ज्ञात नहीं हो पाती हैं। इस कमी को दूर करने के लिए कुछ समय से भारत सरकार द्वारा 'गाइड टु करेन्ट ऑफीशियल स्टैटिसटिक्स (Guide to Current Official Statistics) प्रकाशित किये गए हैं। इसके अतिरिक्त आजकल प्रायः सब सांख्यिकीय प्रकाशन परिशिष्ट में समंकों के क्षेत्र, उनकी परिभाषाएँ, और उनकी परिसीमाओं के बारे में आवश्यक सूचना देते हैं।

समंकों के प्रकाशन में होने वाली देरी केवल लापरवाही का परिणाम है। प्रायः यह देखा गया है कि समंकों का प्रकाशन तब होता है जब उनकी व्यावहारिक उपयोगिता बिल्कुल समाप्त हो जाती हैं और उनमें केवल भूत काल की अवस्था के समंक होने के कारण ही दिलचस्पी ली जा सकती है। प्रकाशन में होने वाली देरी का एक कारण तो यह है कि प्रश्नावलियों के उत्तर या अन्य सांख्यिकीय प्रतिवेदनों (reports) को भजने में बहुधा लापरवाही के कारण अनावश्यक देरी कर दी जाती है। इसलिए उनका देर में प्रकाशित होना स्वाभाविक ही है। पर प्रकाशन में और अधिक देरी होने का कारण सरकारी विभागों द्वारा की जाने वाली देरी है। इस बात का हमेशा ध्यान रखना चाहिए कि अगर समंकों का प्रकाशन बहुत देरी से किया गया तो वे व्यावहारिक उपयोग के लिए व्यर्थ हो जाते हैं और इसलिए अपने उद्देश्य को पूरा करने में सफल नहीं हो पाते। सरकारों की ओर से समंकों का शीघ्रातिशीघ्र प्रकाशन करने की व्यवस्था की जा चुकी है और की जा रही है। यह आशा की जा सकती है कि कुछ समय बाद प्रकाशन में बिल्कुल भी देरी नहीं होगी।

प्रश्नावली

(१) १९५१ की जनगणना पर एक संक्षिप्त आलोचनात्मक टिप्पणी लिखिये :

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९५२)

(२) जनगणना के उद्देश्य का वर्णन कीजिए। (बी० ए०, आगरा, १९३०)

(३) 'इंडियन सेन्सस रिपोर्ट' (Indian Census Report) में विभ्रम के मुख्य स्रोतों को बतलाइए और भविष्य में इन विभ्रमों को दूर करने की रीतियों का सुझाव भी दीजिए। (बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९३३)

(४) जनगणना प्रतिवेदनों (census reports) के उत्पादकों, निर्माणकर्ताओं और व्यापारियों के लिए संभव महत्व (possible value) पर विचार कीजिए। भारतीय जनगणना प्रतिवेदनों (Indian Census reports) को इन लोगों के लिए अधिक उपयोगी किस प्रकार बनाया जा सकता है ?

(बी० काम०, नागपुर, १९४५)

(५) 'भारत में उपलब्ध कृषि-समंक निम्नलिखित बातों में अपूर्ण और अपर्याप्त हैं : (क) सूचना देने वाले प्रदेशों के लिए क्षेत्र और उत्पादन सम्बन्धी सामग्री प्राप्त नहीं है, (ख) स्थायी बन्दोबस्त वाले प्रदेशों से सम्बन्धित सूचना सन्तोषजनक नहीं है, और (ग) उत्पत्ति-अंकों की परिशुद्धता-स्तर में अभी बहुत कुछ करना है।'

प्रत्येक दिशा में सुधारों के लिए सुझाव देते हुए इस कथन की टीका करिये।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९५१)

(६) भारतीय औद्योगिक समंकों के स्वभाव और क्षेत्र पर एक स्पष्ट नोट लिखिए। (बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९५३)

(७) भारत में निम्नलिखित विषयों के सम्बन्ध में क्या सूचना उपलब्ध हैं :

(क) आयात और निर्यात (ख) मूल्य, (ग) कृषि-समंक।

इनकी यथेष्टता की परीक्षा करिये।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९५३)

(८) भारतीय जनसंख्या समंकों के मुख्य लक्षणों पर विचार कीजिए। इनको अधिक प्रामाणिक और उपयोगी बनाने के लिए आप क्या सुझाव देंगे ?

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९५१)

(९) १९५१ की भारतीय जनगणना की रीति के दोषों पर विचार कीजिए। आप इसमें क्या सुधार करेंगे ? (एम० ए०, इलाहाबाद, १९५२)

(१०) भारत में कृषि-समंक किस प्रकार संग्रहित और संकलित किए जाते हैं ? सुधार के लिये सुझाव दीजिए। (एम० ए०, इलाहाबाद, १९५३)

(११) भारत में निम्नलिखित विषयों पर उपलब्ध सांख्यिकीय सूचना पर एक आलोचनात्मक नोट लिखिए।

(क) वाणिज्य-फसलें। (ख) आयात और निर्यात। (ग) औद्योगिक उत्पादन। (घ) अन्तर्देशीय व्यवसाय। (ङ०) जीवन-समंक।

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९५४)

(१२) कालिक समंकों का क्या महत्व है। ये भारत में कहाँ तक उपलब्ध हैं ?

(एम० ए०, इलाहाबाद,)

(१३) कृषि-उत्पत्ति के कुशल विपणन के लिये यह आवश्यक है कि क्रेता और विक्रेता, दोनों के पास परिशुद्ध और पर्याप्त उत्पादन सम्बन्धी, समंक, उत्पत्ति के चलन (movement) सम्बन्धी समंक, और विभिन्न बाजारों में प्रचलित मूल्य सम्बन्धी समंक बिना काल-विलम्बना (time-lag) के रहें। कृषि-विपणन-समंक कहाँ तक इसे सन्तुष्ट करते हैं। इसके सुधार के लिए उपायों का सुझाव दीजिए।

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९५१)

(१४) निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए :

(क) भारत की राष्ट्रीय आय। (ख) १९५१ की भारतीय जनगणना। (ग) भारतीय फसल-पूर्वानुमान। (एम० ए०, इलाहाबाद, १९५१)

(१५) हाल में भारत की राष्ट्रीय-आय की गणना करने की रीति पर संक्षेप में विचार करिये। इसमें किन कठिनाइयों का अनुभव करना पड़ा।

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९५३)

(१६) उत्पादन-संगणना का क्या अर्थ है ? ऐसी संगणना क्यों की जाती है ? इस संगणना को भारत में करने के दृष्टिकोण से औद्योगिक-समंक अधिनियम कहाँ तक पर्याप्त है ? (एम० कॉम०, इलाहाबाद)

(१७) मूल्य समंकों के महत्व की व्याख्या करिये और भारत में इस सम्बन्ध में उपलब्ध सामग्री के स्वभाव और क्षेत्र की परीक्षा कीजिए।

(एम० काम०, इलाहाबाद, १९४७)

(१८) भारत में राष्ट्रीय-आय आगणन की क्या विशेष समस्याएं हैं ? भारत की आय के गणना करने में काम में लाई जाने वाली रीतियों का संक्षेप में वर्णन करिये।

(एम० काम०, इलाहाबाद, १९५२)

(१९) निर्माण-उद्योगों की संगणना पर विस्तार पूर्वक लिखिए।

(२०) भारत में पैदावार समंकों की गणना करने की रीतियाँ दीजिए। इनके लाभ और इनकी हानियाँ भी बतलाइए।

(२१) राष्ट्रीय-निदर्शन-अधीक्षण (National Sample Survey) के बारे में आप क्या जानते हैं ? संक्षिप्त विवरण दीजिए।

सांख्यिकीय शब्दावली

इस शब्दावली में हिन्दी पर्यायवाची शब्द अधिकतर वही हैं जो आचार्य रघुवीर, आचार्य अबोलिया तथा आचार्य वल्दुआ ने वर्धा से प्रकाशित 'सांख्यिकी-शब्दकोष' में दिये हैं।

Abnormal	असामान्य
Abscissa	भुज
Absolute	अचल, निरपेक्ष, प्रकेवल, परम
Accuracy	परिशुद्धता
Actual	वास्तविक, तथा भूत
Addition	संकलन, योग
Aggregate	समूह
Antilogarithm	प्रतिच्छेदा
Appendix	परिशिष्ट
Applied	व्यावहारिक
Approximation	उपसदन, उपसादन
Arithmetical progression	समान्तर वृद्धि
Arrange	विन्यसन
Array	अनुविन्यसन
Ascending	आरोही
Association	सम्बन्ध
Association of attributes	गुण-सम्बन्ध
Assumed	कल्पित
Asymmetrical	विषम, असंमितीय
Asymmetry	असम्मिति
Attributes	गुण
Average	माध्य
Arithmetic a.	समान्तर माध्य
Assumed a.	कल्पित-माध्य
A. deviation	माध्य-विचलन

A. error	माध्य-विभ्रम
A. of ratio	मूल्यानुपात-माध्य
A. value	माध्य-अर्हा
Descriptive a.	वर्णनात्मक माध्य
Geometric a.	गुणोत्तर-माध्य
Harmonic a.	हरात्मक माध्य
Moving a.	चल-माध्य
Progressive a.	प्रगामी माध्य
Typical a.	प्रारूपिक माध्य
Weighted a.	भारित माध्य
Axis	अक्ष
Bar diagram	दण्ड-चित्र
Component b.	घटक दण्ड
Composite b.	संग्रथित दण्ड
Horizontal b.	क्षैतिज दण्ड
Multiple b.	बहुगुण दण्ड
Percentage b.	प्रतिशतता-दण्ड
Simple b.	एकी दण्ड, सरल दण्ड
Sub-divided b.	अन्तर्विभक्त-दण्ड
Vertical b.	उदग्र दण्ड
Base	आधार
B. line	आधार रेखा
False b. line	कूट आधार-रेखा
Zero b. line	शून्य आधार-रेखा
Basic	आधार भूत
Bell-shaped curve	घंटाकार वक्र
Best fit, line of	उत्तम अन्वा युक्त रेखा
Bias	अभिनति (पक्षपात)
Biassed	अभिनत
B. error	अभिनत विभ्रम
B. selection	अभिनत प्रवरण
Binomial	द्विपद

B. distribution	द्विपद बंटन
B. theorem	द्विपद प्रमेय
Business statistics	व्यापार सांख्यिकी
Calculate	गणन
Calculation	गणना
Cause and effect	कारण तथा प्रभाव
Census	संगणना-गणना
C. of population	जन-गणना
C. of production	उत्पाद-गणना
Chain	शृंखला
C. base	शृंखला-आधार
C. relative	शृंखला-मूल्यानुपात
C. rule	शृंखला-नियम
Chance selection	दैव-प्रवरण
Characteristics	लक्षण
Descriptive c.	वर्णनात्मक लक्षण
Numerical c.	सांख्य लक्षण, अंकात्मक लक्षण
Characteristics (of logarithms)	पूर्णांश
Chart	चित्र
Ratio c.	अनुपात-चित्र
Simple c.	सरल चित्र (अननुपात-चित्र)
Circular	वृत्ताकार
Class	वर्ग
C. frequency	वर्ग-बारंबारता
C. interval	वर्गान्तर
C. limits	वर्ग-सीमा
C. magnitude	वर्ग-विस्तार
Classification	वर्गीकरण
C. according to attributes	गुणानुसार वर्गीकरण
C. according to class intervals	वर्गान्तरानुसार वर्गीकरण
C. according to dichotomy	द्वन्द्व-भाजन-वर्गीकरण

C. of data	सामग्री वर्गीकरण
Co-efficient	गुणक
C. of association	सम्बन्ध-गुणक
C. of concurrent deviation	संगामी विचलन गुणक
C. of correlation	सहसम्बन्ध गुणक
C. of deviation	विचलन गुणक
C. of skewness	विषमता -गुणक
C. of variation	विचरण-गुणक
Collection	संग्रहण
Component	अंग, संघटक,
Computation	संगणन
Conclusion	परिणाम
Concrete	मूर्त, यथार्थ,
Concurrent	संगामी
C. deviation	संगामी विचलन
Consecutive	अनुगामी
Continuous series	संतत माला, संतत श्रेणी
Co-ordinate, co-ordination	समन्वय
Corrected	संशोधित
C. death rate	संशोधित मृत्यु-अर्घ
Correlation	सहसम्बन्ध
Co-efficient of c.	सहसम्बन्ध-गुणक
Cumulative	संचयी
C. frequency	संचयी वारंवारता
C. error	संचयी विभ्रम
Curve	वक्र
J-shape c.	विषमवाहु वक्र
Lorenz c.	अपकिरण-वक्र
Ogive c. = cumulative frequency c.	संचयी-वारंवारता वक्र
Cylic	चक्रीय
Cyclical fluctuations	चक्रीय उच्चावचन

Data	सामग्री, संमक
Homogeneity of d.	सामग्री सजातियता
Primary d.	प्राथमिक सामग्री
Representative d.	प्रतिनिधि-सामग्री
Secondary d.	द्वितीयक सामग्री
Suitability of d.	सामग्री-अनुरूपता
Stability of d.	सामग्री-स्थायित्व
Uniformity of d.	सामग्री-सारूप्यता
Death-rate	मृत्यु अर्घ
Degree	घात, परिणाम, अंश
D. of accuracy	परिशुद्धता-परिमाण
Descriptive average	वर्णनात्मक माध्य
Deviation	विचलन
Absolute measure of d.	निरपेक्ष विचलन-माप
Average d.	माध्य-विचलन
Co-efficient of d.	विचलन-गुणक
Co-efficient of mean d.	मध्यक विचलन गुणक
Co-efficient of quartile d.	चतुर्थक विचलन गुणक
Co-efficient of standard d.	प्रमाप विचलन गुणक
Mean d.	मध्यक विचलन
Quartile d.	चतुर्थक विचलन
Standard d.	प्रमाप विचलन
Diagram	चित्र
Bar d.	दण्ड-चित्र
Block d.	इष्टका-चित्र
Circular d.	वर्तुल चित्र
Linear d.	रेखीय चित्र
Rectangular d.	आयत-चित्र
Scatter d.	विक्षेप चित्र
Square d.	वर्ग-चित्र
Subdivided d.	अन्तर्विभक्त चित्र
Discrete = Broken	खंडित

D. series = broken series	खंडित माला
Dispersion	अपकिरण
Absolute d.	निरपेक्ष अपकिरण
Co-efficient of d.	अपकिरण गुणक
Distribution	वंटन
Enquiry = investigation	अनुसंधान
Enumeration	प्रगणना
Enumerate	प्रगणन
Enumerator	प्रगणक
Error	विभ्रम
Absolute e.	निरपेक्ष-विभ्रम
Biassed e.	अभिनत-विभ्रम
Cumulative e.	संचयी विभ्रम
E. of inadequacy	अपर्याप्तता विभ्रम
E. of manipulation	प्रहस्तन विभ्रम
E. of omission	लोप-विभ्रम
E. of origin	मूल-विभ्रम
Probable e.	सम्भाव्य विभ्रम
Relative e.	सापेक्ष विभ्रम
Unbiassed e.	अनभिनत विभ्रम
Estimate, estimates	आगणन (अनुमान)
Extent	वितति
Extrapolation (Maths.)	बाह्यगणन
Extreme	चरमसीमा
Factor	खंड
Fallacious	भ्रांतिकारी
F. conclusions	भ्रांतिकारी परिणाम
Finite	परिमित
F. differences	परिमित अन्तर
Fitting, fit	अन्वायोजन
Curve f.	वक्र-अन्वायोजन
Fixed	स्थिर

F. base	स्थिर आधार
Fluctuations	उच्चावचन
Abnormal f.	असामान्य उच्चावचन
Accidental f.	आकस्मिक उच्चावचन
Cyclical f.	अनियमी उच्चावचन
Long term f.	दीर्घकालीन उच्चावचन
Normal f.	सामान्य उच्चावचन
Regular f.	नियमी उच्चावचन
Seasonal f.	आर्तव उच्चावचन
Short term f.	लघुकालीन उच्चावचन
Forecasting	पूर्वानुमान
Formula	सूत्र
Frequency	वारंवारता
Cumulative f.	संचयी वारंवारता
Cumulative f. curve	संचयी-वारंवारता-वक्र
Cumulative f. table	संचयी वारंवारता सारणी
F. curve	वारंवारता वक्र
F. diagram	वारंवारता चित्र
F. distribution	वारंवारता वंटन
F. polygon	वारंवारता बहुभुज
F. table	वारंवारता सारणी
Generalization	सामान्यकरण
Geometric=geometrical	रैखिकीय
G. mean	गुणोत्तर मध्यक
Graduate, graduation (Smoothing of curve)	प्रसरलन
Graph	बिन्दुरेखा
Graphic	बिन्दुरेखीय
Graphic method	बिन्दुरेखीय विधि
Grouped series	वर्गित माला
Groups	वर्ग
Harmonic mean	हरात्मक मध्यक

Heterogeneous	विजातीय
Histogram (frequency diagram)	वारंवारता-चित्र
Historical	कालिक
H. analysis	कालिक विश्लेपण
Historigram	कालिक चित्र
Homogeneity	सजातीयता
Homogeneous	सजातीय
Inaccuracy	अपरिशुद्धता
Inaccurate	अयथार्थ, अपरिशुद्ध
Inclusive method	समावेश रीति
Index-numbers	देशनांक
Cost of living i.	निर्वाह-व्यय-देशनांक
I. of prices	मूल्य देशनाँक
Indices (index number)	देशनांक
I. of business conditions	व्यापारावस्था -देशनांक
I. of industrial activity	उद्योग-कर्मण्यता-देशनांक
I. of production	उत्पादन-देशनांक
Indirect	अप्रत्यक्ष
I. oral method	अप्रत्यक्ष मौखिक रीति
Inertia of large numbers	महांक-जड़ता
Inquiry=investigation	अनुसंधान
Census i.	संगणना-अनुसन्धान
Direct i.	प्रत्यक्ष-अनुसन्धान
Original i.	मौलिक अनुसन्धान
Repetitive i.	पुनरावर्ती अनुसन्धान
Sample i.	निदर्शन-अनुसन्धान
Interpolation	आन्तर-गणन
Interpretation	निर्वचन
I. of data	सामग्री-निर्वचन
Unit of i.	निर्वचन-एकक
Interval	अन्तर

Class i.	वर्गान्तर (वर्ग-अन्तर)
Investigation	अनुसन्धान
Direct personal i.	प्रत्यक्ष-स्वयं अनुसन्धान
Extensive i.	विस्तृत अनुसन्धान
Field i.	क्षेत्र-अनुसन्धान
Indirect oral i.	अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान
Intensive i.	गहन अनुसंधान
Irregular	अनियमी
Item	पद
Lag	विलम्बना
Law = rule	नियम
L. of inertia of large numbers	महांक जड़ता नियम
L. of probability	संभाविता नियम
L. of statistical regularity	सांख्यिकीय-नियमितता-नियम
Statistical l.	सांख्यिकीय नियम
Leading difference	प्रमुख अन्तर
Least square, method of	अल्पतम-वर्ग-रीति
Limitation	परिसीमा
Line	रेखा
L. of best fit	उत्तम-अन्वायोजन रेखा
L. of equal proportional variation	समानुपाती-विचरण रेखा
Link relatives	शृंखला-मूल्यानुपात
Logarithm	छेदा, लघुगणक
Logarithmic series	छेदा-माला
Long	दीर्घ
L. term fluctuations	दीर्घ कालीन उच्चावचन
Lower quartile (first quartile)	अवर चतुर्थक (प्रथम चतुर्थक)
magnitude	महत्ता, विस्तार
M. of class interval	वर्गान्तर-विस्तार
Manifold	वहुगुणक

M. classification	बहुगुणक वर्गीकरण
M. tabulation	बहुगुणक सारणीयन
Mean	मध्यक
Arithmetic m.	समान्तर मध्यक
Geometric m.	गुणोत्तर मध्यक
Harmonic m.	हरात्मक मध्यक
M. deviation	मध्यक विचलन
M. error	मध्यक विभ्रम
M. logarithm	मध्यक छेदा
Measure	माप
M. of dispersion	अपकिरण-माप
M. of skewness	विषमता-माप
Median	मध्यका
Mode	भूयिष्टक
Negative	नास्ति, विलोम, ऋण
N. correlation	विलोम सहसम्बन्ध
Normal	प्रसामान्य
N. distribution	प्रसामान्य वंटन
N. fluctuations	प्रसामान्य उच्चावचन
N. frequency curve	प्रसामान्य वारंवारता वक्र
Number	संख्या
Numerator	अंश
Numerical	संख्यात्मक, अंक
N. data	अंक-सामग्री
Official statistics	राजकीय समंक
Ogive curve	संचयी वारंवारता वक्र
Opposite	विपरीत
Origin	मूल बिन्दु
Oscillations	प्रदोल
Long term o.	दीर्घकालीन प्रदोल
Short term o.	लघुकालीन प्रदोल
Parabola	एकेन्द्र

Parabolic curve	एकेन्द्र वक्र
Parallel	समानान्तर
Pair	युग्म, द्वय
Per annum	प्रति वर्ष
Per cent	प्रतिशत
Percentage	प्रतिशतता
P. deviation	प्रतिशतता-विचलन
P. distribution	प्रतिशतता-वंटन
P. error	प्रतिशतता-विभ्रम
Percentile 100th part	शततमक
Periodic, periodical	आवर्तिक
Pictogram	चित्र लेख
Plotting	प्रांकण
P. the data	सामग्री प्रांकण
Polygon	बहुभुज
Population	जन-संख्या
Positive	अनुलोमवन
P. correlation	धनात्मक सहसम्बन्ध
P. skewness	अनुलोम विषमता
Power	घात
Precise	सुतथ्य, यथार्थतम
Preciseness=precision	सुतथ्यता
Primary data	प्राथमिक सामग्री
Probability	संभाविता
Progressive average	प्रगामी माध्य
Proportion	अनुपात
Proportional	अनुपाती
Quantitative	इयत्तात्मक, परिमाणात्मक
Quarterly	त्रैमासिक
Quartile	चतुर्थक
First q=lower q.	प्रथम चतुर्थक, अवर चतुर्थक
q. deviation	चतुर्थक विचलन

third q. upper q.	तृतीय चतुर्थक, उत्तर चतुर्थक
Questionnaire	प्रश्नावली
Quotient	लब्धि, भागफल
Radius	अर, त्रिज्या, अर्ध-व्यास
Random sampling	दैव निदर्शन
Rate	अर्घ
Birth r.	जन्म-अर्घ
Death r.	मृत्यु-अर्घ
Ratio	निष्पति, अनुपात
R. of variation	विचरण-अनुपात
Ratio scale	अनुपात माप श्रेणी
Ratios = price relative	मूल्यानुपात
Reciprocal	व्युत्क्रम
Relative	सापेक्ष
R. change	सापेक्ष परिवर्तन
R. deviation	सापेक्ष विचलन
R. dispersion	सापेक्ष अपकिरण
R. error	सापेक्ष विभ्रम
Relatives = price r.	मूल्यानुपात
Chain r. = link r.	श्रृंखला मूल्यानुपात
Representative data	प्रतिनिधि-सामग्री
Respectively	क्रमश:
Reversible	उत्क्राम्य
Rule = law (in science)	नियम
Sample	निदर्शन
S. enquiry	निदर्शन-अनुसन्धान
Sampling	निदर्शन
Scatter diagram	विक्षेप-चित्र
Schedule	अनुसूची
Seasonal	आर्त्तव
S. fluctuations	आर्त्तव-उच्चावचन
S. variations	आर्त्तव विचरण

Secondary data	द्वितीयक सामग्री
Series	माला, श्रेणी
Short cut method	लघुरीति
Similar	समरूप
Similarity	समरूपता
Skewness	विषमता, वैषम्य
Standard	प्रमाप
Co-efficient of s. deviation	प्रमाप विचलन गुणक
S. deviation	प्रमाप विचलन
S. of accuracy	परिशुद्धता प्रमाप
Standardized death rate	प्रमापित मृत्यु अर्व
Statement	आवेदन
Statistician	सांख्यिक
Statistics (science)	सांख्यिकी
Statistics (collection of figures)	संमक
Applied s.	व्यावहारिक सांख्यिकी
Distrust of s.	सांख्यिकी-अविश्वास
Sub-divided bar diagram	अन्तर्विभक्त दण्ड चित्र
Symmetrical	संमितीय, संमित
Table	सारणी
Frequency t.	वारंवारता-सारणी
Tabulation	सारणीयन
Complex t.	जटिल सारणीयन
Double t.	द्विगुण सारणीयन
Manifold t.	बहुगुण सारणीयन
Simple t.	सरल सारणीयन
Single t.	एकगुण सारणीयन
Treble t.	त्रिगुण सारणीयन
Theorem	प्रमेय
Theory of probability	संभावित नियम
Time	काल

T. series	कालमाला, काल-श्रेणी
Trend	उपनति, प्रवृत्ति
Long period t.	दीर्घकालीन प्रवृत्ति (उपनति)
Seasonal t.	आर्तव प्रवृत्ति (उपनति)
Secular t.	सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति
Unbiassed error	अनभिनत विभ्रम
Unit	एकक, इकाई
Universe (population entire group)	समग्र
Unweighted	अभारित
Upper quartile (third quartile	उत्तर चतुर्थक (तृतीय चतुर्थक)
'U' shape curve	ऊर्ध्व-बाहु वक्र
Value	अर्हा, मूल्य, मान,
Variables	चल
Variation	विचरण
Ratio of v.	विचरण-अनुपात
Weight	भार
Weighted	भारित
W. average	भारित माध्य
W. geometric mean	भारित गुणोत्तर-मध्यक
W. index numbers	भारित देशनांक
Whole-sale prices index numbers	बहुशोमूल्य देशनांक
zero	शून्य
zone	कटिबन्ध

लघुगणकों (Logarithms) का उपयोग

अनुपातों तथा प्रतिशतताओं की भांति छेदा अथवा लघुगणक भी सापेक्ष (relative) अध्ययन में सहायता करते हैं। गणितीय गणनाओं में छेदा लघु-गणक का (short-cuts) कार्य करते हैं। इनकी सहायता से छोटी एवं बड़ी संख्याओं के गुणन, भाजन प्रमाणों (ratio) और घातों (powers) की गणना आसान हो जाती है।

छेदा की साधारण विधि १० पर आधारित है। किसी संख्या का छेदा उसका वह बीजगणितीत अंक (exponent) है जिससे कि उस संख्या के बराबर हो जाने के लिए १० बढ़ाया जाता है। निम्न उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी :—

$१,००,००० = १०^{५}$	अत:	१,००,००० का छेदा	=	५
$१०,००० = १०^{४}$	"	१०,००० " "	=	४
$१,००० = १०^{३}$	"	१,००० " "	=	३
$१०० = १०^{२}$	"	१०० " "	=	२
$१० = १०^{१}$	"	१० " "	=	१
$१ = १०^{०}$	"	१ " "	=	०
$·१ = १०^{-१}$	"	·१ " "	=	–१
$·०१ = १०^{-२}$	"	·०१ " "	=	–२
$·००१ = १०^{-३}$	"	·००१ " "	=	–३
$·०००१ = १०^{-४}$	"	·०००१ " "	=	–४
$·००००१ = १०^{-५}$	"	·००००१ " "	=	–५

उपरोक्त अंकों के छेदा सब पूर्णांक हैं। १० का छेदा १ और १०० का छेदा २ है। १० और १०० की बीच की सभी संख्याओं के लिए छेदा १ और २ के बीच होगा। इसी प्रकार ·०१ से ऊपर और १ से नीचे की संख्याओं का छेदा –२ और –१ के बीच होगा।

पूर्णांश तथा दशमिकांश (Characteristics and Mantissa)

१०, १००, १००० आदि संख्याओं को छोड़कर अन्य सभी संख्याओं के छेदा में पूर्णांक और भिन्न (fraction) होंगे। अत: किसी संख्या के छेदा में दो भाग होते हैं :—

(अ) एक पूर्णांक जिसे पूर्णांश कहते हैं, यह धनात्मक अथवा ऋणात्मक (positiac negative) हो सकता है।

(ब) एक भिन्न भाग जिसे दशमिकांश कहते हैं। यह सदैव धनात्मक होता है।

पूर्णांश निकालने की रीतियाँ—पूर्णांश निकालने की दो रीतियाँ हैं :—

१–एक से अधिक संख्या का पूर्णांश, दशमलव स्थान से बाईं ओर के अंकों की संख्या से एक कम होता है। इस प्रकार २१४·४३ का पूर्णांश २ हुआ क्योंकि दशमलव स्थान से बाईं ओर के अंकों की संख्या ३ है: इसी प्रकार ४८२९७·३ का पूर्णांश ४ और ११·२ का १ और ७ का ० हुआ। १ का पूर्णांश भी ० ही होगा।

२–एक से कम संख्या का पूर्णांश, दशमलव स्थान के बाद और किसी महत्वपूर्ण संख्या से पूर्व के शून्य-अंकों की संख्या से एक अधिक होता है। इस प्रकार ·००३८०१ का पूर्णांश –३ हुआ क्योंकि दशमलव स्थान के बाद और एक महत्वपूर्ण संख्या से पूर्व शून्य-अंकों की संख्या २ है। इसी प्रकार ·०१०२ का पूर्णांश –२, ·०००१२ का पूर्णांश–४ और ·१८२ का –१ होगा।

दशमिकांश निकालने की रीतियाँ—किसी संख्या का दशमिकांश छेदा-सारिणी से देखा जाता है। दशमिकांश के सम्बन्ध में दो बातें ध्यान रखनी चाहिए :—

१–दशमिकांश सदैव धनात्मक होता है।

२–दशमलव विन्दु का प्रभाव दशमिकांश पर नहीं पड़ता।

संख्या ७८५, ७८·५, ७·८५, ·७८५, ·०७८५ और ·००७८५ का दशमिकांश एक ही होगा। छेदा सारणी में देखने से इनका दशमिकांश ·८९४९ मिलेगा। चूँकि १ से कम संख्याओं में पूर्णांश ऋणात्मक और दशमिकांश धनात्मक होता है इसलिए वियुत चिन्ह (minus sign) छेदा से पहले न लिखा जाकर पूर्णांश के उपर लिखा जाता है। इस प्रकार यदि पूर्णांश–२ और दशमिकांश ·८९४९ है तो छेदा–२·८९४९ न लिखा जाकर $\bar{२}$·८९४९ लिखा जायगा।

छेदा निकालना

इस प्रकार किसी संख्या का छेदा निकालने के लिए उपरोक्त रीति के अनुसार हमें सबसे पहले पूर्णांश लिख लेना चाहिए और फिर छेदा सारिणी देखकर दशमिकांश लिख लेना चाहिए। इस पुस्तक के अन्त में दी हुई छेदा-सारिणी केवल ३ अंकों की सारिणी है अतः ३ अंकों से अधिक का दशमिकांश निकालने के लिए उनको ३ अंक तक उपसदन (approximate) कर लेना चाहिए। निम्न उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी :—

६७८९·५	का छेदा	=	३·८३१९
६७८·९५	" "	=	२·८३१९
६७·८९५	" "	=	१·८३१९

६·७८९५ का छेदा	=	०·८३१९
·६७८९५ " "	=	$\bar{1}$·८३१९
·०६७८९५ " "	=	$\bar{2}$·८३१९
·००६७८९५ " "	=	$\bar{3}$·८३१९

प्रतिछेदा (Anti-logarithms)

जिस प्रकार छेदा सारिणी से किसी संख्या का छेदा देखा जा सकता है ठीक उसी प्रकार प्रति छेदा सारिणी से छेदा की संख्या देखी जा सकती है। किसी छेदा से उसकी संख्या ज्ञात करने के लिए केवल दशमिकांश का प्रयोग किया जाता है। प्रति-छेदा सारिणी में हम दशमिकांश अंक के सामने उसकी संख्या को देख सकते हैं। इसके पश्चात् पूर्णांश की सहायता से दशमलव बिन्दु अंकित किया जाता है। इस प्रकार यदि हमें एक संख्या देखनी है जिसका छेदा २·८७४ है तो हम प्रति छेदा सारिणी में ·८७४ दशमिकांश के सामने देखेंगे (·८७ किनारे पर और ४ ऊपर सिरे पर) इस प्रकार यह संख्या ७४८२ हुई। चूँकि संख्या का पूर्णांश २ है अतः संख्या में ३ अंक होने चाहिए। इसके अनुसार हम ८ के बाद दशमलव बिंदु अंकित करेंगे और संख्या जिसका छेदा २·८७४ है ऐसे ७४८·२ हुई। इसी प्रकार $\bar{2}$·८७४ का प्रति छेदा ·०७४८२ होगा। चूँकि पूर्णांश – २ है इसलिए दशमलव अंक के बाद और किसी महत्वपूर्ण अंक से पूर्व शून्य अंकों की संख्या एक होगी।

छेदा द्वारा संगणन (Computation)

संख्याओं को गुणा करना

दो संख्याओं को गुणा करने के लिए उनका छेदा निकालकर जोड़ दो और जोड़ का प्रतिछेदा निकालो। इस प्रकार अ × ब = प्र० छे० (छे० अ + छे० ब)

उदाहरण १

६४·७ को २९·८ से गुणा करो ?

(अ) छे० ६४·७	=	१·८१०९
(ब) छे० २९·८	=	१·४७४२
छे० (अ) + छे० (ब)	=	३·२८५१
३·२८५१ का प्र० छे०	=	१९२८
∴ ६४·७ × २९·८	=	१९२८

उदाहरण २

४९·३ को ·०८४२ से गुणा करो।

(अ) छे० ४९·३	=	१·६९२८
(ब) छे० ·०८४२	=	$\bar{2}$·९२५३
छे० अ + छे० ब	=	०·६१८१
०·६१८१ का प्र० छे०	=	४·१५०
∴ ४९·३ × ·८४२	=	४·१५०

टिप्पणी—दशमिकांश से पूर्णांश को जो कुछ ले जाया जाता है वह धनात्मक होता है और पूर्णांश को जोड़ने में युत एवं वियुत चिन्हों को काम में लाया जाता है। उपरोक्त उदाहरण में दशमिकांश से पूर्णांश को १ ले जाया गया है, यह धनात्मक है और जब इसको पहली संख्या के पूर्णांश में जोड़ा जाता है तो यह +२ हो जाता है; दूसरी संख्या का पूर्णांश $\bar{2}$ है और इसलिए पूर्णांश का योग ० हुआ।

उदाहरण ३

·०८४२ को ·००७४१ से गुणा करो।

(अ) छे० ·०८४२	=	$\bar{2}$·९२५३
(ब) छे० ·००७४२	=	$\bar{3}$·८६९८
छे० अ + छे० ब	=	$\bar{4}$·७९५१
$\bar{4}$·७९५१ का प्र० छे०	=	·०००६२३७
∴ ·०८४२ × ·००७४१	=	·०००६२३७

संख्याओं का विभाजन

एक संख्या को दूसरी संख्या से भाग देने के लिए भाज्य का छेदा निकालो और इसमें से भाजन का छेदा घटा दो। इस अन्तर का प्रतिछेदा निकालो। यही इच्छित उत्तर होगा।

$$\text{इस प्रकार } \frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \text{प्र० छे० (छे० अ} - \text{छे० ब)}$$

उदाहरण १

१९२८·१ को २९·८ से भाग दो

(अ) छे० १९२८·१	=	३·२८५६
(ब) छे० २९·८	=	१·४७४२
छे० अ − छे० ब	=	१·८११४
१·८११४ का प्र० छे०	=	६४·७१
∴ १९२८·१ ÷ २९·८	=	६४·७१

उदाहरण २

·०००९ को ·००८ से भाग दो ।

(अ) छे० ·०००९ = $\bar{4}$·९५४२

(ब) छे० ·००८ = $\bar{3}$·९०३१

छे० अ० — छे० ब = $\bar{1}$·०५११

$\bar{1}$·०५११ का प्र० छे० = ·११२५

∴ ·०००९ ÷ ·००८ = ·११२५

संख्या को घात (power) तक बढ़ाना

किसी संख्या को घात तक बढ़ाने के लिए संख्या के छेदा को घातांक से गुणा करो और फिर उसका प्र० छे० निकाल लो ।

इस प्रकार $अ^{स}$ = प्र० छे० (स × छे० अ)

उदाहरण १

$(९५·२)^{४}$ का मूल्य निकालो ।

छे० ९५·२ = १·९७८६

× ४

७·९१४४

७·९१४४ का प्र० छे० = ८२०४००००

∴ (९५·२) ४ = ८२०४००००

उदाहरण २

·०९९१ का घनफल निकालो ।

छे० ·०९९१ = $\bar{2}$·९९६११

× ३

$\bar{4}$·९८८५७

$\bar{4}$·९८८५७ का प्र० छे० = ·०००९७२७

∴ $(·०९९१)^{3}$ = ·०००९७२७

उपरोक्त दूसरे उदाहरण में दशमिकांश से पूर्णांश को २ ले जाया गया है और यह ३ और $\bar{2}$ के गुणनफल में से घटा दिया गया है । अतः फल $\bar{4}$ हुआ ।

संख्या का मूल (root) निकालना

किसी संख्या का मूल (root) निकालने के लिए संख्या के छेदा को मूल (root) के मान से भाग दे दो और भजनफल का प्रति-छेदा निकाल लो ।

इस प्रकार $\sqrt[\text{स}]{\text{अ}}$

$$= \text{प्र० छे०} \left(\frac{\text{छे० अ}}{\text{स}}\right)$$

उदाहरण १

$\sqrt[३]{१२\cdot४}$ का मूल्य निकालो ।

छे० १२·४	= १·०९५७
३ से भाग देने पर	$= \frac{१\cdot०९५७}{३} =$ ·३६५२
·३६५२ का प्र० छे०	= २·३१९
∴ $\sqrt[३]{१२\cdot४}$	= २·३१९

उदाहरण २

$\sqrt[७]{\cdot००४८७}$ का मूल्य निकालो ।

छे० ·००४८७ $= \overline{३}\cdot६८७५$

$\overline{३}\cdot६८७५$ को ७ से भाग देने के लिए हमें इसे $\overline{७}+४\cdot६८७५$ लिखना होगा क्योंकि $\overline{३}\cdot६८७५$ में पूर्णांश ऋणात्मक और दशमिकांश धनात्मक है और इससे भाग देना सम्भव नहीं ।

अतः—

$\overline{७}+४\cdot६८७५ \div ७ = \overline{१}\cdot६६९६$

$\overline{१}\cdot६६९६$ का प्र० छे० = ·४६७७

∴ $\sqrt[७]{\cdot००४८७}$ = ·४६७७

सांख्यिकीय गणनाओं में छेदा की उपयोगिता बहुत अधिक है। ये अनुपातिक परिवर्तनों का अध्ययन करने में सहायता करते हैं। १०, १०० का वही सापेक्ष परिमाण है जो कि १००, १००० का। निरपेक्ष (absolute)। अंकों में ये परिवर्तन भिन्न होते हैं परन्तु यदि हम उनका छेदा निकालें तो वे १० और १०० के लिए क्रमशः १ और २ होंगे; तथा १०० और १००० के लिए क्रमशः २ और ३ होंगे, जो यह बताते हैं कि दो दशाओं में सापेक्ष परिवर्तन समान है।

Logarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5 9 13	17 21 26	30 34 38
						0212	0253	0294	0334	0374	4 8 12	16 20 24	28 32 36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4 8 12	16 20 23	27 31 35
						0607	0645	0682	0719	0755	4 7 11	15 18 22	26 29 33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3 7 11	14 18 21	25 28 32
						0969	1004	1038	1072	1106	3 7 10	14 17 20	24 27 31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3 6 10	13 16 19	23 26 29
						1303	1335	1367	1399	1430	3 7 10	13 16 19	22 25 29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3 6 9	12 15 19	22 25 28
						1614	1644	1673	1703	1732	3 6 9	12 14 17	20 23 26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3 6 9	11 14 17	20 23 26
						1903	1931	1959	1987	2014	3 6 8	11 14 17	19 22 25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3 6 8	11 14 16	19 22 24
						2175	2201	2227	2253	2279	3 5 8	10 13 16	18 21 23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3 5 8	10 13 15	18 20 23
						2430	2455	2480	2504	2529	3 5 8	10 12 15	17 20 22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2 5 7	9 12 14	17 19 21
						2672	2695	2718	2742	2765	2 4 7	9 11 14	16 18 21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2 4 7	9 11 13	16 18 20
						2900	2923	2945	2967	2989	2 4 6	8 11 13	15 17 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1 3 4	6 7 8	10 11 12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1 3 4	5 6 8	9 10 12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1 2 3	4 5 5	6 7 8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1 2 3	4 4 5	6 7 8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8

Logarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1 2 2	3 4 5	5 6 7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1 2 2	3 4 5	5 6 7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1 2 2	3 4 5	5 6 7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1 1 2	3 4 4	5 6 7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1 1 2	3 4 4	5 6 7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1 1 2	3 4 4	5 6 6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1 1 2	3 4 4	5 6 6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1 1 2	3 3 4	5 6 6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1 1 2	3 3 4	5 5 6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1 1 2	3 3 4	5 5 6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1 1 2	3 3 4	5 5 6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1 1 2	3 3 4	5 5 6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1 1 2	3 3 4	5 5 6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1 1 2	3 3 4	4 5 6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1 1 2	2 3 4	4 5 6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1 1 2	2 3 4	4 5 6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1 1 2	2 3 4	4 5 5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1 1 2	2 3 4	4 5 5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1 1 2	2 3 4	4 5 5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1 1 2	2 3 4	4 5 5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1 1 2	2 3 3	4 5 5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1 1 2	2 3 3	4 5 5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1 1 2	2 3 3	4 4 5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1 1 2	2 3 3	4 4 5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1 1 2	2 3 3	4 4 5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1 1 2	2 3 3	4 4 5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1 1 2	2 3 3	4 4 5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1 1 2	2 3 3	4 4 5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1 1 2	2 3 3	4 4 5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1 1 2	2 3 3	4 4 5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1 1 2	2 3 3	4 4 5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1 1 2	2 3 3	4 4 5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0 1 1	2 2 3	3 4 4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0 1 1	2 2 3	3 4 4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0 1 1	2 2 3	3 4 4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0 1 1	2 2 3	3 4 4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0 1 1	2 2 3	3 4 4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0 1 1	2 2 3	3 4 4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0 1 1	2 2 3	3 4 4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0 1 1	2 2 3	3 4 4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0 1 1	2 2 3	3 4 4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0 1 1	2 2 3	3 4 4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0 1 1	2 2 3	3 4 4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0 1 1	2 2 3	3 4 4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0 1 1	2 2 3	3 3 4

Antilogarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0 0 1	1 1 1	2 2 2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0 1 1	1 1 2	2 2 2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0 1 1	1 1 2	2 2 3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0 1 1	1 2 2	2 2 3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0 1 1	1 2 2	2 2 3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0 1 1	1 2 2	2 3 3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0 1 1	1 2 2	3 3 3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0 1 1	1 2 2	3 3 3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0 1 1	2 2 2	3 3 3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0 1 1	2 2 2	3 3 3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0 1 1	2 2 2	3 3 4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0 1 1	2 2 3	3 3 4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0 1 1	2 2 3	3 3 4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0 1 1	2 2 3	3 4 4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1 1 2	2 3 3	4 4 5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1 1 2	2 3 3	4 5 5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1 1 2	2 3 4	4 5 5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1 1 2	2 3 4	4 5 5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1 1 2	2 3 4	4 5 6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1 1 2	3 3 4	4 5 6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1 1 2	3 3 4	4 5 6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1 1 2	3 3 4	5 5 6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1 1 2	3 4 4	5 6 6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1 1 2	3 4 4	5 6 6

Antilogarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

POWERS ROOTS AND RECIPROCALS

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1	1	3·162	2·154	4·642	1
2	4	8	1·414	1·260	4·472	2·714	5·848	·5000
3	9	27	1·732	1·442	5·477	3·107	6·694	·3333
4	16	64	2	1·587	6·325	3·420	7·368	·2500
5	25	125	2·236	1·710	7·071	3·684	7·937	·2000
6	36	216	2·449	1·817	7·746	3·915	8·434	·1667
7	49	343	2·646	1·913	8·367	4·121	8·879	·1429
8	64	512	2·828	2·000	8·944	4·309	9·283	·1250
9	81	729	3·000	2·080	9·487	4·481	9·655	·1111
10	100	1000	3·162	2·154	10·0	4·642	10·000	·1000
11	121	1331	3·317	2·224	10·488	4·791	10·323	·09091
12	144	1728	3·464	2·289	10·954	4·932	10·627	·08333
13	169	2197	3·606	2·351	11·402	5·066	10·914	·07692
14	196	2744	3·742	2·410	11·832	5·192	11·187	·07143
15	225	3375	3·873	2·466	12·247	5·313	11·447	·06667
16	256	4096	4·000	2·520	12·649	5·429	11·696	·06250
17	289	4913	4·123	2·571	13·038	5·540	11·935	·05882
18	324	5832	4·243	2·621	13·416	5·646	12·164	·05556
19	361	6859	4·359	2·668	13·784	5·749	12·386	·05263
20	400	8000	4·472	2·714	14·142	5·848	12·599	·0500
21	441	9261	4·583	2·759	14·491	5·944	12·806	·04762
22	484	10648	4·690	2·802	14·832	6·037	13·006	·04545
23	529	12167	4·796	2·844	15·166	6·127	13·200	·04348
24	576	13824	4·899	2·884	15·492	6·214	13·389	·04167
25	625	15625	5·000	2·924	15·811	6·300	13·572	·0400
26	676	17576	5·099	2·962	16·125	6·383	13·751	·03846
27	729	19683	5·196	3·000	16·432	6·463	13·925	·03704
28	784	21952	5·292	3·037	16·733	6·542	14·095	·03571
29	841	24389	5·385	3·072	17·029	6·619	14·260	·03448
30	900	27000	5·477	3·107	17·321	6·694	14·422	·03333
31	961	29791	5·568	3·141	17·607	6·768	14·581	·03226
32	1024	32768	5·657	3·175	17·889	6·840	14·736	·03125
33	1089	35937	5·745	3·208	18·166	6·910	14·888	·03030
34	1156	39304	5·831	3·240	18·439	6·980	15·037	·02941
35	1225	42875	5·916	3·271	18·708	7·047	15·183	·02857
36	1296	46656	6·000	3·302	18·974	7·114	15·326	·02778
37	1369	50653	6·083	3·332	19·235	7·179	15·467	·02703
38	1444	54872	6·164	3·362	19·494	7·243	15·605	·02632
39	1521	59319	6·245	3·391	19·748	7·306	15·741	·02564
40	1600	64000	6·325	3·420	20·00	7·368	15·874	·0250
41	1681	68921	6·403	3·448	20·248	7·429	16·005	·02439
42	1764	74088	6·481	3·476	20·494	7·489	16·134	·02381
43	1849	79507	6·557	3·503	20·736	7·548	16·261	·02326
44	1936	85184	6·633	3·530	20·976	7·606	16·386	·02273
45	2025	91125	6·708	3·557	21·213	7·663	16·510	·02222
46	2116	97336	6·782	3·583	21·448	7·719	16·631	·02174
47	2209	103823	6·856	3·609	21·679	7·775	16·751	·02128
48	2304	110592	6·928	3·634	21·909	7·830	16·869	·02083
49	2401	117649	7·000	3·659	22·136	7·884	16·985	·02041
50	2500	125000	7·071	3·684	22·361	7·937	17·100	·020

POWERS, ROOTS AND RECIPROCALS

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$
51	2601	132651	7·141	3·708	22·583	7·990	17·213	·01961
52	2704	140608	7·211	3·733	22·804	8·041	17·325	·01923
53	2809	148877	7·280	3·756	23·022	8·093	17·435	·01887
54	2916	157464	7·348	3·780	23·238	8·143	17·544	·01852
55	3025	166375	7·416	3·803	23·452	8·193	17·652	·01818
56	3136	175616	7·483	3·826	23·664	8·243	17·758	·01786
57	3249	185193	7·550	3·849	23·875	8·291	17·863	·01754
58	3364	195112	7·616	3·871	24·083	8·340	17·967	·01724
59	3481	205379	7·681	3·893	24·290	8·387	18·070	·01695
60	3600	216000	7·746	3·915	24·495	8·434	18·171	·01667
61	3721	226981	7·810	3·936	24·698	8·481	18·272	·01639
62	3844	238328	7·874	3·958	24·900	8·527	18·371	·01613
63	3969	250047	7·937	3·979	25·100	8·573	18·469	·01587
64	4096	262144	8·000	4·000	25·298	8·618	18·566	·01562
65	4225	274625	8·062	4·021	25·495	8·662	18·663	·01538
66	4356	287496	8·124	4·041	25·690	8·707	18·758	·01515
67	4489	300763	8·185	4·062	25·884	8·750	18·852	·01493
68	4624	314432	8·246	4·082	26·077	8·794	18·945	·01471
69	4761	328509	8·307	4·102	26·268	8·837	19·038	·01449
70	4900	343000	8·367	4·121	26·458	8·879	19·129	·01429
71	5041	357911	8·426	4·141	26·646	8·921	19·220	·01408
72	5184	373248	8·485	4·160	26·833	8·963	19·310	·01389
73	5329	389017	8·544	4·179	27·019	9·004	19·399	·01370
74	5476	405224	8·602	4·198	27·203	9·045	19·487	·01351
75	5625	421875	8·660	4·217	27·386	9·086	19·574	·01333
76	5776	438976	8·718	4·236	27·568	9·126	19·661	·01316
77	5929	456533	8·775	4·254	27·749	9·166	19·747	·01299
78	6084	474552	8·832	4·273	27·928	9·205	19·832	·01282
79	6241	493039	8·888	4·291	28·107	9·244	19·916	·01266
80	6400	512000	8·944	4·309	28·284	9·283	20·000	·01250
81	6561	531441	9·000	4·327	28·460	9·322	20·083	·01235
82	6724	551368	9·055	4·344	28·636	9·360	20·165	·01220
83	6889	571787	9·110	4·362	28·810	9·398	20·247	·01205
84	7056	592704	9·165	4·380	28·983	9·435	20·328	·01190
85	7225	614125	9·220	4·397	29·155	9·473	20·408	·01176
86	7396	636056	9·274	4·414	29·326	9·510	20·488	·01163
87	7569	658503	9·327	4·431	29·496	9·546	20·567	·01149
88	7744	681472	9·381	4·448	29·665	9·583	20·646	·01136
89	7921	704969	9·434	4·465	29·833	9·619	20·724	·01124
90	8100	729000	9·487	4·481	30·000	9·655	20·801	·01111
91	8281	753571	9·539	4·498	30·166	9·691	20·878	·01099
92	8464	778688	9·592	4·514	30·332	9·726	20·954	·01087
93	8649	804357	9·644	4·531	30·496	9·761	21·029	·01075
94	8836	830584	9·695	4·547	30·659	9·796	21·105	·01064
95	9025	857375	9·747	4·563	30·822	9·830	21·179	·01053
96	9216	884736	9·798	4·579	30·984	9·865	21·253	·01042
97	9409	912673	9·849	4·595	31·145	9·899	21·327	·01031
98	9604	941192	9·899	4·610	31·305	9·933	21·400	·01020
99	9801	970299	9·950	4·626	31·464	9·967	21·472	·01010
100	10000	1000000	10·000	4·642	31·623	10·000	21·544	·0100

Square Roots from 1 to 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1 2 3	4 5 6	7 8 9
1·0	1·000	1·005	1·010	1·015	1·020	1·025	1·030	1·034	1·039	1·044	0 1 1	2 2 3	3 4 4
1·1	1·049	1·054	1·058	1·063	1·068	1·072	1·077	1·082	1·086	1·091	0 1 1	2 2 3	3 4 4
1·2	1·095	1·100	1·105	1·109	1·114	1·118	1·122	1·127	1·131	1·136	0 1 1	2 2 3	3 4 4
1·3	1·140	1·145	1·149	1·153	1·158	1·162	1·166	1·170	1·175	1·179	0 1 1	2 2 3	3 3 4
1·4	1·183	1·187	1·192	1·196	1·200	1·204	1·208	1·212	1·217	1·221	0 1 1	2 2 2	3 3 4
1·5	1·225	1·229	1·233	1·237	1·241	1·245	1·249	1·253	1·257	1·261	0 1 1	2 2 2	3 3 4
1·6	1·265	1·269	1·273	1·277	1·281	1·285	1·288	1·292	1·296	1·300	0 1 1	2 2 2	3 3 3
1·7	1·304	1·308	1·311	1·315	1·319	1·323	1·327	1·330	1·334	1·338	0 1 1	2 2 2	3 3 3
1·8	1·342	1·345	1·349	1·353	1·356	1·360	1·364	1·367	1·371	1·375	0 1 1	1 2 2	3 3 3
1·9	1·378	1·382	1·386	1·389	1·393	1·396	1·400	1·404	1·407	1·411	0 1 1	1 2 2	3 3 3
2·0	1·414	1·418	1·421	1·425	1·428	1·432	1·435	1·439	1·442	1·446	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·1	1·449	1·453	1·456	1·459	1·463	1·466	1·470	1·473	1·476	1·480	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·2	1·483	1·487	1·490	1·493	1·497	1·500	1·503	1·507	1·510	1·513	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·3	1·517	1·520	1·523	1·526	1·530	1·533	1·536	1·539	1·543	1·546	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·4	1·549	1·552	1·556	1·559	1·562	1·565	1·568	1·572	1·575	1·578	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·5	1·581	1·584	1·587	1·591	1·594	1·597	1·600	1·603	1·606	1·609	0 1 1	1 2 2	2 3 3
2·6	1·612	1·616	1·619	1·622	1·625	1·628	1·631	1·634	1·637	1·640	0 1 1	1 2 2	2 2 3
2·7	1·643	1·646	1·649	1·652	1·655	1·658	1·661	1·664	1·667	1·670	0 1 1	1 2 2	2 2 3
2·8	1·673	1·676	1·679	1·682	1·685	1·688	1·691	1·694	1·697	1·700	0 1 1	1 1 2	2 2 3
2·9	1·703	1·706	1·709	1·712	1·715	1·718	1·720	1·723	1·726	1·729	0 1 1	1 1 2	2 2 3
3·0	1·732	1·735	1·738	1·741	1·744	1·746	1·749	1·752	1·755	1·758	0 1 1	1 1 2	2 2 3
3·1	1·761	1·764	1·766	1·769	1·772	1·775	1·778	1·780	1·783	1·786	0 1 1	1 1 2	2 2 3
3·2	1·789	1·792	1·794	1·797	1·800	1·803	1·806	1·808	1·811	1·814	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·3	1·817	1·819	1·822	1·825	1·828	1·830	1·833	1·836	1·838	1·841	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·4	1·844	1·847	1·849	1·852	1·855	1·857	1·860	1·863	1·865	1·868	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·5	1·871	1·873	1·876	1·879	1·881	1·884	1·887	1·889	1·892	1·895	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·6	1·897	1·900	1·903	1·905	1·908	1·910	1·913	1·916	1·918	1·921	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·7	1·924	1·926	1·929	1·931	1·934	1·936	1·939	1·942	1·944	1·947	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·8	1·949	1·952	1·954	1·957	1·960	1·962	1·965	1·967	1·970	1·972	0 1 1	1 1 2	2 2 2
3·9	1·975	1·977	1·980	1·982	1·985	1·987	1·990	1·992	1·995	1·997	0 1 1	1 1 2	2 2 2
4·0	2·000	2·002	2·005	2·007	2·010	2·012	2·015	2·017	2·020	2·022	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·1	2·025	2·027	2·030	2·032	2·035	2·037	2·040	2·042	2·045	2·047	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·2	2·049	2·052	2·054	2·057	2·059	2·062	2·064	2·066	2·069	2·071	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·3	2·074	2·076	2·078	2·081	2·083	2·086	2·088	2·090	2·093	2·095	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·4	2·098	2·100	2·102	2·105	2·107	2·110	2·112	2·114	2·117	2·119	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·5	2·121	2·124	2·126	2·128	2·131	2·133	2·135	2·138	2·140	2·142	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·6	2·145	2·147	2·149	2·152	2·154	2·156	2·159	2·161	2·163	2·166	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·7	2·168	2·170	2·173	2·175	2·177	2·179	2·182	2·184	2·186	2·189	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·8	2·191	2·193	2·195	2·198	2·200	2·202	2·205	2·207	2·209	2·211	0 0 1	1 1 1	2 2 2
4·9	2·214	2·216	2·218	2·220	2·223	2·225	2·227	2·229	2·232	2·234	0 0 1	1 1 1	2 2 2
5·0	2·236	2·238	2·241	2·243	2·245	2·247	2·249	2·252	2·254	2·256	0 0 1	1 1 1	2 2 2
5·1	2·258	2·261	2·263	2·265	2·267	2·269	2·272	2·274	2·276	2·278	0 0 1	1 1 1	2 2 2
5·2	2·280	2·283	2·285	2·287	2·289	2·291	2·293	2·296	2·298	2·300	0 0 1	1 1 1	2 2 2
5·3	2·302	2·304	2·307	2·309	2·311	2·313	2·315	2·317	2·319	2·322	0 0 1	1 1 1	2 4 2
5·4	2·324	2·326	2·328	2·330	2·332	2·335	2·337	2·339	2·341	2·343	0 0 1	1 1 1	1 2 2

Square Roots from 1 to 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
5·5	2·345	2·347	2·349	2·352	2·354	2·356	2·358	2·360	2·362	2·364	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5·6	2·366	2·369	2·371	2·373	2·375	2·377	2·379	2·381	2·383	2·385	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5·7	2·387	2·390	2·392	2·394	2·396	2·398	2·400	2·402	2·404	2·406	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5·8	2·408	2·410	2·412	2·415	2·417	2·419	2·421	2·423	2·425	2·427	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5·9	2·429	2·431	2·433	2·435	2·437	2·439	2·441	2·443	2·445	2·447	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6·0	2·449	2·452	2·454	2·456	2·458	2·460	2·462	2·464	2·466	2·468	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6·1	2·470	2·472	2·474	2·476	2·478	2·480	2·482	2·484	2·486	2·488	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6·2	2·490	2·492	2·494	2·496	2·498	2·500	2·502	2·504	2·506	2·508	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6·3	2·510	2·512	2·514	2·516	2·518	2·520	2·522	2·524	2·526	2·528	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6·4	2·530	2·532	2·534	2·536	2·538	2·540	2·542	2·544	2·546	2·548	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6·5	2·550	2·551	2·553	2·555	2·557	2·559	2·561	2·563	2·565	2·567	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6·6	2·569	2·571	2·573	2·575	2·577	2·579	2·581	2·583	2·585	2·587	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6·7	2·588	2·590	2·592	2·594	2·596	2·598	2·600	2·602	2·604	2·606	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6·8	2·608	2·610	2·612	2·613	2·615	2·617	2·619	2·621	2·623	2·625	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6·9	2·627	2·629	2·631	2·632	2·634	2·636	2·638	2·640	2·642	2·644	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7·0	2·646	2·648	2·650	2·651	2·653	2·655	2·657	2·659	2·661	2·663	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7·1	2·665	2·666	2·668	2·670	2·672	2·674	2·676	2·678	2·680	2·681	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·2	2·683	2·685	2·687	2·689	2·691	2·693	2·694	2·696	2·698	2·700	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·3	2·702	2·704	2·706	2·707	2·709	2·711	2·713	2·715	2·717	2·718	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·4	2·720	2·722	2·724	2·726	2·728	2·729	2·731	2·733	2·735	2·737	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·5	2·739	2·740	2·742	2·744	2·746	2·748	2·750	2·751	2·753	2·755	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·6	2·757	2·759	2·760	2·762	2·764	2·766	2·768	2·769	2·771	2·773	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·7	2·775	2·777	2·778	2·780	2·782	2·784	2·786	2·787	2·789	2·791	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·8	2·793	2·795	2·796	2·798	2·800	2·802	2·804	2·805	2·807	2·809	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·9	2·811	2·812	2·814	2·816	2·818	2·820	2·821	2·823	2·825	2·827	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8·0	2·828	2·830	2·832	2·834	2·835	2·837	2·839	2·841	2·843	2·844	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8·1	2·846	2·848	2·850	2·851	2·853	2·855	2·857	2·858	2·860	2·862	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8·2	2·864	2·865	2·867	2·869	2·871	2·872	2·874	2·876	2·877	2·879	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8·3	2·881	2·883	2·884	2·886	2·888	2·890	2·891	2·893	2·895	2·897	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8·4	2·898	2·900	2·902	2·903	2·905	2·907	2·909	2·910	2·912	2·914	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8·5	2·915	2·917	2·919	2·921	2·922	2·924	2·926	2·927	2·929	2·931	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8·6	2·933	2·934	2·936	2·938	2·939	2·941	2·943	2·944	2·946	2·948	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8·7	2·950	2·951	2·953	2·955	2·956	2·958	2·960	2·961	2·963	2·965	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8·8	2·966	2·968	2·970	2·972	2·973	2·975	2·977	2·978	2·980	2·982	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8·9	2·983	2·985	2·987	2·988	2·990	2·992	2·993	2·995	2·997	2·998	0	0	1	1	1	1	1	1	2
9·0	3·000	3·002	3·003	3·005	3·007	3·008	3·010	3·012	3·013	3·015	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·1	3·017	3·018	3·020	3·022	3·023	3·025	3·027	3·028	3·030	3·032	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·2	3·033	3·035	3·036	3·038	3·040	3·041	3·043	3·045	3·046	3·048	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·3	3·050	3·051	3·053	3·055	3·056	3·058	3·059	3·061	3·063	3·064	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·4	3·066	3·068	3·069	3·071	3·072	3·074	3·076	3·077	3·079	3·081	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·5	3·082	3·084	3·085	3·087	3·089	3·090	3·092	3·094	3·095	3·097	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·6	3·098	3·100	3·102	3·103	3·105	3·106	3·108	3·110	3·111	3·113	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·7	3·114	3·116	3·118	3·119	3·121	3·122	3·124	3·126	3·127	3·129	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·8	3·130	3·132	3·134	3·135	3·137	3·138	3·140	3·142	3·143	3·145	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·9	3·146	3·148	3·150	3·151	3·153	3·154	3·156	3·158	3·159	3·161	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Square Roots from 10 to 100

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	3·162	3·178	3·194	3·209	3·225	3·240	3·256	3·271	3·286	3·302	2 3 5	6 8 9	11 12 14
11	3·317	3·332	3·347	3·362	3·376	3·391	3·406	3·421	3·435	3·450	1 3 4	6 7 9	10 12 13
12	3·464	3·479	3·493	3·507	3·521	3·536	3·550	3·564	3·578	3·592	1 3 4	6 7 8	10 11 13
13	3·606	3·619	3·633	3·647	3·661	3·674	3·688	3·701	3·715	3·728	1 3 4	5 7 8	10 11 12
14	3·742	3·755	3·768	3·782	3·795	3·808	3·821	3·834	3·847	3·860	1 3 4	5 7 8	9 11 12
15	3·873	3·886	3·899	3·912	3·924	3·937	3·950	3·962	3·975	3·987	1 3 4	5 6 8	9 10 11
16	4·000	4·012	4·025	4·037	4·050	4·062	4·074	4·087	4·099	4·111	1 2 4	5 6 7	9 10 11
17	4·123	4·135	4·147	4·159	4·171	4·183	4·195	4·207	4·219	4·231	1 2 4	5 6 7	8 10 11
18	4·243	4·254	4·266	4·278	4·290	4·301	4·313	4·324	4·336	4·347	1 2 3	5 6 7	8 9 10
19	4·359	4·370	4·382	4·393	4·403	4·416	4·427	4·438	4·450	4·461	1 2 3	5 6 7	8 9 10
20	4·472	4·483	4·494	4·506	4·517	4·528	4·539	4·550	4·561	4·572	1 2 3	4 6 7	8 9 10
21	4·583	4·593	4·604	4·615	4·626	4·637	4·648	4·658	4·669	4·680	1 2 3	4 5 6	8 9 10
22	4·690	4·701	4·712	4·722	4·733	4·743	4·754	4·764	4·775	4·785	1 2 3	4 5 6	7 8 9
23	4·796	4·806	4·817	4·827	4·837	4·848	4·858	4·868	4·879	4·889	1 2 3	4 5 6	7 8 9
24	4·899	4·909	4·919	4·930	4·940	4·950	4·960	4·970	4·980	4·990	1 2 3	4 5 6	7 8 9
25	5·000	5·010	5·020	5·030	5·040	5·050	5·060	5·070	5·079	5·089	1 2 3	4 5 6	7 8 9
26	5·099	5·109	5·119	5·128	5·138	5·148	5·158	5·167	5·177	5·187	1 2 3	4 5 6	7 8 9
27	5·196	5·206	5·215	5·225	5·235	5·244	5·254	5·263	5·273	5·282	1 2 3	4 5 6	7 8 9
28	5·292	5·301	5·310	5·320	5·329	5·339	5·348	5·357	5·367	5·376	1 2 3	4 5 6	7 7 8
29	5·385	5·394	5·404	5·413	5·422	5·431	5·441	5·450	5·459	5·468	1 2 3	4 5 5	6 7 8
30	5·477	5·486	5·495	5·505	5·514	5·523	5·532	5·541	5·550	5·559	1 2 3	4 4 5	6 7 8
31	5·568	5·577	5·586	5·595	5·604	5·612	5·621	5·630	5·639	5·648	1 2 3	3 4 5	6 7 8
32	5·657	5·666	5·675	5·683	5·692	5·701	5·710	5·718	5·727	5·736	1 2 3	3 4 5	6 7 8
33	5·745	5·753	5·762	5·771	5·779	5·788	5·797	5·805	5·814	5·822	1 2 3	3 4 5	6 7 8
34	5·831	5·840	5·848	5·857	5·865	5·874	5·882	5·891	5·899	5·908	1 2 3	3 4 5	6 7 8
35	5·916	5·925	5·933	5·941	5·950	5·958	5·967	5·975	5·983	5·992	1 2 2	3 4 5	6 7 8
36	6·000	6·008	6·017	6·025	6·033	6·042	6·050	6·058	6·066	6·075	1 2 2	3 4 5	6 7 7
37	6·083	6·091	6·099	6·107	6·116	6·124	6·132	6·140	6·148	6·156	1 2 2	3 4 5	6 7 7
38	6·164	6·173	6·181	6·189	6·197	6·205	6·213	6·221	6·229	6·237	1 2 2	3 4 5	6 6 7
39	6·245	6·253	6·261	6·269	6·277	6·285	6·293	6·301	6·309	6·317	1 2 2	3 4 5	6 6 7
40	6·325	6·332	6·340	6·348	6·356	6·364	6·372	6·380	6·387	6·395	1 2 2	3 4 5	6 6 7
41	6·403	6·411	6·419	6·427	6·434	6·442	6·450	6·458	6·465	6·473	1 2 2	3 4 5	5 6 7
42	6·481	6·488	6·496	6·504	6·512	6·519	6·527	6·535	6·542	6·550	1 2 2	3 4 5	5 6 7
43	6·557	6·565	6·573	6·580	6·588	6·595	6·603	6·611	6·618	6·626	1 2 2	3 4 5	5 6 7
44	6·633	6·641	6·648	6·656	6·663	6·671	6·678	6·686	6·693	6·701	1 2 2	3 4 5	5 6 7
45	6·708	6·716	6·723	6·731	6·738	6·745	6·753	6·760	6·768	6·775	1 1 2	3 4 4	5 6 7
46	6·782	6·790	6·797	6·804	6·812	6·819	6·826	6·834	6·841	6·848	1 1 2	3 4 4	5 6 7
47	6·856	6·863	6·870	6·877	6·885	6·892	6·899	6·907	6·914	6·921	1 1 2	3 4 4	5 6 7
48	6·928	6·935	6·943	6·950	6·957	6·964	6·971	6·979	6·986	6·993	1 1 2	3 4 4	5 6 6
49	7·000	7·007	7·014	7·021	7·029	7·036	7·043	7·050	7·057	7·064	1 1 2	3 4 4	5 6 6
50	7·071	7·078	7·085	7·092	7·099	7·106	7·113	7·120	7·127	7·134	1 1 2	3 4 4	5 6 6
51	7·141	7·148	7·155	7·162	7·169	7·176	7·183	7·190	7·197	7·204	1 1 2	3 4 4	5 6 6
52	7·211	7·218	7·225	7·232	7·239	7·246	7·253	7·259	7·266	7·273	1 1 2	3 3 4	5 6 6
53	7·280	7·287	7·294	7·301	7·308	7·314	7·321	7·328	7·335	7·342	1 1 2	3 3 4	5 5 6
54	7·348	7·355	7·362	7·369	7·376	7·382	7·389	7·396	7·403	7·409	1 1 2	3 3 4	5 5 6

Square Roots froom 10 to 100

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1 2 3	4 5 6	7 8 9
55	7·416	7·423	7·430	7·436	7·443	7·450	7·457	7·463	7·470	7·477	1 1 2	3 3 4	5 5 6
56	7·483	7·490	7·497	7·503	7·510	7·517	7·523	7·530	7·537	7·543	1 1 2	3 3 4	5 5 6
57	7·550	7·556	7·563	7·570	7·576	7·583	7·589	7·596	7·603	7·609	1 1 2	3 3 4	5 5 6
58	7·616	7·622	7·629	7·635	7·642	7·649	7·655	7·662	7·668	7·675	1 1 2	3 3 4	5 5 6
59	7·681	7·688	7·694	7·701	7·707	7·714	7·720	7·727	7·733	7·740	1 1 2	3 3 4	4 5 6
60	7·746	7·752	7·759	7·765	7·772	7·778	7·785	7·791	7·797	7·804	1 1 2	3 3 4	4 5 6
61	7·810	7·817	7·823	7·829	7·836	7·842	7·849	7·855	7·861	7·868	1 1 2	3 3 4	4 5 6
62	7·874	7·880	7·887	7·893	7·899	7·906	7·912	7·918	7·925	7·931	1 1 2	3 3 4	4 5 6
63	7·937	7·944	7·950	7·956	7·962	7·969	7·975	7·981	7·987	7·994	1 1 2	3 3 4	4 5 6
64	8·000	8·006	8·012	8·019	8·025	8·031	8·037	8·044	8·050	8·056	1 1 2	2 3 4	4 5 6
65	8·062	8·068	8·075	8·081	8·087	8·093	8·099	8·106	8·112	8·118	1 1 2	2 3 4	4 5 6
66	8·124	8·130	8·136	8·142	8·149	8·155	8·161	8·167	8·173	8·179	1 1 2	2 3 4	4 5 5
67	8·185	8·191	8·198	8·204	8·210	8·216	8·222	8·228	8·234	8·240	1 1 2	2 3 4	4 5 5
68	8·246	8·252	8·258	8·264	8·270	8·276	8·283	8·289	8·295	8·301	1 1 2	2 3 4	4 5 5
69	8·307	8·313	8·319	8·325	8·331	8·337	8·343	8·349	8·355	8·361	1 1 2	2 3 4	4 5 5
70	8·367	8·373	8·379	8·385	8·390	8·396	8·402	8·408	8·414	8·420	1 1 2	2 3 4	4 5 5
71	8·426	8·432	8·438	8·444	8·450	8·456	8·462	8·468	8·473	8·479	1 1 2	2 3 4	4 5 5
72	8·485	8·491	8·497	8·503	8·509	8·515	8·521	8·526	8·532	8·538	1 1 2	2 3 3	4 5 5
73	8·544	8·550	8·556	8·562	8·567	8·573	8·579	8·585	8·591	8·597	1 1 2	2 3 3	4 5 5
74	8·602	8·608	8·614	8·620	8·626	8·631	8·637	8·643	8·649	8·654	1 1 2	2 3 3	4 5 5
75	8·660	8·666	8·672	8·678	8·683	8·689	8·695	8·701	8·706	8·712	1 1 2	2 3 3	4 5 5
76	8·718	8·724	8·729	8·735	8·741	8·746	8·752	8·758	8·764	8·769	1 1 2	2 3 3	4 5 5
77	8·775	8·781	8·786	8·792	8·798	8·803	8·809	8·815	8·820	8·826	1 1 2	2 3 3	4 4 5
78	8·832	8·837	8·843	8·849	8·854	8·860	8·866	8·871	8·877	8·883	1 1 2	2 3 3	4 4 5
79	8·888	8·894	8·899	8·905	8·911	8·916	8·922	8·927	8·933	8·939	1 1 2	2 3 3	4 4 5
80	8·944	8·950	8·955	8·961	8·967	8·972	8·978	8·983	8·989	8·994	1 1 2	2 3 3	4 4 5
81	9·000	9·006	9·011	9·017	9·022	9·028	9·033	9·039	9·044	9·050	1 1 2	2 3 3	4 4 5
82	9·055	9·061	9·066	9·072	9·077	9·083	9·088	9·094	9·099	9·105	1 1 2	2 3 3	4 4 5
83	9·110	9·116	9·121	9·127	9·132	9·138	9·143	9·149	9·154	9·160	1 1 2	2 3 3	4 4 5
84	9·165	9·171	9·176	9·182	9·187	9·192	9·198	9·203	9·209	9·214	1 1 2	2 3 3	4 4 5
85	9·220	9·225	9·230	9·236	9·241	9·247	9·252	9·257	9·263	9·268	1 1 2	2 3 3	4 4 5
86	9·274	9·279	9·284	9·290	9·295	9·301	9·306	9·311	9·317	9·322	1 1 2	2 3 3	4 4 5
87	9·327	9·333	9·338	9·343	9·349	9·354	9·359	9·365	9·370	9·375	1 1 2	2 3 3	4 4 5
88	9·381	9·386	9·391	9·397	9·402	9·407	9·413	9·418	9·423	9·429	1 1 2	2 3 3	4 4 5
89	9·434	9·439	9·445	9·450	9·455	9·460	9·466	9·471	9·476	9·482	1 1 2	2 3 3	4 4 5
90	9·487	9·492	9·497	9·503	9·508	9·513	9·518	9·524	9·529	9·534	1 1 2	2 3 3	4 4 5
91	9·539	9·545	9·550	9·555	9·560	9·566	9·571	9·576	9·581	9·586	1 1 2	2 3 3	4 4 5
92	9·592	9·597	9·602	9·607	9·612	9·618	9·623	9·628	9·633	9·638	1 1 2	2 3 3	4 4 5
93	9·644	9·649	9·654	9·659	9·664	9·670	9·675	9·680	9·685	9·690	1 1 2	2 3 3	4 4 5
94	9·695	9·701	9·706	9·711	9·716	9·721	9·726	9·731	9·737	9·742	1 1 2	2 3 3	4 4 5
95	9·747	9·752	9·757	9·762	9·767	9·772	9·778	9·783	9·788	9·793	1 1 2	2 3 3	4 4 5
96	9·798	9·803	9·808	9·813	9·818	9·823	9·829	9·834	9·839	9·844	1 1 2	2 3 3	4 4 5
97	9·849	9·854	9·859	9·864	9·869	9·874	9·879	9·884	9·889	9·894	1 1 1	2 3 3	4 4 5
98	9·899	9·905	9·910	9·915	9·920	9·925	9·930	9·935	9·940	9·945	0 1 1	2 2 3	3 4 4
99	9·950	9·955	9·960	9·965	9·970	9·975	9·980	9·985	9·990	9·995	0 1 1	2 2 3	3 4 4

RECIPROCALS OF NUMBERS FROM 1 TO 10

[Numbers in difference columns to be subtracted, not added.]

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	1·000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174									
1·1	9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403									
1·2	8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7813	7752									
1·3	7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194									
1·4	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711	5	10	14	19	24	29	33	38	43
1·5	6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289	4	8	13	17	21	25	29	33	38
1·6	6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917	4	7	11	15	18	22	26	29	33
1·7	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587	3	6	10	13	16	20	23	26	29
1·8	5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1·9	5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025	3	5	8	11	13	16	18	21	24
2·0	5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785	2	5	7	10	12	14	17	19	21
2·1	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566	2	4	7	9	11	13	15	17	20
2·2	4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2·3	4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184	2	4	5	7	9	11	13	14	16
2·4	4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016	2	3	5	7	8	10	12	13	15
2·5	4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2·6	3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717	1	3	4	6	7	8	10	11	13
2·7	3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584	1	3	4	5	7	8	9	11	12
2·8	3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460	1	2	4	5	6	7	9	10	11
2·9	3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3·0	3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236	1	2	3	4	5	6	7	9	10
3·1	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3·2	3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3·3	3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950	1	2	3	4	4	5	6	7	8
3·4	2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865	1	2	3	3	4	5	6	7	8
3·5	·2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786	1	2	2	3	4	5	6	6	7
3·6	·2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3·7	·2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3·8	·2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3·9	·2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
4·0	·2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
4·1	·2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387	1	1	2	2	3	3	4	5	5
4·2	·2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·3	·2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·4	·2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·5	·2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·6	·2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·7	·2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·8	·2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045	0	1	1	2	2	3	3	3	4
4·9	·2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5·0	·2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5·1	·1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927	0	1	1	2	2	2	3	3	3
5·2	·1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5·3	·1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5·4	·1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821	0	1	1	1	2	2	2	3	3

RECIPROCALS OF NUMBERS. From 1 to 10

(Numbers in difference columns to be subtracted, not added.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences		
											1 2 3	4 5 6	7 8 9
5·5	·1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789	0 1 1	1 2 2	2 3 3
5·6	·1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757	0 1 1	1 2 2	2 3 3
5·7	·1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727	0 1 1	1 1 2	2 2 3
5·8	·1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698	0 1 1	1 1 2	2 2 3
5·9	·1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669	[illegible] 1 1	1 1 2	2 2 3
6·0	·1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642	0 1 1	1 1 2	2 2 [illegible]
6·1	·1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616	0 1 1	1 1 2	2 2 [illegible]
6·2	·1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590	0 1 1	1 1 2	2 2 [illegible]
6·3	·1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565	0 0 1	1 1 1	2 2 [illegible]
6·4	·1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541	0 0 1	1 1 1	2 2 [illegible]
6·5	·1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517	0 0 1	1 1 1	2 2 [illegible]
6·6	·1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495	0 0 1	1 1 1	2 2 [illegible]
6·7	·1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473	0 0 1	1 1 1	2 2 [illegible]
6·8	·1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451	0 0 1	1 1 1	2 2 [illegible]
6·9	·1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431	0 0 1	1 1 1	2 2 [illegible]
7·0	·1429	1427	1425	1422	1420	1418	1410	1414	1412	1410	0 0 1	1 1 1	1 2 [illegible]
7·1	·1408	1406	1404	1403	1401	[illegible]	1397	1395	1393	1391	0 0 1	1 1 1	1 2
7·2	·1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372	0 0 1	1 1 1	1 2
7·3	·1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353	0 0 1	1 1 1	1 2 [illegible]
7·4	·1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335	0 0 1	1 1 1	1 1 [illegible]
7·5	·1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318	0 0 1	1 1 1	1 1 2
7·6	·1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	[illegible]	1300	0 0 1	1 1 1	1 1 [illegible]
7·7	·1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284	0 0 0	1 1 1	1 1 [illegible]
7·8	·1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267	0 0 0	1 1 1	1 1 1
7·9	·1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·0	·1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·1	·1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·2	·1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·3	·1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·4	·1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·5	·1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·6	·1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·7	·1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·8	·1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125	0 0 0	1 1 1	1 1 1
8·9	·1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112	0 0 0	1 1 1	1 1 [illegible]
9·0	·1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100	0 0 0	1 1 1	1 1 1
9·1	·1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1090	1089	1088	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·2	·1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·3	·1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·4	·1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·5	·1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·6	·1042	1041	1039	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·7	·1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·8	·1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011	0 0 0	0 1 1	1 1 1
9·9	·1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001	0 0 0	[illegible]	1 1 1